Μεμειγμένες κατανομές 8.1

7.7, ~~7.8~~,

10.1, 10.3 Θ. Χρεοκοπίας

8.1

τ.μ. X με πυκνότητα $\frac{a}{x^{a+1}} 1_{x>1}$

$a \sim \exp(2)$

Συγκεκριμένα.

Μεικτή τ.μ. : $f_{\Theta}(\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$

$f_{X|\Theta}(x;\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$

Η f_{Θ} είναι η σ.π. ή η πυκνότητα μιας τ.μ. Θ

Η $f_{X|\Theta}(x;\theta)$ είναι $\forall \theta \in \mathbb{R}$ μια πυκνότητα ή μια σ.π.

Έχουμε λοιπόν δύο τ.μ. X, Θ και ξέρουμε ότι η $X \mid \Theta = \theta$ έχει σ.π. ή πυκνότητα $f_{X|\Theta}(x;\theta)$

<u>Παράδειγμα</u> πιο πάνω είχαμε την Θ να έχει πυκνότητα $f_{\Theta}(r) = 2e^{-2r} 1_{r>0}$ και $X \mid \Theta = \theta$ είχε πυκνότητα

$$f_{X|\Theta}(x;\theta) = \frac{\theta}{x^{\theta+1}} 1_{x>1}$$

<u>Δυο σενάρια</u>

1) Αν η f_{Θ} είναι συνάρτηση πιθανότητας και ~~κα~~ $f_{X|\Theta}(x;\theta)$ είναι πυκνότητα τότε η X έχει πυκνότητα την

$$f_X(x) = \sum_{\theta \in \mathbb{R}} f_{X|\Theta}(x;\theta) f_{\Theta}(\theta)$$

2) Αν η f_Θ είναι πυκνότητα και

οι $f_{X|\Theta}(x;\theta)$ συνεχ. ως θ.

με κοινό σύνολο A που είναι ανεξάρτητο του θ

($A=\{x: f_{X|\Theta}(x;\theta)>0\}$)

τότε η X είναι συνεχής τ.μ.

με σ.π.

$$f_X(x)=\int_{\mathbb{R}} f_{X|\Theta}(x;\theta)\, f_\Theta(\theta)\, d\theta \leftarrow$$

($\Theta \sim U(0,1)$ και
$(X|\Theta=\theta)\overset{d}{=}\theta$ σταθερή τ.μ.
τότε η $X \sim U(0,1)$)

Άσκηση 1 (Κουτσ. σελ 153)

X III / $X \sim$ Γεωμετρική(P)

με $P \sim U(0,1)$
ποια η σ.π. της X;

Λύση

$X \mid P=p \sim \text{Γεωμ.}(p)$ $\quad\Big|\quad P(Y=k)=p(1-p)^k, \quad k=0,1,2,\dots$

(εδώ $A=\mathbb{N}$)

$$\underbrace{\underbrace{A\ A\ \_\ \dots\ A}\ E}$$

Η X είναι διακριτή

με σ.π.

$$f_X(x)=P(X=x)=\int_0^1 P(X=x\mid P=p)\,f_P(p)\,dp$$

$$=\int_0^1 p(1-p)^x\cdot 1\,dp \overset{r=1-p}{=} \int_0^1 (1-r)\,r^x\,dr$$

$$=\int_0^1 r^x\,dr-\int_0^1 r^{x+1}\,dr=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$$

$$=\frac{1}{(x+1)(x+2)} \qquad x=0,1,2,\dots$$

$\left(f_X(x)=0 \text{ για } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}\right)$

i) $N \sim$ Γεωμ.(p) (τιμές στο $0,1,\ldots$)

$X \mid N=n \sim Bin(n,p)$ $\Leftarrow$

($X \sim Bin(N,p)$)

Εδώ $A = \{0,1,\ldots\}$

$q = 1-p$

Ροπογ. της N

$$E(e^{tN}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} p (1-p)^k =$$

$$= p \frac{1}{1-e^t(1-p)} = \frac{p}{1-qe^t}$$

$$E(e^{tX}) = E(\underbrace{E(e^{tX} \mid N)}_{\varphi(N)})$$

$$\varphi(n) = E(e^{tX} \mid N=n) = \sum_{k=0}^{n} e^{tk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (pe^t+q)^n$$

$$E(e^{tX}) = E((pe^t+q)^N)$$

$$= E(e^{N\log(\ )}) = \frac{p}{1-q(pe^t+q)}$$

$$= \frac{p}{1-q^2-qpe^t} = \frac{p/(1-q^2)}{1-\frac{qp}{p(1+q)}e^t}$$

$$\left(1-q^2 = (1-q)(1+q) = p(1+q)\right)$$

$$= \frac{\overset{=p'}{\frac{1}{1+q}}}{1-\underbrace{\frac{q}{1+q}}_{q'}e^t} \qquad \frac{p}{1-qe^t}$$

