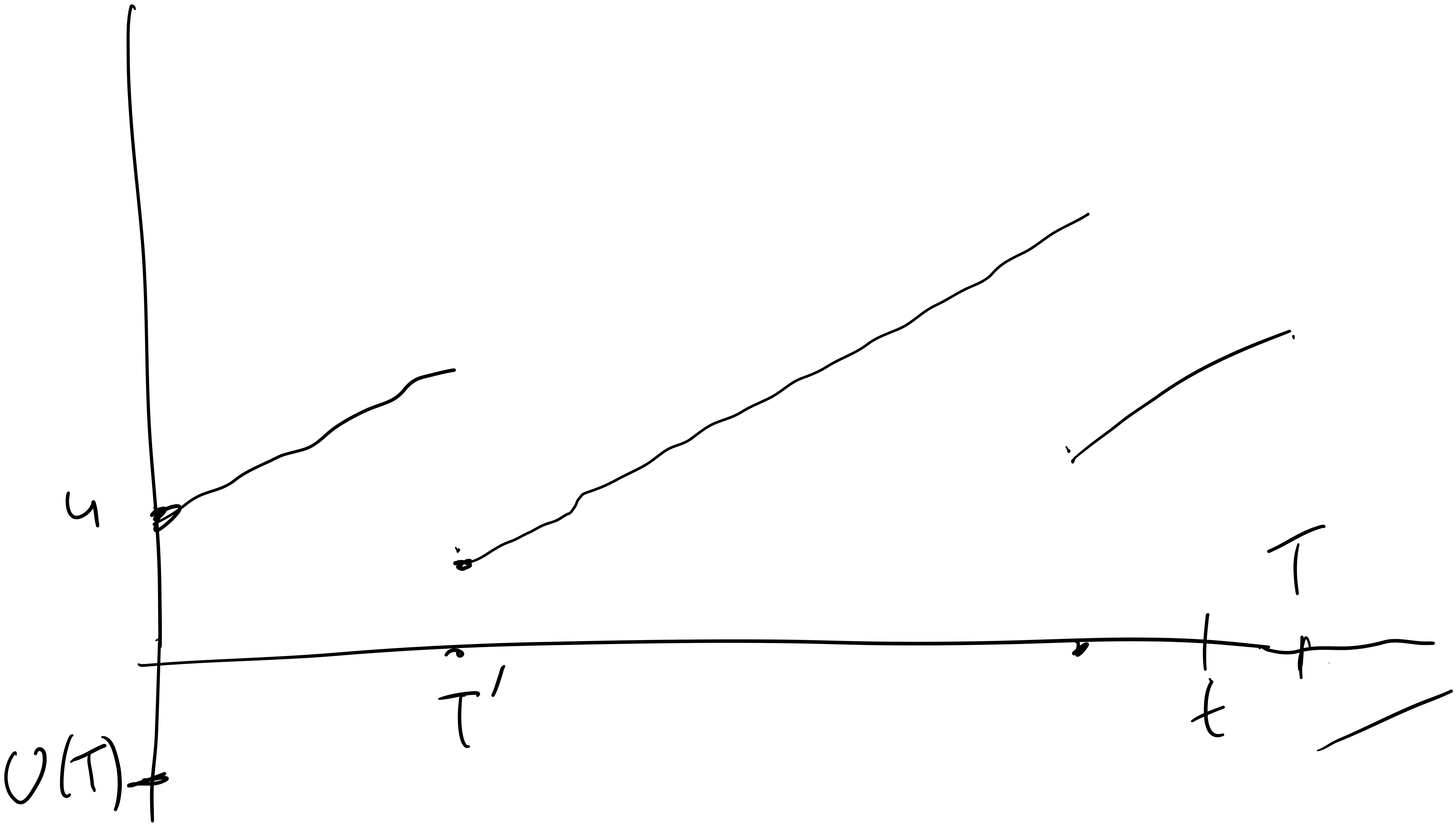
Σήμερα: §11.5 Μ. Κουτσόπουλος



$$U(t) = u + ct - S(t)$$

$$S(t) = X_1 + \quad + X_{N(t)}$$

$N(t) = \#$ ζημιών στο διάστημα $[0,t]$.

