Αναλογιστικά Μαθηματικά - Θεωρία Κινδύνου

Εξετάσεις 11 Ιουνίου 2020

1. [Βαθμοί 3] Άτομο έχει πλούτο $w := 1000$ και συνάρτηση ωφελιμότητας u με $u(0) = 0, u(w) = 10$. Αντιμετωπίζει κίνδυνο X που με πιθανότητα 1/2 ισούται με A και με την υπόλοιπη πιθανότητα 1/2 ισούται με 0. Για τις τιμές $1000, 600, 350$ του A γνωρίζουμε ότι το μέγιστο ποσό που δέχεται το άτομο να πληρώσει για πλήρη ασφάλιση από τον κίνδυνο ισούται με $600, 350, 200$ αντίστοιχα.

(α) Να βρεθούν οι τιμές της u σε τρεις τιμές διαφορετικές από τις $0, w$.

(β) Είναι δυνατόν το άτομο να είναι κινδυνόφιλο;

2. [Βαθμοί 3] Για κίνδυνο S με τιμές στο $\mathbb{R}$ και $p \in [0, 1]$, αξία σε κίνδυνο σε επίπεδο εμπιστοσύνης p ονομάζουμε την ποσότητα

$$\mathrm{VaR}(S\,; p) := \inf\{x : \mathbf{P}(S \le x) \ge p\}.$$

(α) Αν ο S έχει πυκνότητα $f(x) = 2e^{-2x}\mathbf{1}_{x>0}$, να υπολογιστεί η $\mathrm{VaR}(S\,; p)$ για κάθε $p \in [0, 1]$.

(β) Αν η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει ο S είναι $\xi < \infty$, να δειχθεί ότι $\mathrm{VaR}(S\,; p) \le \xi$.

(γ) Αν c είναι σταθερά, τότε $\mathrm{VaR}(S + c; p) = \mathrm{VaR}(S\,; p) + c$.

3. [Βαθμοί 3] Ασφαλιστής κατέχει χαρτοφυλάκιο n ανεξάρτητων και ισόνομων κινδύνων. Κάθε κίνδυνος πραγματοποιείται με πιθανότητα $q = 10^{-2}$, και όταν πραγματοποιηθεί, προκαλεί ζημιά με τυχαίο κόστος X που ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο 1 (δηλαδή έχει πυκνότητα $f(x) = e^{-x}\mathbf{1}_{x>0}$). Έστω S η συνολική ζημιά του χαρτοφυλακίου. Γνωρίζουμε ότι $\sqrt{\mathrm{Var}\, S}/\mathbf{E}(S) = 1/10$.

(α) Να υπολογιστεί το n.

(β) Ποιος είναι ο μέσος αριθμός κινδύνων που θα πραγματοποιηθούν;

(γ) Ο ασφαλιστής θα ασφαλίσει το χαρτοφυλάκιο σε μια αντασφαλιστική εταιρία με βάση την αρχή της μέσης τιμής. Ποια είναι η τιμή του περιθωρίου ασφάλειας, θ, ώστε η πιθανότητα το ασφάλιστρο να μην μπορέσει να καλύψει τις ζημιές όλου το χαρτοφυλακίου να είναι το πολύ 0.05;

(δ) Ας υποθέσουμε ότι αφαιρούμε την υπόθεση $\sqrt{\mathrm{Var}\, S}/\mathbf{E}(S) = 1/10$ από τα πιο πάνω, και όπως στο ερώτημα (γ) το χαρτοφυλάκιο ασφαλίζεται έτσι ώστε $\mathbf{P}\{S > (1 + \theta)\mathbf{E}(S)\} \le 0.05$. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του θ ως συνάρτηση του n. Είναι αύξουσα ή φθίνουσα συνάρτηση του n;

4. [Βαθμοί 3] Θεωρούμε τη διαδικασία πλεονάσματος $(U(s))_{s\ge0}$ με $U(0) = u \ge 0$, περιθώριο ασφάλειας $\theta = 1/3$, και ζημιές $\{X_i : i \ge 1\}$ ανεξάρτητες ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, καθεμία με πυκνότητα $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{x>0}$ ($\lambda > 0$ δεδομένο), οι οποίες συμβαίνουν με βάση μια ομογενή διαδικασία Poisson με παράμετρο $m = 3$.

(α) Να δειχθεί ότι η X_1 έχει μέση τιμή $1/\lambda$ και ροπογεννήτρια

$$M(t) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\lambda - t} & \text{αν } t < \lambda, \\ \infty & \text{αν } t \ge \lambda. \end{cases}$$

(β) Να υπολογιστεί ο συντελεστής προσαρμογής για τη διαδικασία.

(γ) Ποια η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $L_1 := u - U(T') \mid \{T' < \infty\}$; Έχουμε συμβολίσει $T' := \inf\{t > 0 : U(t) < u\}$.

(δ) Έστω $T := \inf\{t > 0 : U(t) < 0\}$. Να υπολογιστεί η πιθανότητα $\mathbf{P}(T = T')$.

Δίνεται ότι $\Phi(1.65) = 0.95$, $\Phi(-1.65) = 0.05$.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες. **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**