Άρα $X \sim$ Γεωμ.$\left(\frac{1}{1+q}\right)$

$$S_N = X_1 + \qquad + X_N$$

$$N, \qquad S_N \mid N=n = S_n$$

§ 7.7 Αναδρομή Panjer

$S_k = X_1 + \quad + X_k$. έστω X_i διακριτές με τιμές στο $\mathbb{N}$

το f της S_N

$$f_{S_N}(x) = P(S_N = x) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N=k)\, P(S_k = x)$$

$$P(S_k = x) = \sum_{j=0}^{\infty} P(S_k = x,\ X_1 = j)$$

$$= \sum_{j=0}^{x} P(X_2 + \quad + X_k = x-j,\ X_1 = j)$$

$$= \sum_{j=0}^{x} P(S_{k-1} = x-j)\, \underline{P(X_1 = j)}$$

$$a_{k,x} = P(S_k = x)$$

$$a_{k-1,0} \quad a_{k-1,1} \quad , \quad a_{k-1,x}$$

Θα βρούμε αναδρομική αναδρομή για την σ.π. της $S = S_N$ σε ειδική περίπτωση.

Υποθέτουμε ότι

1) οι X_i, $i \geq 1$ είναι ανεξάρτητες ισόνομες με τιμές στο $\mathbb{N}$. Με συνάρτηση π.θ. $p(k) = P(X_1 = k)$, $k \in \mathbb{N}$

2) Η N έχει συνάρτηση πιθανότητας

$$q_n = P(N = n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

που ικανοποιεί τη σχέση

$$\circledast \quad q_n = \left(a + \frac{b}{n}\right) q_{n-1} \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

για κάποιες σταθερές $a, b \in \mathbb{R}$

τότε η $S = S_N$ έχει συνάρτηση πιθανότητας f που ικανοποιεί την αναδρομή

$$f(0) = \begin{cases} P(N=0) & \text{αν } p(0) = 0 \\ M_N(\log p(0)) & \text{αν } p(0) > 0 \end{cases}$$

$$f(k) = \frac{1}{1 - a\,p(0)} \sum_{j=0}^{k} \left(a + \frac{b j}{k}\right) p(j) f(k-j)$$

Απόδ.: Βιβλίο Kaas, Goovaerts, , , σελ 50

1. μη: που ικανοποιούν την (*)

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} = a + \frac{b}{n}$$

i) Poisson (λ)

έχει $\quad q_n = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} = \frac{\lambda^n (n-1)!}{\lambda^{n-1} n!} = \frac{\lambda}{n}$$

$$a = 0, \quad b = \lambda$$

ii) Διωνυμική (N, p)

$$q_n = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}$$

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} = \frac{\frac{\cancel{N!}}{n!\,(N-n)!}}{\frac{\cancel{N!}}{(n-1)!\,(N-n+1)!}} \; \frac{p^n (1-p)^{N-n}}{p^{n-1} (1-p)^{N-n+1}}$$

$$= \frac{N-n+1}{n} \, \frac{p}{1-p} = \left(\frac{N+1}{n} - 1\right) \frac{p}{q}$$

$$= -\frac{p}{q} + \frac{(N+1)p/q}{n}$$

$$a = -\frac{p}{q}, \quad b = (N+1)p/q$$

Άσκηση (βλ. τη, Huas. . .)

Αν η N ικανοποιεί την ⊛ τότε

$$EN = \frac{a+b}{1-a}$$

λύση

$$q_n = \left(a + \frac{b}{n}\right) q_{n-1}$$

$$EN = \sum_{n=0}^{\infty} n \underbrace{P(N=n)}_{q_n} = \sum_{n=1}^{\infty} P(N \geq n)$$

$$n q_n = a n q_{n-1} + b q_{n-1}$$
$$= a(n-1) q_{n-1} + a q_{n-1} + b q_{n-1}$$

$$= a(n-1)\, q_{n-1} + (a+b)\, q_{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, q_n = a \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)\, q_{n-1} + (a+b) \sum_{n=1}^{\infty} q_{n-1}$$

$$\overset{j=n-1}{=} a \sum_{j=0}^{\infty} j\, q_j + (a+b) \sum_{j=0}^{\infty} q_j$$

$$EX = a\, EX + (a+b)\cdot 1$$

$$(1-a)\, EX = a+b$$

$$EX = \frac{a+b}{1-a}$$

Παράδειγμα: Έστω ότι $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$ και η X_i έχει σ.π.

$$f(x) = p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x = 2 \\ \frac{1}{4} & x = 1, 3 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$S = X_1 + \quad + X_N$

Ποια η σ.π. της S;

