ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ - ΘΕΩΡΙΑ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Δημήτρης Χελιώτης

Μάιος 2020

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Οι σημειώσεις βασίζονται κυρίως στις αναφορές [5], [3]. Ευχαριστώ την κ. Χαρά Δημακοπούλου για τη δακτυλογράφηση του πρώτου προσχεδίου των σημειώσεων.

Δημήτρης Χελιώτης

Κεφάλαιο 1

Θεωρία ωφελιμότητας

1.1 Συναρτήσεις ωφελιμότητας

Έστω ότι ένα άτομο θέλει να ασφαλιστεί απέναντι σε μια οικονομική ζημιά, για παράδειγμα, ζημιά στο αυτοκίνητό του. Πόσο πρέπει να πληρώσει σε έναν ασφαλιστή ώστε να αναλάβει εκείνος το κόστος της ζημιάς αν γίνει; Αυτό το πρόβλημα θα μας απασχολήσει σε αυτό το κεφάλαιο και η βασική δυσκολία του είναι ότι το μέγεθος της ζημιάς είναι άγνωστο τη στιγμή της ασφάλισης.

Κίνδυνο θα λέμε κάθε τυχαία μεταβλητή X με τιμές στο $\mathbb{R}$.

Η X εκφράζει το μέγεθος απώλειας και η κατανομή της είναι γνωστή. Θετική τιμή για το X σημαίνει απώλεια, αρνητική τιμή σημαίνει κέρδος.

Ας δούμε ένα γνώριμο σενάριο, εκείνο στο οποίο (αντί για ζημιά) περιμένουμε να κερδίσουμε ένα αβέβαιο ποσό. Ένα καζίνο προσφέρει το εξής παιχνίδι. Ρίχνουμε ένα νόμισμα που φέρνει κεφαλή με πιθανότητα 0.4 (και γράμματα με πιθανότητα 0.6) και κερδίζουμε

$$X = \begin{cases} 0 & \text{αν έρθει Κ,} \\ 100 & \text{αν έρθει Γ.} \end{cases}$$

Πόσο πρέπει να πληρώσουμε για να παίξουμε μία φορά; Ένα σκεπτικό λέει ότι η σωστή τιμή του παιχνιδιού πρέπει να είναι

$$\mathbf{E}(X) = 0.4 \cdot 0 + 0.6 \cdot 100 = 60.$$

Στήριξη σε αυτό το σκεπτικό δίνει ο ισχυρός νόμος των μεγάλων αριθμών, ο οποίος λέει ότι αν παίξουμε άπειρες φορές το παιχνίδι θα έχουμε μέσο κέρδος 60. Με σύμβολα, αν S_n δηλώνει το κέρδος σε n παιχνίδια, τότε $\frac{S_n}{n} \approx 60$, δηλαδή $S_n \approx 60n$ για μεγάλα n.

- Αν πληρώσουμε 50 για να παίξουμε, το κέρδος μετά από n παιχνιδια θα είναι περίπου $60n - 50n = 10n$, που αυξάνει απεριόριστα καθώς αυξάνει το n.

- Αν πληρώσουμε 70 για να παίξουμε, το κέρδος μετά από n παιχνίδια θα είναι περίπου $60n - 70n = -10n$, που δίνει απεριόριστο χρέος καθώς αυξάνει το n.

Στο πρώτο σενάριο θα έχει ένσταση το καζίνο, στο δεύτερο εμείς. Το ίδιο επιχείρημα λειτουργεί σε κάθε τιμή διαφορετική από το 60. Καταλήγουμε έτσι στο συμπέρασμα ότι η σωστή τιμή για το παιχνίδι είναι η $\mathbf{E}(X)$. Ο νόμος των μεγάλων αριθμών δίνει το εμπειρικό νόημα της $\mathbf{E}(X)$.

Όμως υπάρχουν παιχνίδια που δεν μπορούν να παιχτούν άπειρες φορές. Εκεί ο νόμος των μεγάλων αριθμών δεν έχει εφαρμογή, και έτσι χρειαζόμαστε άλλη προσέγγιση για την εύρεση της τιμής του παιχνιδιού. Αυτή είναι η θεωρία ωφελιμότητας των John von Neumann και Oskar Morgenstern, η οποία διατυπώθηκε στο περίφημο Theory of Games and Economic Behavior το 1947. Πάλι η μέση τιμή έχει κεντρικό ρόλο αλλά όχι απαραίτητα η μέση τιμή της X. Διατυπώνουμε το βασικό αποτέλεσμα της θεωρίας πιο κάτω.