$$EN(t) = \lambda t$$

$E(e^{rX_1}) < \infty$ για κάποιο $r > 0$

$c = (1+\theta)\lambda p_1$, $p_k = E(X_1^k)$

$k = 1, 2, \ldots$

Συντελεστής προσαρμογής

$$1+(1+\theta)p_1 r = M_X(r)$$

$(X = X_1)$

R: η μοναδική θετική λύση

$$T = \inf\{t>0: U(t)<0\}$$

$$\psi(u) = P(T<\infty \mid U(0)=u)$$

$$\psi(u) = \frac{1}{E(e^{-RU(T)} \mid T<\infty)} e^{-Ru}$$

ειδική περίπτωση: Αν $X_i \sim exp(\beta)$

Τότε $R = \dfrac{\beta\theta}{1+\theta}$

Τότε $-U(T) \mid T<\infty \sim exp(\beta)$

Άρα ο παρονομαστής είναι

$$\int_0^\infty e^{Ry} \beta e^{-\beta y} dy = \beta \int_0^\infty e^{-(\beta-R)y} dy$$

$$= \frac{\beta}{\beta - R} = \frac{1}{1 - \frac{\theta}{1+\theta}} = 1+\theta$$

Άρα $\psi(u) = \frac{1}{1+\theta} e^{-Ru}$, $u > 0$

R_k $\qquad R < R_n$

$$\psi(u) < e^{-Ru}$$

$$e^{-R_n u} < e^{-Ru} < e^{-R_n u} < \frac{1}{1+\omega}$$

Πίσω πάλι από το αρχικό κεφάλαιο ($\S 11.5$)

Έστω $T' = \inf\{t > 0 : U(t) < u\}$

Συμβολισμός: Θέτουμε
$$P(z) = P(X \le z) \quad \forall z \in \mathbb{R}$$
$$= F_X(z)$$

$n=2$

Θεώρημα Έστω ότι η $N(t)$ είναι ανέλιξη Poisson με παράμετρο $\lambda>0$. Τότε $\forall\, x>0$ ισχύει

$$P(u-U(T')\geq x,\ T'<\infty) = \frac{1}{(1+\theta)p_1}\int_x^{\infty}(1-P(t))\,dt \qquad (1)$$

Παραγ. ως προς x και έχουμε

$$P(u-U(T')\in(x,x+dx),\ T'<\infty) = \frac{1}{(1+\theta)p_1}(1-P(x))\,dx \qquad (2)$$

Συνέχεια) i) Για $x=0$, η ① δίνει

$$P(T'<\infty) = \frac{1}{(1+\theta)}\frac{1}{\rho_1}\underbrace{\int_0^{\infty}(1-P(t))\,dt}_{= EX_1}$$

$$= \frac{1}{1+\theta}$$

ii) Από την ② έχουμε

$$P(u-U(T')\in(x,x+dx)\mid T'<\infty)$$

$$= \frac{P(\quad, T'<\infty)}{P(T'<\infty)} = \frac{\frac{1}{1+\theta}\frac{1}{\rho_1}(1-P(x))\,dx}{\frac{1}{1+\theta}}$$

$$= \frac{1}{\rho_1}(1-P(x))\,dx$$

Άρα η τ.μ. $L_1 = u-U(T')\mid T'<\infty$

έχει συνάρτηση $f_{L_1}(x) = \frac{1}{\rho_1}(1-P(x))\,1_{x>0}$ ③

Άσκηση $(N(t))_{t\geq 0}$ ανελ. Poisson με παράμετρο $\lambda > 0$.