Λύση

Η σ.π. f της S είναι ως εξής

$$f(0) = P(N=0) = e^{-4}$$

Έχουμε $\alpha = 0$, $\beta = \lambda = 4$

$$f(k) = \frac{1}{1 - \cancel{0 \cdot p(0)}} \sum_{j=1}^{k} \left(0 + \frac{\beta j}{k}\right) p(j)\, f(k-j)$$

$$= \frac{\beta}{k} \sum_{j=1}^{k} j\, p(j)\, f(k-j)$$

$$f(1) = \frac{4}{1}\, 1 \cdot \overset{1/4}{p(1)}\, f(0) = f(0) = e^{-4}$$

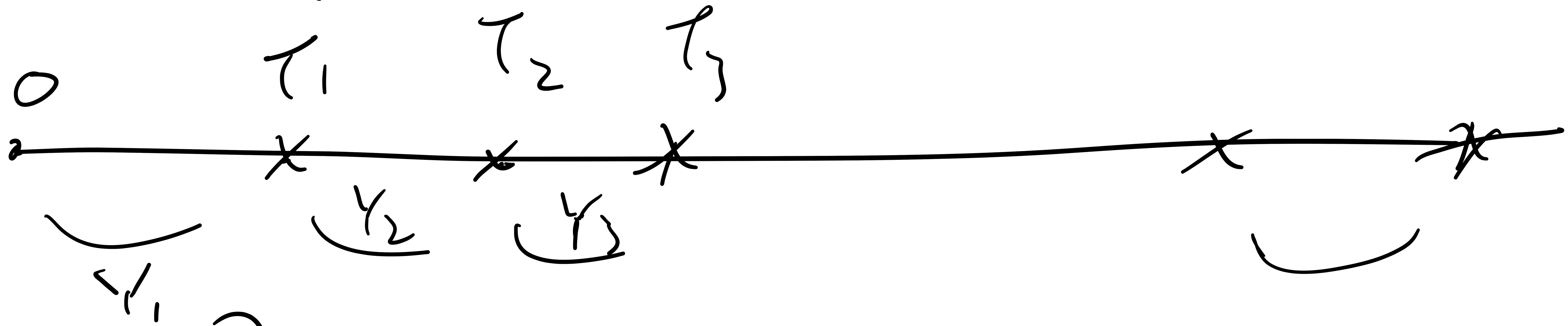
$$f(2) = \frac{4}{2} \left\{ 1\, p(1)\, f(1) + 2\, p(2)\, f(0) \right\}$$

$$= 2 \left\{ \frac{1}{4} e^{-4} + 2 \cdot \frac{1}{2} e^{-4} \right\}$$

$$= \frac{5}{2} e^{-4}$$

Θεωρία Χρεοκοπίας (Κεφ. 10)

Η διαδικασία Poisson



Έστω $\lambda > 0$.

$(Y_i)_{i \geq 1}$ τ.μ. ανεξάρτητες, ισόνομες με

$Y_1 \sim exp(\lambda)$

Θέτουμε $\quad T_n = Y_1 + \dots + Y_n \quad \forall n \geq 1$

οι χρόνοι των καταστροφικών γεγονότων.

