Θεωρία Κινδύνου ΜΑΠ

Εξετάσεις 8 Ιουνίου 2012

1. [Βαθμοί 1] Απο τις παρακάτω συναρτήσεις, ποιές είναι συναρτήσεις ωφελιμότητας και ποιές αντιστοιχούν σε κινδυνόφοβο άτομο? Ως πεδίο ορισμού για καθεμία θεωρούμε το $(0, \infty)$.

$$x^3,\ 1/x,\ -e^{-x},\ \log x, \cos(x),\ x + \sqrt{x},\ x - \sqrt{x+1}$$

2. [Βαθμοί 2] Δύο άτομα A, B έχουν αρχικές περιουσίες $w_A = 1$ και $w_B = 10$ αντίστοιχα, και συναρτήσεις ωφελιμότητας $u_A(x) = \log x, u_B(x) = -1/x$ (ορίζονται μόνο στο $(0, \infty)$). Ο A έχει δικαίωμα σε τυχαίο κέρδος X που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(0, 1)$. Συζητούν το ενδεχόμενο ο A να παραχωρήσει το δικαίωμα στον B και να πάρει απο τον B ποσό K. Ποιές είναι οι τιμές K του για τις οποίες συμφωνούν και οι δύο για την συναλλαγή;

3. [Βαθμοί 3] Θεωρούμε άτομο με αρχική περιουσία $w = 10$ και συνάρτηση ωφελιμότητας

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{1}{1+x} & \text{αν } x \geq 0 \\ x - 1 & \text{αν } x < 0. \end{cases}$$

Το άτομο αντιμετωπίζει κίνδυνο που παίρνει τις τιμές 10 και 6, με πιθανότητα 1/2 την καθεμία.

(α) Για ποιά ασφάλιση υπερβάλλοντος ζημίας $I_{x_1}(X) = (X - x_1)^+$ έχουμε $E(I_{x_1}(X)) = 4$;

(β) Να υπολογιστεί το μέγιστο τίμημα G_{x_1} που προτίθεται να πληρώσει το άτομο για να αγοράσει την ασφάλιση $I_{x_1}(X)$ του ερωτήματος (α).

4. [Βαθμοί 3] Δίνεται χαρτοφυλάκιο $n = 10^6$ ανεξάρτητων ισόνομων κινδύνων ώστε ο καθένας έχει μέση τιμή $\mu = 4$, διασπορά $\sigma^2 = 9$, και πραγματοποιείται (ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους) με πιθανότητα $q = 1/2^6$. Έστω S το σύνολο των ζημιών. Πληρώνουμε για την πλήρη ασφάλιση του χαρτοφυλακίου το ποσό $(1 + r)E(S)$.

(α) Για ποιές τιμές του r η πιθανότητα το ασφάλιστρο να μην επαρκέσει για την κάλυψη των κινδύνων που θα πραγματοποιηθούν είναι μικρότερη από 0.01;

(β) Έστω m το πλήθος των κινδύνων που πραγματοποιούνται. Ποιά είναι η μέση τιμή του m;

Για τη συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής δίνεται ότι $\Phi(-2.33) = 0.01$, $\Phi(2.33) = 0.99$. Επίσης, να χρησιμοποιηθεί η προσέγγιση $q(1 - q) \approx q$.

5. [Βαθμοί 2] Έστω τυχαία μεταβλητή A που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0, 1)$ και X τυχαία μεταβλητή η οποία δεδομένου ότι η A έχει πάρει την τιμή a, ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο a. Δηλαδή $f_{X|A}(x|A = a) = ae^{-ax}\mathbf{1}_{x>0}$. Να υπολογιστεί η πυκνότητα της X.

6. [Βαθμοί 2] Θεωρούμε τη διαδικασία πλεονάσματος $(U(s))_{s\geq 0}$ με περιθώριο ασφάλειας $\theta = 1/3$ και ζημιές $\{X_i : i \geq 1\}$ ανεξάρτητες ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, καθεμία με πυκνότητα

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2e^{-2x} + e^{-x}) & \text{για } x > 0, \\ 0 & \text{για } x \leq 0 \end{cases}$$

οι οποίες συμβαίνουν με βάση μια ομογενή διαδικασία Poisson με παράμετρο $m = 3$.

(α) Ποιά είναι η ροπογεννήτρια της X_1?