α) Αν $P(X_1 = 1) = 1$ τότε $L_1 \sim U(0,1)$

β) Αν $X_1 \sim U(0,1)$ τότε

$$f_{L_1}(x) = 2(1-x)\,1_{x\in(0,1)}$$

Λύση

α) $$P(x) = P(X_1 \leq x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$$

$\mu_1 = EX_1 = 1$

Άρα $$f_{L_1}(x) = \frac{1}{1} \cdot \begin{cases} (1-0) & 0 \leq x < 1 \\ (1-1) & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{αν } x \in [0,1) \\ 0 & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow L_1 \sim U(0,1)$

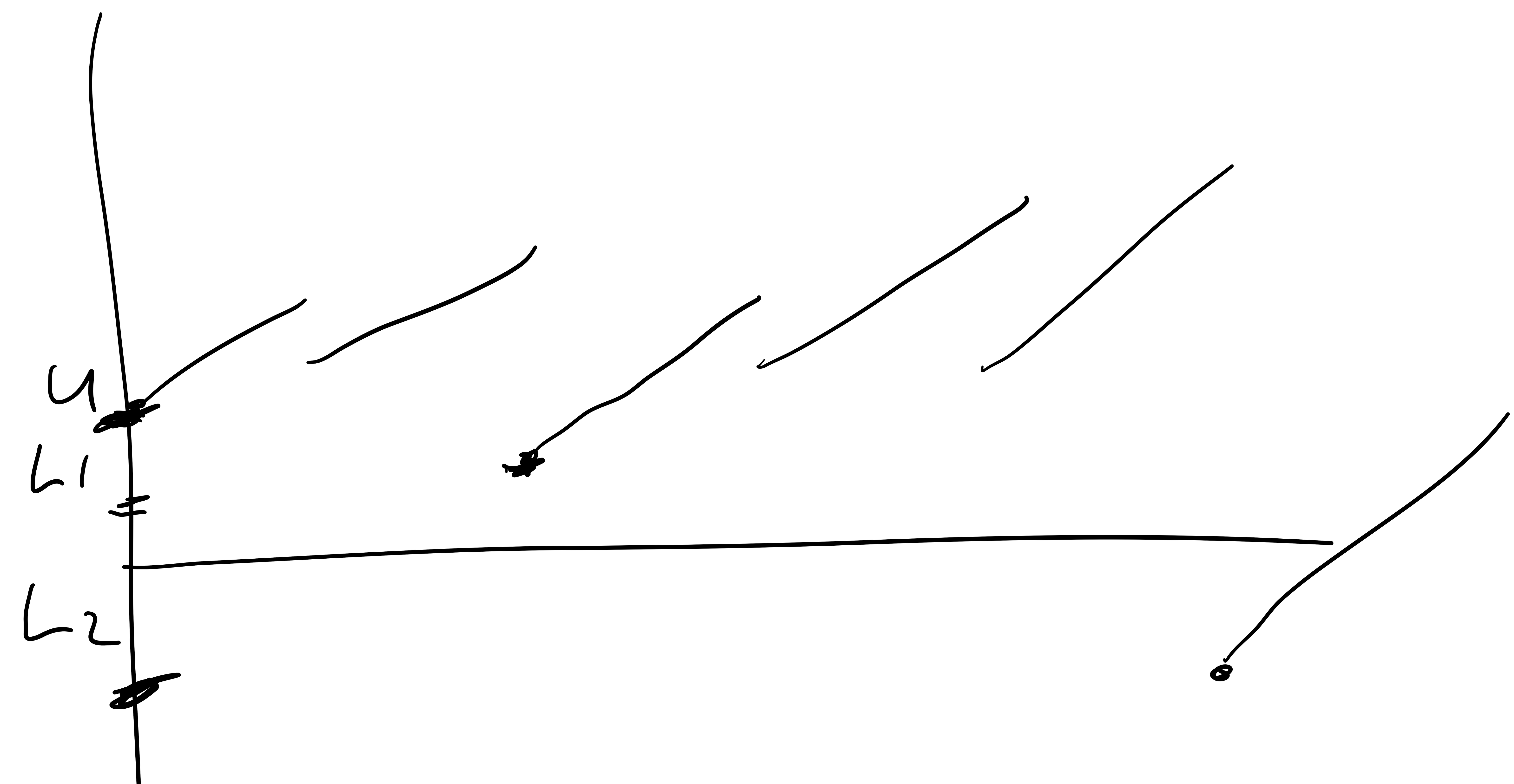
θ) $P(x) = P(X_1 \le x) = \begin{cases} x & \text{αν } x \le 1 \\ 1 & \text{αν } x > 1 \end{cases}$