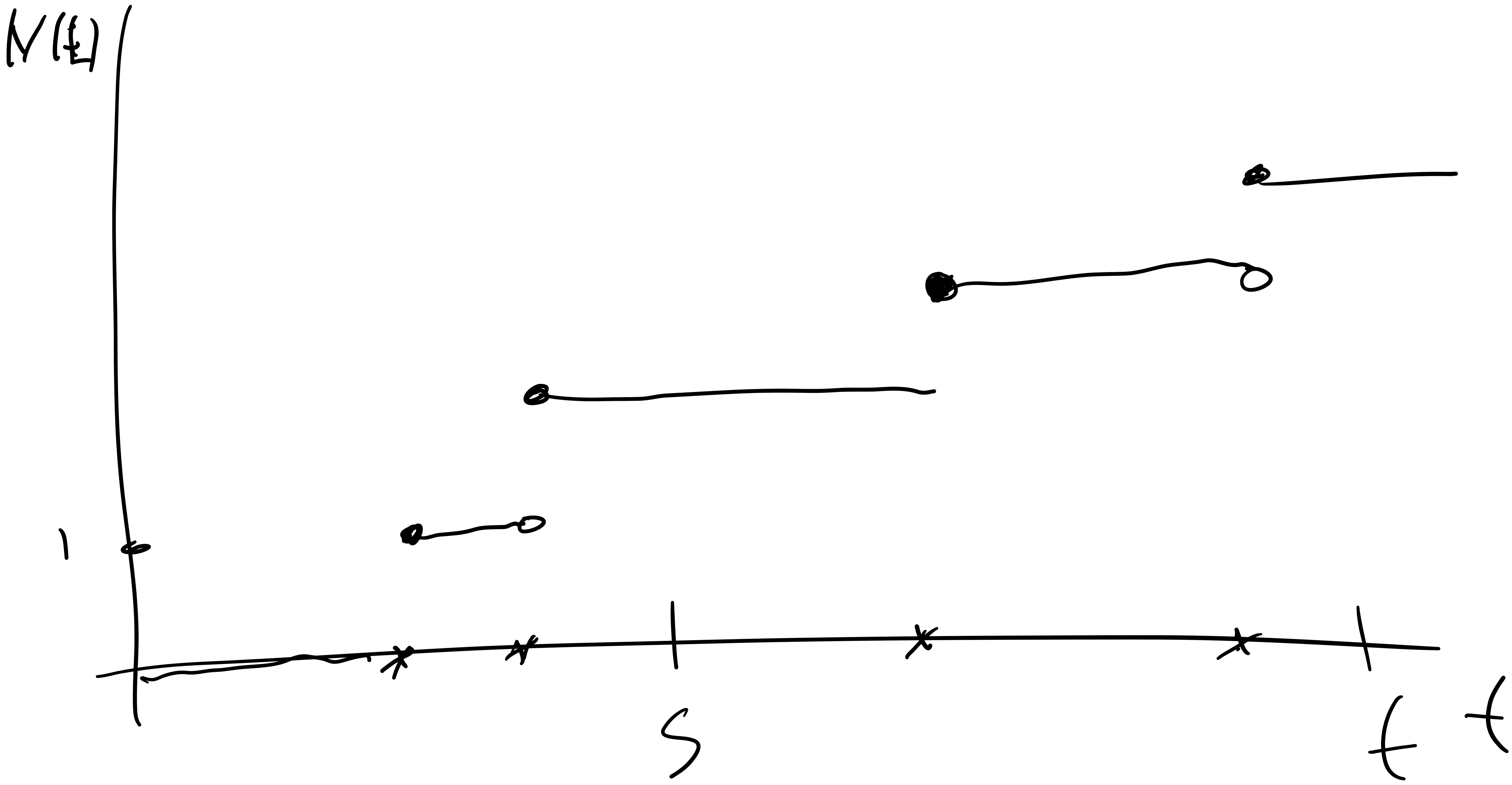
και $\forall t \geq 0$

$$N(t) := \#\{i \geq 1 : T_i \leq t\}$$

$= \#$ γεγονότων στο $[0,t]$ $\leftarrow$ είναι τ.μ.

Η $(N(t))_{t \geq 0}$ λέγεται διαδικασία Poisson

με παράμετρο λ.



$\forall\ 0 \le s < t$

$$N(t) - N(s) \sim \text{Poisson}(\lambda(t-s))$$

$\shortparallel$

$\#$ γγ. στο $(s,t]$

Ειδικά: $E(\#$ γεγονότων στο $(s,t]) = \lambda(t-s)$

$[s,t]$

Μοντέλο:

Ασφαλιστής έχει αρχικό κεφάλαιο u π.χ.

- Στο $[0,t]$ εισπράττει ασφάλιστρα

$P(t) = c \cdot t$ c το σταθερά.

- $X_1, X_2,$ τα ύψη των ζημιών με σειρά·

παραμετροποίησης. X_i ανεξάρτητες ισόνομες με τιμές στο $[0,\infty)$ και $P(X_1>0)>0$.

- $N(t) = \#$ ζημιών στο $[0,t]$.
  και ισχύει $EN(t) = \mu t$ για κάποιο $\mu>0$. π.χ. η N μπορεί να είναι ανέλιξη Poisson με παράμετρο μ.
  $N(t)$ ανεξάρτητη από τις $(X_i)_{i\geq 1}$.