Έστω άτομο Α και έστω

$$\mathcal{P} = \text{το σύνολο των καταστάσεων στις οποίες μπορεί να εμπλακεί ο Α}$$

(π.χ αγορά μιας ασφάλειας, άνοιγμα επιχείρησης). Κάθε κατάσταση αντιπροσωπεύεται από μια τυχαία μεταβλητή η οποία εκφράζει αριθμητικά το κόστος της κατάστασης στο άτομο. Υποθέτουμε ότι στο $\mathcal{P}$ ορίζεται μία σχέση σύγκρισης $\succ$, όπου για $P, Q \in \mathcal{P}$:

- $P \succ Q$ σημαίνει ότι η P προτιμάται της Q από τον Α.
- $P \approx Q$ σημαίνει ότι ο Α είναι αδιάφορος μεταξύ P, Q.
- για $\lambda \in [0,1]$, η κατάσταση $\lambda P + (1-\lambda)Q$ ανήκει επίσης στο $\mathcal{P}$.

Το νόημα της κατάστασης $\lambda P + (1-\lambda)Q$ είναι το εξής: Θεωρούμε ένα νόμισμα που φέρνει Κ με πιθανότητα λ και Γ με πιθανότητα $1-\lambda$. Ρίχνουμε το νόμισμα, και αν έρθει Κ, ο Α εμπλέκεται στην κατάσταση P, ενώ αν έρθει Γ, ο Α εμπλέκεται στην κατάσταση Q.
Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης το σύμβολο $\succeq$. Η $P \succeq Q$ σημαίνει ότι $P \succ Q$ ή $P \approx Q$.
Υποθέτουμε ότι η $\succ$ έχει τις εξής ιδιότητες:

(i) Για κάθε $P, Q \in \mathcal{P}$ ισχύει ακριβώς ένα από τα εξής: $P \succ Q, Q \succ P, P \approx Q$. Ολική διάταξη

(ii) Αν $P \succ Q$ και $Q \succ R$, τότε $P \succ R$. Μεταβατικότητα

(iii) Αν $P \succ Q \succ R$, τότε υπάρχουν $\lambda, \mu \in (0,1)$ ώστε $\lambda P + (1-\lambda)R \succ Q \succ \mu P + (1-\mu)R$. Αρχιμήδεια ιδιότητα

(iv) Αν $P \succ Q$, τότε για κάθε $R \in \mathcal{P}$ και $\lambda \in (0,1)$ ισχύει ότι $\lambda P + (1-\lambda)R \succ \lambda Q + (1-\lambda)R$.

Το θεμελιώδες θεώρημα της θεωρίας ωφελιμότητας λέει ότι κάθε τέτοια σχέση κωδιποποιείται από μια συνάρτηση u.

Θεώρημα. Μία σχέση $\succ$ έχει τις ιδιότητες (i)-(iv) αν και μόνο αν υπάρχει $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε

$$P \succ Q \Longleftrightarrow \mathbf{E}[u(P)] > \mathbf{E}[u(Q)].$$

Κάθε άλλη συνάρτηση u^* που ικανοποιεί την παραπάνω σχέση γράφεται ως $u^*(x) = \alpha u(x) + \beta$ για κάποια $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$.

Η u λέγεται συνάρτηση ωφελιμότητας του ατόμου. Μια εύλογη ιδιότητα κάθε συνάρτησης ωφελιμότητας είναι το ότι είναι γνήσια αύξουσα συνάρτηση. Αυτό θα το υποθέτουμε στο εξής. Η ακριβής αριθμητική τιμή της u σε έναν αριθμό δεν έχει κάποια πρακτική σημασία (π.χ. κόστος ενός γεγονότος), ο μόνος της ρόλος είναι να χρησιμοποιείται για συγκρίσεις με άλλες καταστάσεις.

Άσκηση. Ένα άτομο έχει συνάρτηση ωφελιμότητας $u(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{αν } x \geq 0, \\ x & \text{αν } x < 0. \end{cases}$
Του δίνεται η ευκαιρία να επιλέξει μεταξύ δύο τυχαίων ποσών X, Y με κόστος όλη του την περιουσία w (όποιο και να διαλέξει). Ξέρουμε ότι

$$X = \begin{cases} 400, & \text{με πιθανότητα } 0.5, \\ 900, & \text{με πιθανότητα } 0.5, \end{cases} \quad \text{και } Y = \begin{cases} 100, & \text{με πιθανότητα } 0.6, \\ 1600, & \text{με πιθανότητα } 0.4. \end{cases}$$

α) Να δείχθεί ότι το άτομο προτιμάει το X από το Y

β) Για ποιές τιμές του w πρέπει να αρνηθεί την ευκαιρία;

γ) Δώστε ένα παράδειγμα συνάρτησης ωφελιμότητας $\tilde{u}$ ώστε, αποφασίζοντας με βάση αυτήν, το άτομο να προτιμάει το Y.

Λύση

α) Υπολογίζουμε ότι

$$\mathbf{E}[u(X)] = \sum_{x \in \mathbb{R}} u(x)\mathbf{P}(X = x) = \frac{1}{2} \cdot u(400) + \frac{1}{2} \cdot u(900) = \frac{1}{2} \cdot 20 + \frac{1}{2} \cdot 30 = 25$$

και

$$\mathbf{E}[u(Y)] = 0.6 \cdot u(100) + 0.4 \cdot u(1600) = 0.6 \cdot 10 + 0.4 \cdot 40 = 22$$

Εφόσον $\mathbf{E}[u(X)] = 25 > 22 = \mathbf{E}[u(Y)]$, έπεται ότι $X \succ Y$.