$\rho_1 = EX_1 = \frac{1}{2}$

Άρα $f_{L_1}(x) = \frac{1}{\rho_1}(1 - P(x))\, 1_{x \ge 0} =$

$= 2(1-x)\, 1_{0 \le x \le 1}$

Το συνολικό άθροισμα πληρωμών κάτω από το αρχικό κεφάλαιο.



πιθανότητα να μην πέσουμε ποτέ κάτω από το αρχικό κεφάλαιο $= P(T' = \infty) = \frac{\theta}{1+\theta}$

Το πλήθος των φορών M που έχουμε πτώση κάτω από το "αρχικό κεφάλαιο" είναι γεωμετρική τ.μ. με τιμές στο $\{0, 1, 2, \quad \}$ και παράμετρο

$$p = \frac{\theta}{1+\theta}$$

Η μέγιστη πτώση κάτω από το αρχικό κεφάλαιο u είναι

$$L = L_1 + L_2 + \quad + L_M$$

οι L_i έχουν συνάρτηση όπως στην (3) είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και με την M.

Η L είναι συμπαγής μετ.

$$\psi(u) = P(T < \infty \mid U(0) = u) = P(L > u)$$

$$= 1 - P(L \leq u)$$

Η ροπογεννήτρια της L κατά τα γνωστά είναι

$$M_L(t) = M_N(\log M_{L_1}(t))$$

η Γεωμετρική τ.μ.

Ροπογεννήτρια της L_1

$$M_{L_1}(t) = E(e^{tL_1}) = \int_0^\infty e^{ty} \frac{1}{p_1}(1-P(y))dy$$

$$= \frac{1}{p_1}\int_0^\infty \left(\frac{e^{ty}-1}{t}\right)' \underbrace{(1-P(y))}_{P(X_1 \leq y)} dy$$

$$= \frac{1}{p_1 t}\underline{(e^{ty}-1)(1-P(y))}\Big|_0^\infty$$

$$- \frac{1}{t p_1}\int_0^\infty (e^{ty}-1)(-f_{X_1}(y))dy$$

$$\overset{*}{=} \frac{1}{t p_1}\int_0^\infty (e^{ty}-1) f_{X_1}(y) dy$$

$$= \frac{1}{t e_1} \left(M_{X_1}(t) - 1 \right)$$

Χρειαζόμαστε το ότι

$$\lim_{y \to \infty} e^{ty} P(X_1 > y) = 0$$

Για $t \leq 0$ είναι οκ.

Για $t > 0$

$$P(X_1 > y) = P(e^{tX_1} > e^{ty})$$

$$\leq e^{-ty} E\left(e^{tX_1} 1_{X_1 > y} \right)$$

$$\Rightarrow \underset{\to 0}{e^{ty} P(X_1 > y)} \leq \underbrace{E\left(e^{tX_1} 1_{X_1 > y} \right)}_{\to 0}$$