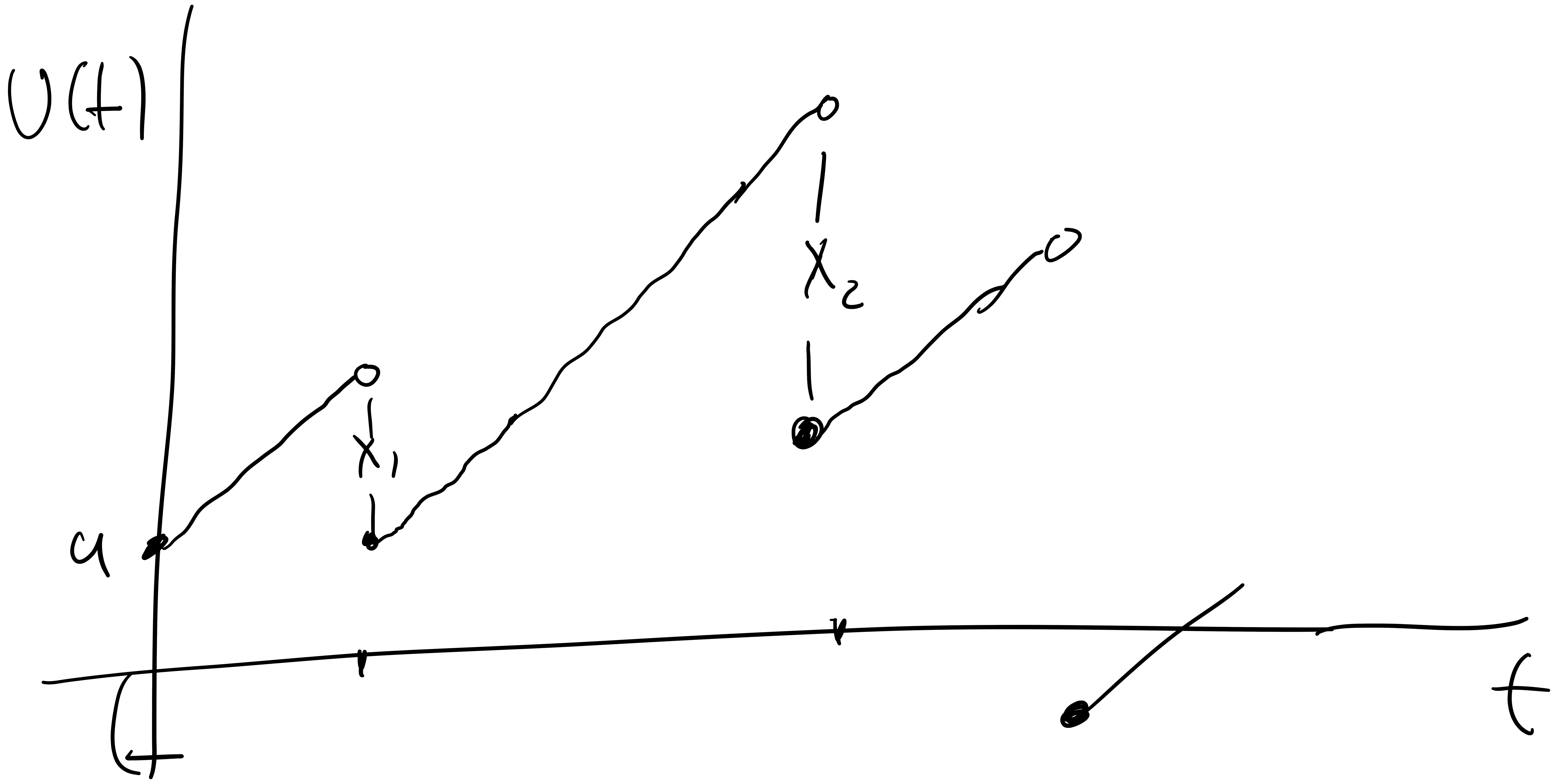
Τότε το σύνολο των αποζημιώσεων στο $[0,t]$ είναι $S(t) = X_1 + \quad + X_{N(t)}$

Η περιουσία του ασφαλιστή τον χρόνο t είναι

$$U(t) = u + P(t) - S(t)$$
$$= u + ct - S(t)$$

Η διαδικασία πλεονάσματος)

Γραφική παράσταση της U.



Χρεοκοπία έχουμε αν $U(t)<0$ για κάποιο t.

πιθ. Χρεοκοπίας $= P(\exists\, t>0 : U(t)<0)$

$$U(t) = u + ct - S(t)$$

$$E(S(t)) = E(S_{N(t)}) = E(X_1 + \dots + X_{N(t)})$$

$$= \underbrace{EX_1}_{p_1} \cdot EN(t) = p_1 t m$$

$$\left(p_r = E(X_1^r) \right)$$

Άρα $EU(t) = u + ct - p_1 t\mu$

$$= u + t\underbrace{(c - p_1\mu)}_{\text{πρέπει } \geq 0}$$

Επιλέγουμε το c να είναι της μορφής

$$c = p_1\mu + \theta \cdot p_1\mu = (1+\theta)\,p_1\mu$$

θ: περιθώριο ασφάλισης.

$$U(t) = u + (1+\theta)\,p_1\mu t - S(t)$$

<u>Ο συντελεστής προσαρμογής</u>

Έστω $X = X_1$. Υποθ. ότι η ροπογεννήτρια $M_X(r)$ είναι $<\infty$ για κάποιο $r>0$.