(β) Να υπολογιστεί ο συντελεστής προσαρμογής για την διαδικασία.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2.5 ώρες. **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**

Λύσεις

ΘΕΜΑ 1. Στη λίστα πιο κάτω, η πρώτη απάντηση λέει αν η δεδομένη συνάρτηση είναι συνάρτηση ωφελιμότητας, και η δεύτερη αν επιπλέον αντιστοιχεί σε κινδυνόφοβο άτομο.

x^3	Ναι, Οχι.	Δεν είναι κοίλη
$1/x$	Όχι.	Είναι φθίνουσα
$-e^{-x}$	Ναι, Ναι.	
$\log x$	Ναι, Ναι.	
$\cos(x)$	Όχι.	Είναι φθίνουσα στο$[0, \pi/2]$, και σε πολλά διαστήματα ακόμα.
$x + \sqrt{x}$	Ναι, Ναι.	
$x - \sqrt{x+1}$	Ναι, Όχι.	Δεν είναι κοίλη

Στην εξέταση πρέπει κανείς να δικαιολογήσει χωριστά κάθε γραμμή. Για παράδειγμα η $u(x) = x - \sqrt{1+x}$ είναι συνάρτηση ωφελιμότητας αφού είναι αύξουσα (στο $(0, \infty)$). Και αυτό ισχύει γιατί η παράγωγος της

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \geq \frac{1}{2}$$

είναι θετική. Όμως δεν αντιστοιχεί σε κινδυνόφοβο άτομο αφού δεν είναι κοίλη, γιατί η δεύτερη παράγωγος

$$f''(x) = \frac{1}{4}(1+x)^{-3/2} > 0$$

είναι θετική (άρα η f είναι γνήσια κυρτή).

ΘΕΜΑ 2. Με βάση την αρχή της ωφελιμότητας, το άτομο A συμφωνεί στην συναλλαγή αν και μόνο άν ισχύει

$$\mathbf{E}\{u_A(1+X)\} \leq u_A(1+K).$$

Το αριστερό μέλος ισούται με

$$\int_0^1 \log(1+x)dx = \int_1^2 \log y dy = y \log y - y|_1^2 = 2\log 2 - 2 - (1 \log 1 - 1) = 2 \log 2 - 1 = \log(4/e).$$

Άρα η πιο πάνω ανισότητα δίνει $4/e \leq 1 + K$, δηλαδή

$$K \geq \frac{4}{e} - 1 \approx 0.471$$

Όμοια, το άτομο B συμφωνεί με την συναλλαγή αν και μόνο αν

$$\mathbf{E}\{u_B(10 - K + X)\} \geq u_B(10). \tag{1}$$

Σίγουρα πρέπει να ισχύει $K \leq 1$ γιατί το κέρδος X είναι το πολύ 1. Άρα $10 - K + X > 0$, και το αριστερό μέλος της πιο πάνω ανισότητας ισούται με

$$-\int_0^1 \frac{1}{10 - K + x}\, dx = -\log(10 - K + x)|_0^1 = -\{\log(11 - K) - \log(10 - K)\} = -\log\left(1 + \frac{1}{10 - K}\right).$$

Άρα η (1) ισοδυναμεί με

$$\log\left(1 + \frac{1}{10-K}\right) \leq \frac{1}{10} \iff ... \iff K \leq 10 - \frac{1}{e^{1/10} - 1} \approx 0.491$$

Επομένως, οι τιμές του K για τις οποίες συμφωνούν και τα δύο άτομα στην συναλλαγή είναι οι $K \in [0.471, 0.491]$.

ΘΕΜΑ 3. (α) Θέλουμε ένα x_1 που να ικανοποιεί την

$$E(X - x_1)^+ = \frac{1}{2}\{(10 - x_1)^+ + (6 - x_1)^+\} = 4.$$

Αν υποθέσουμε ότι $x_1 > 6$, η μέση τιμή μπορεί να γίνει το πολύ $(10 - 6)/2 = 2$ που είναι μικρότερο του 4. Άρα αναγκαστικά πρέπει $x_1 < 6$, και η εξίσωση γίνεται $10 - x_1 + 6 - x_1 = 8$. Δηλαδή $x_1 = 4$.

(β) Κατ' αρχάς, υπολογίζουμε τη μέση ωφελιμότητα του ατόμου αν δεν ασφαλιστεί.

$$\mathbf{E}\{u(w-X)\} = \frac{1}{2}\{u(0)+u(4)\} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{5}\right) = -\frac{3}{5}. \tag{2}$$

Έπειτα, η μέση ωφελιμότητα αν αγοράσει την ασφάλιση του (α) σε τιμή G είναι

$$\mathbf{E}\left\{u\left(w-G-X\wedge x_1\right)\right\} = \mathbf{E}\left\{u\left(10-G-X\wedge 4\right)\right\} = u(10-G-4) = u(6-G). \tag{3}$$

Το μέγιστο G για το οποίο το άτομο δέχεται να ασφαλιστεί είναι εκείνο για το οποίο η τελευταία ποσότητα ισούται με $-3/5$. Επειδή $u(0)=-1$ και η u είναι αύξουσα, πρέπει $6-G>0$, οπότε για το $u(6-G)$ παίρνουμε τον πρώτο κλάδο της u. Η εξίσωση $-1/(1+6-G) = -5/3$ έχει λύση $G = 16/3 \approx 5.33$ που είναι μικρότερη του 6. Άρα $G_{x_1} = 16/3$.