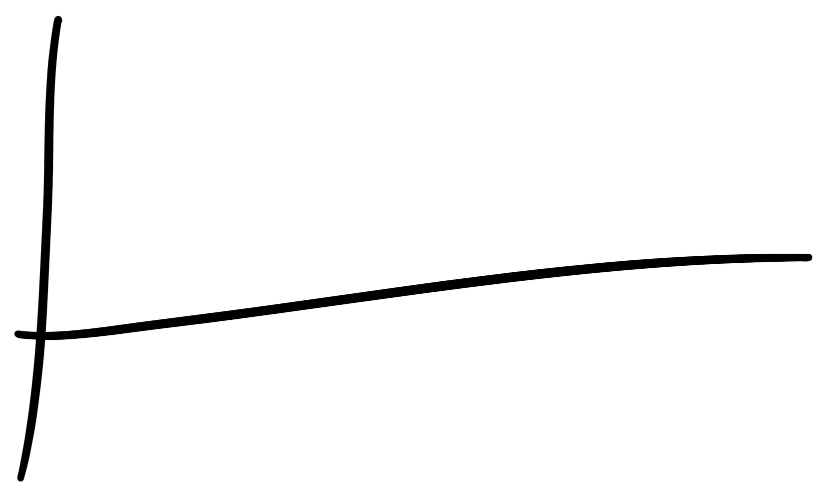
αφού $E(e^{tX_1}) < \infty$ για $y \to \infty$

<u>Παρατήρηση</u> Υποθέτοντας ότι $M_{X_1}(r) < \infty$

για κάποιο $r > 0$ έχουμε ότι

$$\psi(u) = \frac{1}{E[e^{-RU(T)} | T<\infty)} e^{-Ru} < e^{-Ru} < 1$$

Άρα για $u \geq 0$, $\psi(u) < 1$



Επίσης $\psi(0) < 1$ γιατί

$1 - \psi(0) = P($όχι χρεοκ. με $U(0)=0)$

$\geq P($κανένα κρούσμα στο διάστημα $[0,\varepsilon])$

$P($όχι χρεοκοπία με $U(0) = \varepsilon c) > 0$

Θέμα Ιουνίου 2020

4. [Βαθμοί 3] Θεωρούμε τη διαδικασία πλεονάσματος $(U(s))_{s\geq 0}$ με $U(0) = u \geq 0$, περιθώριο ασφάλειας $\theta = 1/3$, και ζημιές $\{X_i : i \geq 1\}$ ανεξάρτητες ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, καθεμία με πυκνότητα $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{x>0}$ ($\lambda > 0$ δεδομένο), οι οποίες συμβαίνουν με βάση μια ομογενή διαδικασία Poisson με παράμετρο $m = 3$.

(α) Να δειχθεί ότι η X_1 έχει μέση τιμή $1/\lambda$ και ροπογεννήτρια

$$M(t) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\lambda - t} & \text{αν } t < \lambda, \\ \infty & \text{αν } t \geq \lambda. \end{cases}$$

(β) Να υπολογιστεί ο συντελεστής προσαρμογής για τη διαδικασία.

(γ) Ποια η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $L_1 := u - U(T') \mid \{T' < \infty\}$; Έχουμε συμβολίσει $T' := \inf\{t > 0 : U(t) < u\}$.

(δ) Έστω $T := \inf\{t > 0 : U(t) < 0\}$. Να υπολογιστεί η πιθανότητα $\mathbf{P}(T = T')$.

(β) $R = \frac{\theta}{1+\theta}\lambda$ ¿

$r < \lambda$

$1 + (1+\theta)\frac{1}{\lambda} r = \frac{\lambda}{\lambda - r}$ ...