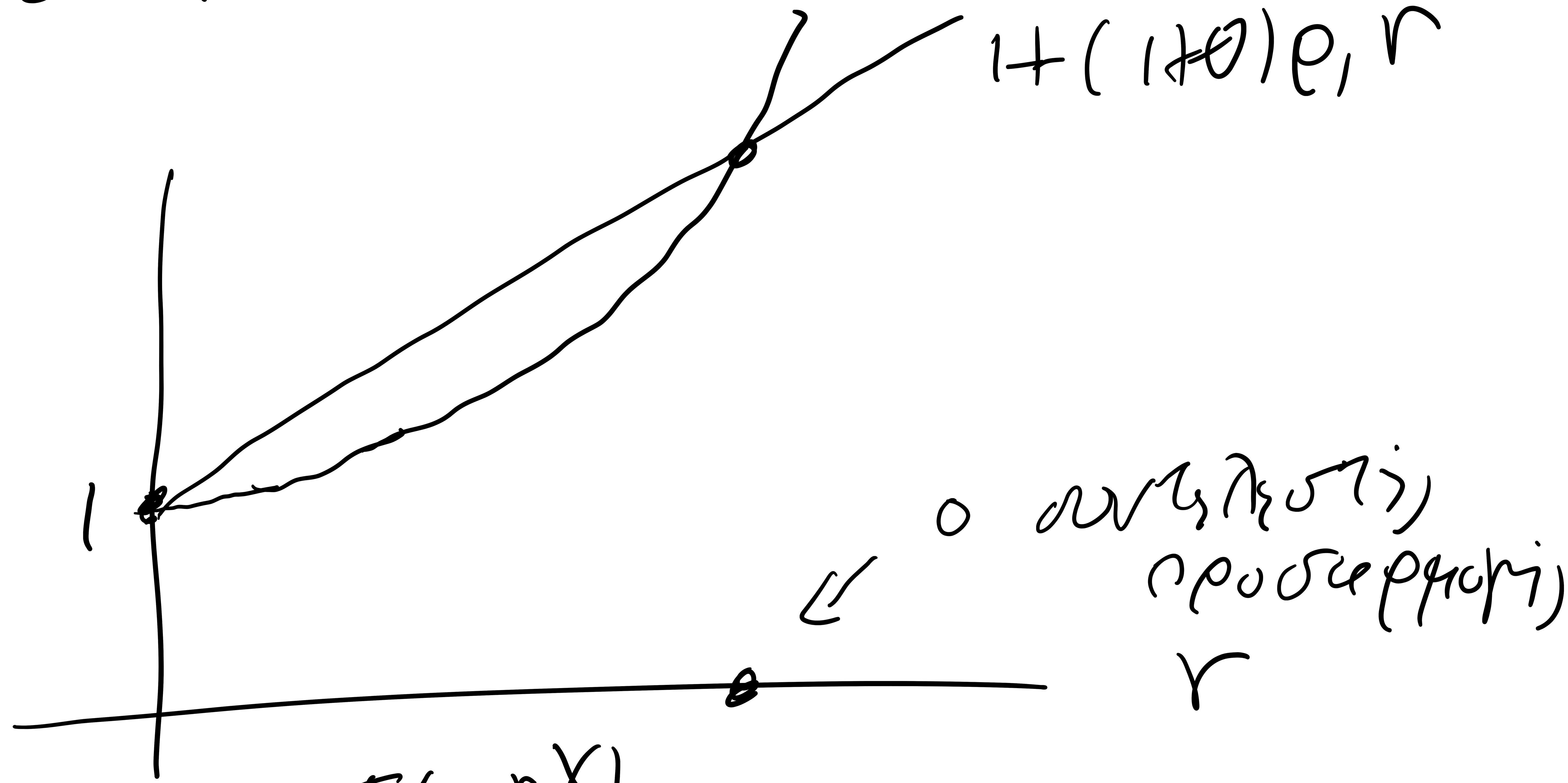
Συντελεστή προσαρμογής για την U λέμε τη μοναδική θετική λύση (τιμή του r) της)

$$1+(1+\theta)\rho_1 r = M_X(r) \quad (*)$$

Σχόλια:

1) το $r=0$ λύση της $(*)$

2)



Η $g(r)=M_X(r) = E(e^{rX})$ έχει $g(0)=1$

$$g'(r)=E(Xe^{rX}) \Rightarrow g'(0)=E(X)=\rho_1$$

3) το μ δεν εμφανίζεται στην $(*)$.

<u>Παράδειγμα</u> Έστω ότι $X_1 \sim exp(\theta)$

θ το δεδομένο. Ποιος είναι ο συντ. προσαρμογής;

Λύση

$$M_{X_1}(r) = E(e^{rX_1}) = \int_0^{+\infty} e^{rt}\,\beta e^{-\beta t}\,dt$$

$$= \beta \int_0^{\infty} e^{-(\beta-r)t}\,dt = \begin{cases} \dfrac{\beta}{\beta-r} & \text{για } r<\beta \\ \infty & \text{για } r\geq\beta \end{cases}$$

$$p_1 = EX_1 = \frac{1}{\beta}$$

Η (*) γίνεται

$$1+(1+\theta)\frac{1}{\beta}r = \frac{\beta}{\beta-r}$$

$r>0$

$$\Rightarrow (1+\theta)\frac{r}{\beta} = \frac{r}{\beta-r} \iff$$

$$\frac{1+\theta}{\beta} = \frac{1}{\beta-r} \iff \beta-r = \frac{\beta}{1+\theta}$$

$$r = \beta\left(1-\frac{1}{1+\theta}\right) = \beta\,\frac{\theta}{1+\theta} \quad (<\beta)$$

