**Εκφώνηση και Λύση της 1ης Άσκησης**

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός ανακοπής ζημίας ιδίας κράτησης *d*, δηλαδή ο $\pi_X(d) := E(X-d)_+$, εάν $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.

Υπόδειξη: Έστω $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$. Να βρεθεί πρώτα η $\pi_Z(d) := E(Z-d)_+$. Κατόπιν να εκφραστεί η $\pi_X(d)$ συναρτήσει της $\pi_Z(d')$, για κατάλληλο $d'$.

Απάντηση: $\pi_X(d) = \sigma\pi_Z(\frac{d-\mu}{\sigma}) = \sigma[\phi(\frac{d-\mu}{\sigma}) - (\frac{d-\mu}{\sigma})(1-\Phi(\frac{d-\mu}{\sigma}))]$

Λύση: Σύμφωνα με την υπόδειξη, ξεκινάμε τη λύση για την ειδική περίπτωση όπου *Z*~ $\mathrm{N}(0,1)$. Υπενθυμίζουμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας (σ.π.) μιας τυπικής κανονικής τυχαίας μεταβλητής (τ.μ.) $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ συμβολίζεται με $\phi(z)$, ενώ η αντίστοιχη συνάρτηση κατανομής (σ.κ.) συμβολίζεται με $\Phi(z)$. Επομένως,

$$\pi_Z(d) := E(Z-d)_+ = \int_{-\infty}^{+\infty}(z-d)\phi(z)dz = \int_d^{\infty}(z-d)\phi(z)dz \qquad (1)$$

Ας συμβολίσουμε με $I_1 := \int_d^{\infty} z\phi(z)dz$ και με $I_2 := \int_d^{\infty}\phi(z)dz$. Τότε, η σχέση (1) λέει ότι $\pi_Z(d) = I_1 - dI_2$. Αρκεί λοιπόν να υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα $I_1$ και $I_2$.

$I_1 := \int_d^{\infty} z\phi(z)dz = \int_d^{\infty} z\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$. Κάνοντας την αντικατάσταση $s := \dfrac{z^2}{2}$, υπολογίζουμε εύκολα το αόριστο ολοκλήρωμα $\int z e^{-\frac{z^2}{2}}dz = -e^{-\frac{z^2}{2}}$. Επομένως,

$$I_1 = \int_d^{\infty} z\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d^2}{2}} = \phi(d) \qquad (2)$$

Από την άλλη, είναι προφανές ότι

$$I_2 := \int_d^{\infty}\phi(z)dz = 1 - \Phi(d) \qquad (3)$$

Άρα, χρησιμοποιώντας τους τύπους (2) και (3) των ολοκληρωμάτων,

$$\pi_Z(d) = I_1 - dI_2 = \phi(d) - d(1-\Phi(d)) \qquad (4)$$

Ο τύπος (4) αποτελεί την απάντηση στην άσκηση, στην ειδική περίπτωση της τυπικής κανονικής τ.μ. Αλλά, αν γνωρίζουμε την απάντηση για την τυπική κανονική, εύκολα παίρνουμε την απάντηση για κάθε κανονική τ.μ. μέσω «κανονικοποίησης». Δηλαδή, αν

$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, θέτουμε $Z := \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ και είναι γνωστό από τις στοιχειώδεις πιθανότητες ότι τότε $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$. Η $X$ προφανώς γράφεται $X = \sigma Z + \mu$, και άρα

$$\pi_X(d) := E(X - d)_+ = E(\sigma Z + \mu - d)_+ = \sigma E(Z - \tfrac{d-\mu}{\sigma})_+ = \sigma \pi_Z(\tfrac{d-\mu}{\sigma}) \qquad (5)$$

Συνδυάζοντας τώρα τις (4) και (5) προκύπτει το ζητούμενο. □