(γ) $f_{L_1}(x) = \frac{1}{\rho_1}(1 - P(x))\, 1_{x\geq 0}$

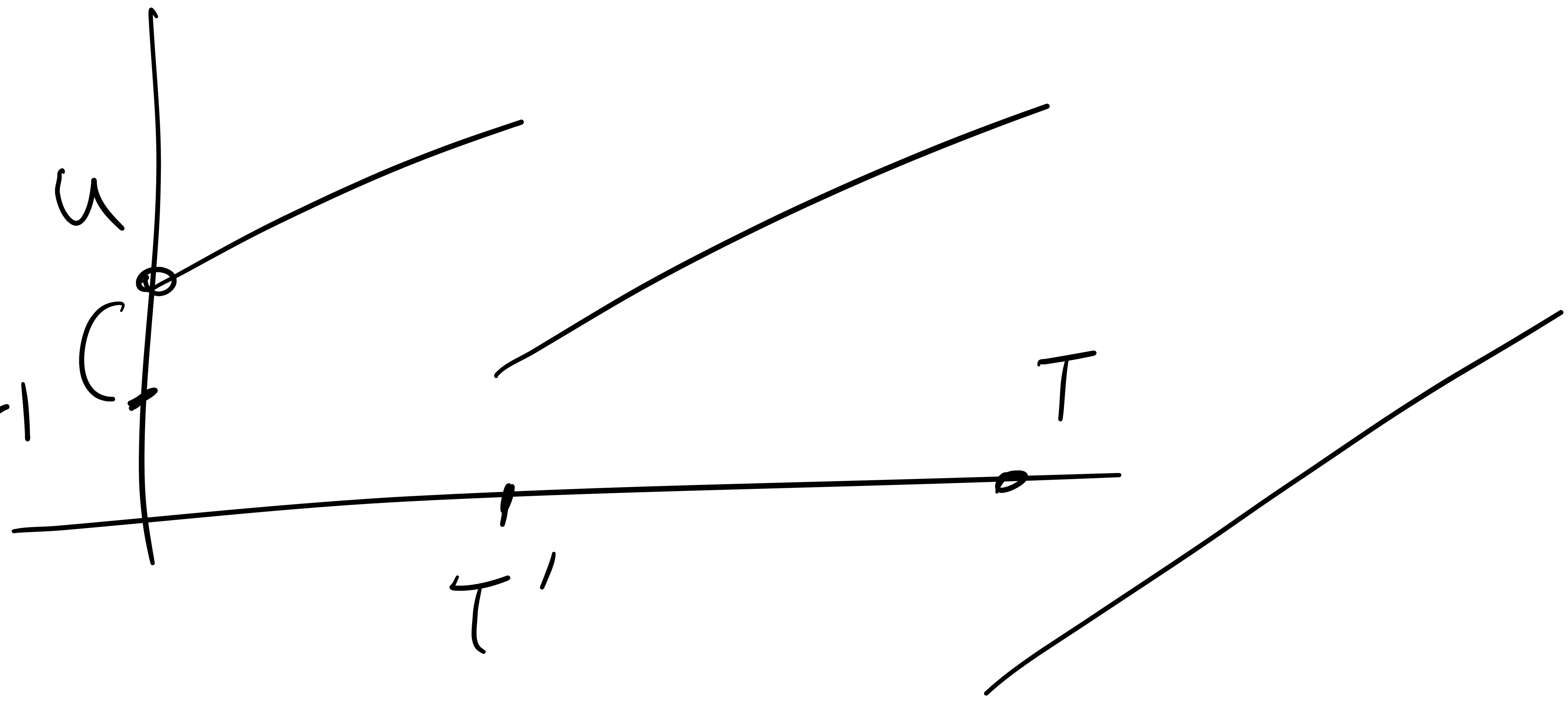
$\rho_1 = EX_1 = \frac{1}{\lambda}$

$P(x) = P(X \leq x) = (1 - e^{-\lambda x})\, 1_{x\geq 0}$

$f_{L_1}(x) = \lambda e^{-\lambda x}\, 1_{x\geq 0}$

Δηλ $L_1 \sim exp(\lambda)$

(δ)



$$P(T = T') = P(L_1 > u) = e^{-\lambda u}$$

12. Έστω σύνθετη *Poisson* με μέσο $\lambda = 5$ και κατανομή του ύψους των αποζημιώσεων ακολουθεί την εξής κατρανομή:

x	$f_x(x)$
5	0,6
k	0,4

και $\kappa > 5$. Το αναμενόμενο κόστος μίας *stoploss* ανταφαλιστικής σύμβασης με απαλλαγή ύψους 5 είναι 28,03.
Υπολογίστε το κ.