Θέτουμε

$$T := \inf\{t \geq 0 : U(t) < 0\}$$

(η στιγμή χρεοκοπίας)

$$\psi(u) = P(T < \infty \mid U(0) = u)$$

Το βασικό Θεώρημα

Αν R ο συντελεστής προσαρμογής, τότε

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E(e^{-RU(T)} \mid T < \infty)}$$

Παρατηρήσεις

i) $U(T) < 0 \Rightarrow e^{-RU(T)} > 1$

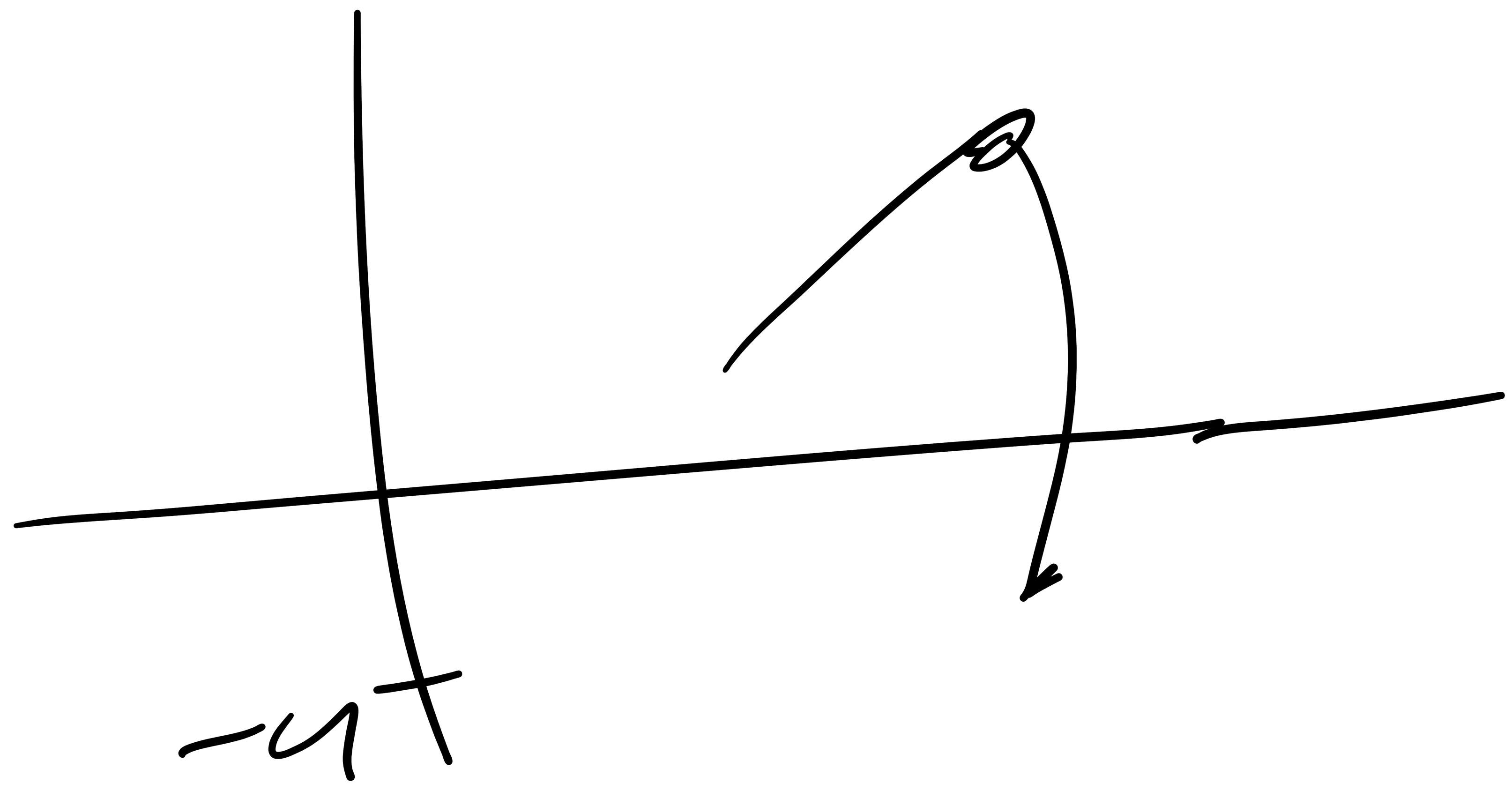
$\Rightarrow \psi(u) < e^{-Ru}$

ii) Και κάτω φράγμα αν οι X_i φραγμένες.