ΘΕΜΑ 4. (α) Ζητάμε να ισχύει

$$0.01 \geq \mathbf{P}(S > (1+r)\mathbf{E}(S)) = P\left(\frac{S-\mathbf{E}(S)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S)}} > r\frac{\mathbf{E}(S)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S)}}\right) \approx 1-\Phi\left(r\frac{\mathbf{E}(S)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S)}}\right).$$

Η τελευταία προσέγγιση προκύπτει απο το κεντρικό οριακό θεώρημα. Άρα

$$\Phi\left(r\frac{\mathbf{E}(S)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S)}}\right) \geq 0.99 = \Phi(2.33).$$

Επειδή η Φ είναι γνησίως αύξουσα, αυτό ισοδυναμεί με

$$r\frac{\mathbf{E}(S)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S)}} \geq 2.33$$

Δηλαδή

$$r \geq 2.33\frac{\sqrt{\mathrm{Var}(S)}}{\mathbf{E}(S)}.$$

Τώρα, κατά τα γνωστά

$$\mathrm{Var}(S) = nq\sigma^2 + nq(1-q)\mu^2 \approx nq(\sigma^2+\mu^2) = 25nq,$$

και $\mathbf{E}(S) = nq\mu = 4nq$. Άρα

$$\frac{\sqrt{\mathrm{Var}(S)}}{E(S)} = \frac{5}{4\sqrt{nq}} = \frac{5}{4\sqrt{5^6}} = \frac{1}{100},$$

και η συνθήκη για το r είναι $r \geq 0.0233$.

(β) Για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$, θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή

$$I_i := \begin{cases} 1 & \text{αν ο κίνδυνος } i \text{ πραγματοποιείται,} \\ 0 & \text{αν ο κίνδυνος } i \text{ δεν πραγματοποιείται.} \end{cases}$$

Τότε $m = \sum_{i=1}^n I_i$, και $\mathbf{E}(m) = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}(I_i) = n\mathbf{E}(I_1) = nq = 5^6$.

ΘΕΜΑ 5. Έστω f_A η πυκνότητα της A. Η f_A ισούται με 1 στο $(0,1)$ και με μηδέν αλλού. Κατά τα γνωστά

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X|A}(x|A=a)f_A(a)da = \int_0^1 f_{X|A}(x|A=a)da.$$

Όταν $x \leq 0$, η συνάρτηση στο ολοκλήρωμα ισούται με 0, οπότε και το ολοκλήρωμα ισούται με 0. Για $x>0$, το ολοκλήρωμα ισούται με

$$\int_0^1 ae^{-ax}da = \ldots = \frac{1-(1+x)e^{-x}}{x^2}.$$

Ο υπολογισμός γίνεται με χρήση ολοκλήρωσης κατά παράγοντες. Άρα η πυκνότητα της X είναι

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1-(1+x)e^{-x}}{x^2} & \text{αν } x > 0, \\ 0 & \text{αν } x \leq 0. \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 6. (α) Για κάθε $t \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty e^{tx}2e^{-2x}dx + \int_0^\infty e^{tx}e^{-x}dx\right)$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα είναι η ροπογενήτρια της εκθετικής κατανομής με παράμετρο 2, και το δεύτερο της εκθετικής με παράμετρο 1. Από το τυπολόγιο, η ροπογεννήτρια της εκθετικής με παράμετρο $a > 0$ είναι

$$h(t) = \begin{cases} \frac{a}{a-t} & \text{αν } t < a \\ \infty & \text{αν } t \geq a. \end{cases}$$

Άρα

$$M_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{2}{2-t} + \frac{1}{1-t}\right) & \text{αν } t < 1 \\ \infty & \text{αν } t \geq 1. \end{cases}$$

(β) Η μέση τιμή της X υπολογίζεται με ανάλογο σκεπτικό όπως η ροπογεννήτρια στο προηγούμενο ερώτημα, και προκύπτει ως

$$p_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{3}{4}.$$

Η εξίσωση για το συντελεστή προσαρμογής είναι

$$1 + (1+\theta)p_1 r = M_X(r).$$

Οποιαδήποτε λύση θα πρέπει να ικανοποιεί $r < 1$ (ώστε η ροπογενήτρια να είναι πεπερασμένη), και για αυτά τα r η εξίσωση γίνεται

$$1 + \frac{4}{3}\frac{3}{4}r = \frac{1}{2-r} + \frac{1}{2(1-r)} \Leftrightarrow r = \frac{1}{2-r} + \frac{1}{2(1-r)} - 1 = \frac{-r(2r-3)}{2(2-r)(1-r)}.$$

Επειδή η $r = 0$ δεν είναι αποδεκτή λύση, η τελευταία ισότητα γίνεται

$$1 = \frac{3-2r}{2(2-r)(1-r)} \Leftrightarrow 2(r^2 - 3r + 2) = 3 - 2r \Leftrightarrow 2r^2 - 4r + 1 = 0.$$

Από τις δύο λύσεις

$$r = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{4} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2},$$

δεκτή γίνεται η

$$r = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

γιατί πρέπει $r < 1$.