(A) 6
(B) 7
(Γ) 8
(Δ) 9
(E) 10

$S = X_1 + \quad + X_N \qquad N \sim Poisson(5)$

Δίνεται ότι

$$E((S-5)_+) = 28.03$$

x^+, x^-

$x = x^+ - x^-$

$|x| = x^+ + x^-$

$$E((S-5)_+) =$$

$$= E(S-5) + E((S-5)_-)$$

$$= EN \cdot EX_1 - 5 + E((S-5)_-)$$

$$= 5(0.6 \cdot 5 + 0.4 \cdot k) - 5$$

$$+ E((S-5)_-)$$

when $(-5)_- = 5$

$$E(\underbrace{(S-5)_-}_{S=5}) = P(S=0) \cdot 5 = e^{-5} \cdot 5$$

$$k = 8.99816$$

10. Οι αποζημιώσεις ακολουθούν την κατανομή:

$$F(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{100}\right)^2, & 0 \le x \le 100 \\ 1, & x > 100 \end{cases}$$

Μια ασφαλιστική εταιρεία αποζημιώνει το 80% του μέρουςτης αποζημίωσης που υπερβαίνει την απαλλαγή ύψους 20€, με μέγιστη πληρωμή το ποσό των 60€ ανά ζημιά. Να υπολογιστεί η μέση πληρωμή ανά πληρωμή $E(Y^P)$.

(Α) 37 (Β) 39 (Γ) 43 (Δ) 47 (Ε) 49

λύση

X έχει πυκνότητα

$$f(x) = F'(x) = \frac{2x}{10^4} 1_{0<x<100}$$

$$(0.8(X-20)_+) \wedge 60 = Y$$

$$E(Y) = \int_0^{100} [(0.8(x-20)_+) \wedge 60] f(x)\,dx$$

Για $x > 20$

$$0.8(x-20) = 60 \iff x = 95$$

$$\cancel{x} = \int_{20}^{100} \ldots\, dx = \int_{20}^{95} 0.8(x-20) f(x)\,dx$$

$$+ \int_{95}^{100} 60 f(x)\,dx = \ldots = 37.35$$

13. Δίνεται ο παρακάτω πίνακας:

$Αριθμόςζημιών$	$Πιθανότητα$	$Ύψοςζημιάς$	$Πιθανότητα$
0	1/3		
1	1/2	25 100	1/4 3/4
2	1/6	50 100	1/3 2/3

$\leftarrow X_1$

$\leftarrow Y_1 \stackrel{d}{=} Y_2$

Τα ύψη των ζημιών είναι ανεξάρτητα.

Ποιαείναι η διασπορά των συνολικών αποζημιώσεων $Var(S)$;

(A) 1.919 (B) 3.964 (Γ) 6.214 (Δ) 8.643 (Ε) 10.308

$$S = \begin{cases} X_1 & \text{αν } N=1 \\ Y_1+Y_2 & \text{αν } N=2 \\ 0 & \text{αν } N=0 \end{cases}$$

100M

$$Var(S) = E(Var(S|N)) + Var(E(S|N))$$
$$= E(v(N)) + Var(m(N))$$

$$v(n) = Var(S|N=n)$$
$$m(n) = E(S|N=n)$$

$$EX_1 = \frac{1}{4}25 + \frac{3}{4}100 = \frac{325}{4}$$

$$EX_1^2 = \frac{1}{4}625 + \frac{3}{4}\cdot 100^2 = 7656.25$$

$$Var(X_1) = 1054.69$$

Ομοίως $EY_1 = \frac{250}{3}$

$Var(Y_1) = \frac{8000}{9}$

$m(0) = 0$

$m(1) = EX_1$

$m(2) = 2EY_1$

Άρα $m(N) = \begin{cases} 0 & \text{με π.θ. } \frac{1}{3} \\ EX_1 & \text{'' } 1/2 \\ 2EY_1 & \text{'' } 1/6 \end{cases}$

$$Var(m(N)) = E(m(N)^2) - E(m(N))^2$$

$$= (EX_1)^2 \frac{1}{2} + 4(EY_1)^2 \cdot \frac{1}{6}$$

$$- \left(EX_1 \frac{1}{2} + 2EY_1 \frac{1}{6} \right)^2 = \ldots$$

$$v(n) = \begin{cases} 0 & \text{αν } n=0 \\ Var(X_1) & \text{αν } n=1 \\ 2Var(Y_1) & \text{αν } n=2 \end{cases}$$

$$u(X) = \begin{cases} 0 & \text{µı } 1, 6, \quad Y_3 \\ Var(X_1) < & \text{"} \quad Y_2 \\ 2\,Var(Y_1) & \text{"} \quad Y_6 \end{cases}$$