Δηλ. αν οι X_i παίρνουν τιμές στο $[0,a]$

Τότε $U(T) > -a$

$$U(t) = u + ct - (X_1 + \dots + X_{N(t)})$$



Άρα $-RU(T) < aR$

$$E[e^{-RU(T)} \mid T < \infty] < e^{aR}$$

$$\psi(u) > \frac{e^{-Ru}}{e^{aR}} = e^{-aR} \cdot e^{-Ru}$$

$$e^{-aR} < \frac{\psi(u)}{e^{-Ru}} < 1$$

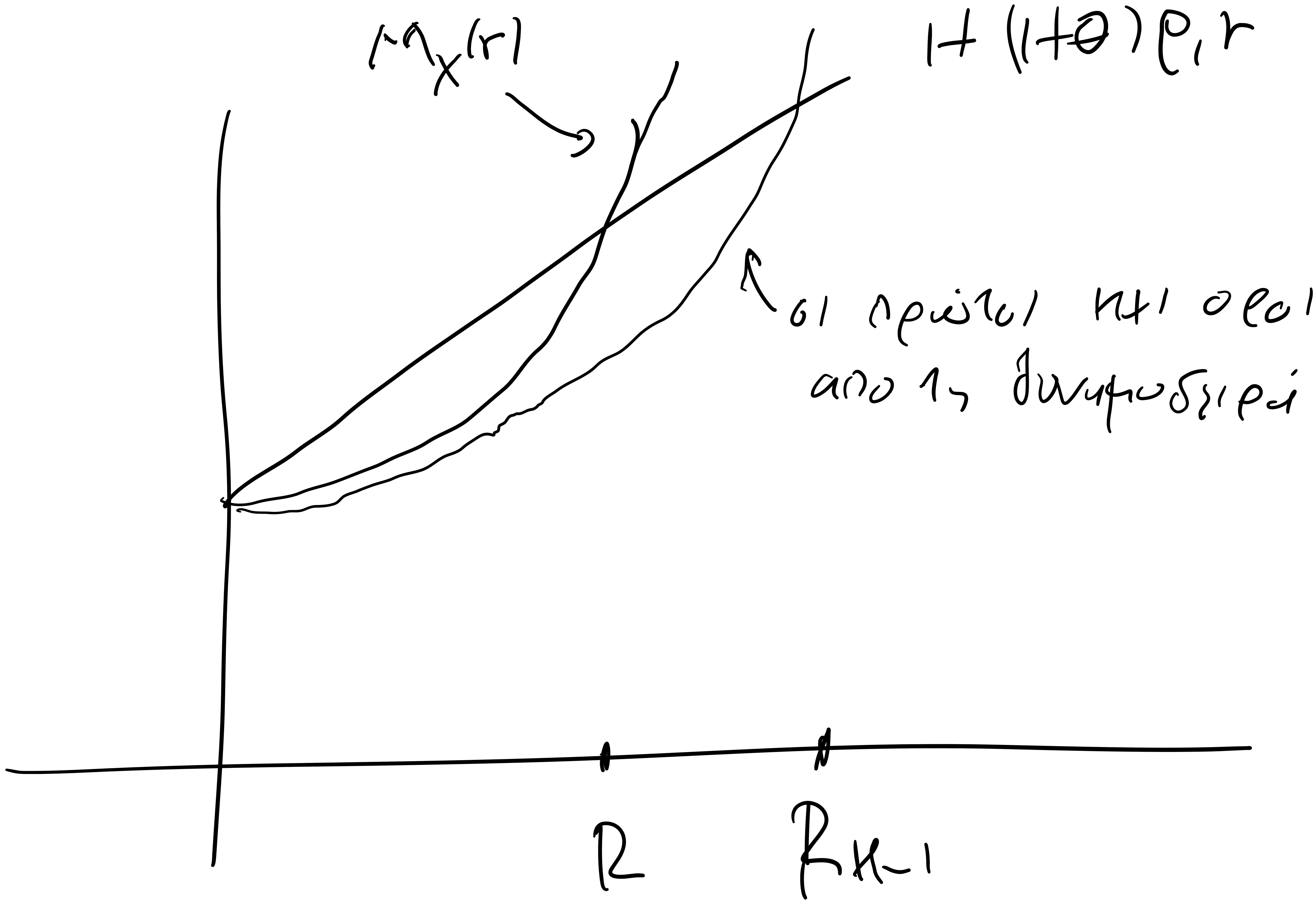
Προσέγγιση του R

Η $(*)$ είναι $1 + (1+\theta) p_1 r = M_X(r)$

$$M_X(r) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \frac{E(X^k)}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \frac{r^k}{k!}$$

Κρατάμε τους πρώτους κ+1 όρους από τη δυναμοσειρά της $M_X(r)$ και λύνουμε τη (*). Βρίσκουμε λύση που την ονομάζουμε R_{k-1}.

Ισχύει $R_{k-1} > R$



Για $k=2$ έχουμε την

$$1+(1+\theta)p_1 r = \underline{1+p_1 r} + p_2 \frac{r^2}{2}$$

$$\underline{1+p_1 r} + \theta p_1 r =$$

$$\theta \rho_1 r = \rho_2 \frac{r^2}{2} \qquad \overset{r>0}{\Longrightarrow}$$

$$r = \frac{2\theta\rho_1}{\rho_2}$$

$$\Rightarrow R_1 = \frac{2\theta\rho_1}{\rho_2}$$