$\therefore$ $E[u(X)]$

Σχόλιο: $Var(S) = 3964$

Ερώτημα 1

α) Η κατανομή της τ.μ. Y ανήκει σε ένα υποσύνολο της εκθετική οικογένειας κατανομών και έχει την παρακάτω παραμετρική μορφή:

$C(y)$

$$f(y,\theta,\varphi) = exp\left[\frac{y\theta - b(\theta)}{\varphi} + c(y,\theta)\right]$$

με δεδομένες τις παραμέτρους θ και φ και τις συναρτήσεις bκαι c.

(i) Να δειχτεί ότι η ροπογεννήτρια της Yδίνεται από την:

$$M_Y(t) = exp\left[\frac{b(\theta + t\varphi) - b(\theta)}{\varphi}\right]$$

Σημείωση: η συνάρτηση $f(y,\theta + \varphi t,\varphi)$ είναι η πυκνότητα μιας άλλης τ.μ. από την ίδια οικογένεια κατανομών και έτσι $\int_{-\infty}^{\infty} f(y,\theta + \varphi t,\varphi)\, dy = 1$

(2 μονάδες)

(ii) Να δειχτεί ότι $E(Y) = b'(\theta)$και $Var(Y) = \varphi b''(\theta)$, χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα στο (i).

(3 μονάδες)

(iii)Επαληθεύστε το αποτέλεσμα στο (i)στην περίπτωση που η Y ακολουθεί κατανομή $Poisson$.

(2 μονάδες)

$$(i)\ M_Y(t) = E(e^{tY}) = \int_{\mathbb{R}} e^{ty}\, e^{\frac{y\theta - b(\theta)}{\varphi} + c(y)}\, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{y(\theta + t\varphi) - b(\theta + t\varphi)}{\varphi} + c(y)} \cdot e^{\frac{b(\theta + t\varphi) - b(\theta)}{\varphi}}\, dy$$

$$= e^{\frac{b(\theta+t\varphi)-b(\theta)}{\varphi}} \int_{\mathbb{R}} f(y,\theta+t\varphi,\varphi)\,dy$$

$$= e^{\frac{b(\theta+t\varphi)-b(\theta)}{\varphi}}$$

(ii) $M_Y(t) = E(e^{tY})$

$$M'_Y(t) = E(Y e^{tY})$$

$$M''_Y(t) = E(Y^2 e^{tY})$$

$t=0$ $\quad EY = M'_Y(0)$

$=1$ $\quad E(Y^2) = M''_Y(0)$

$$M'_Y(t) = M_Y(t)\, b'(\theta+t\varphi)$$

$$EY = M'_Y(0) = 1 \cdot b'(\theta) = b'(\theta)$$

$$M''_Y(t) = M'_Y(t)\, b'(\theta+t\varphi) + M_Y(t)\, b''(\theta+t\varphi)\,\varphi$$

$$M_Y''(0) = \underline{b'(\theta)^2} + b''(\theta)\varphi$$

Άρα $Var(Y) = M_Y''(0) - (EY)^2$

$$= \varphi\, b''(\theta)$$

(iii) Μια $Y \sim Poisson(\lambda)$ έχω

$$f(y) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^y}{y!} = e^{y\log\lambda - \lambda - \log y!}$$

$\varphi = 1$, $\theta = \log\lambda$, $c(y) = -\log y!$

$b(\theta) = \lambda = e^{\theta}$

$$f(y) = e^{y\theta - b(\theta) + c(y)}$$

$EY = b'(\theta) = e^{\theta} = \lambda$

$Var(Y) = \varphi\, b''(\theta) = 1 \cdot e^{\theta} = \lambda$