β) Αρνείται την προσφορά σημαίνει $\mathbf{E}[u(w)] > \mathbf{E}[u(X)]$, η οποία δίνει $\sqrt{w} > 25 \Rightarrow w > 625$.

γ) Θέλουμε μία $\tilde{u}$ γνησίως αύξουσα ώστε $\mathbf{E}[\tilde{u}(Y)] > \mathbf{E}[\tilde{u}(X)]$. Μία τέτοια είναι η $\tilde{u}(x) = x$ αφού $\mathbf{E}(X) = 650 < 700 = \mathbf{E}(Y)$. ■

Θα υποθέτουμε στο εξής ότι κάθε συνάρτηση ωφελιμότητας είναι συνεχής (και βέβαια γνησίως αύξουσα).

Εφαρμογή

Εφαρμόζουμε την αρχή της ωφελιμότητας στα ακόλουθα τέσσερα σενάρια επιλογής σε συνθήκες αβεβαιότητας.

α) Άτομο με περιουσία w ασφαλίζεται για κίνδυνο X. Το μέγιστο ποσό $G_{\max}$ που προτίθεται να πληρώσει ικανοποιεί την

$$u(w - G_{\max}) = \mathbf{E}[u(w - X)].$$

Απόδειξη: Αν για αυτό το μέγιστο ποσό ισχύει $u(w - G_{\max}) < \mathbf{E}[u(w - X)]$, τότε από την αρχή ωφελιμότητας, το άτομο προτιμάει να μην ασφαλιστεί. Αν ισχύει $u(w - G_{\max}) > \mathbf{E}[u(w - X)]$, τότε επειδή η u είναι συνεχής, υπάρχει ένα $\varepsilon > 0$ ώστε $u(w - G_{\max} - \varepsilon) > \mathbf{E}[u(w - X)]$. Άρα το άτομο προτίθεται να πληρώσει ποσό $G_{\max} + \varepsilon$ για την ασφάλιση, άτοπο αφού $G_{\max}$ είναι το μέγιστο τέτοιο ποσό. Άρα πρέπει να ισχύει η ισότητα. ■

Όμοια δείχνουμε τα εξής.

β) Ασφαλιστής με περιουσία w αναλαμβάνει κίνδυνο X. Το ελάχιστο ασφάλιστρο $G_{\min}$ που ζητάει ικανοποιεί την

$$u(w) = \mathbf{E}[u(w + G_{\min} - X)].$$

γ) Άτομο με περιουσία w εκχωρεί δικαίωμα σε κέρδος X για να πάρει ποσό Κ. Η ελάχιστη τιμή του Κ ($K_{\min}$) ικανοποιεί την

$$\mathbf{E}[u(w + X)] = u(w + K_{\min}).$$

δ) Άτομο με περιουσία w πληρώνει K για να αποκτήσει δικαίωμα σε κέρδος X. Η μέγιστη τιμή του Κ ($K_{\max}$) ικανοποιεί την

$$u(w) = \mathbf{E}[u(w + K_{\max} + X)].$$

Πώς βρίσκουμε την u συγκεκριμένου ατόμου; Με ερωτηματολόγιο. Για παράδειγμα, έστω άτομο με περιουσία w. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $u(0) = -1, u(w) = 0$.

Ρωτάμε ποιό είναι το μέγιστο ποσό που δίνει για να ασφαλιστεί από τον κίνδυνο $X = \begin{cases} 0 & \text{με πιθανότητα } 1/2, \\ w & \text{με πιθανότητα } 1/2. \end{cases}$

Αν G_1 είναι αυτό το μέγιστο ποσό, τότε με βάση όσα είδαμε πιο πάνω, πρέπει να ισχύει

$$u(w - G_1) = \mathbf{E}[u(w - X)] = \frac{1}{2}u(w) + \frac{1}{2}u(0) = -1/2.$$

Για την ώρα έχουμε βρει σε ποια σημεία παίρνει η u τις τιμές $-1, -1/2, 0$. Φτιάχνουμε ένα παιχνίδι με μέση τιμή $-3/4$, και αυτό θα μας δώσει το σημείο που η u παίρνει την τιμή $-3/4$. Συγκεκριμένα, θεωρούμε το παιχνίδι που δίνει 0 με πιθανότητα 1/2 και $w - G_1$ με πιθανότητα 1/2. Το άτομο δηλώνει το μέγιστο ποσό G_2 που προτίθεται να δώσει ώστε να παίξει αυτό το παιχνίδι. Όπως πιο πάνω βρίσκουμε ότι $u(w - G_2) = -3/4$. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, συμπληρώνουμε όλο το γράφημα της u στο $[0, w]$. Παραλείπουμε τη διαδικασία για την εύρεση των τιμών της u στο $\mathbb{R}\backslash[0, w]$.

Άσκηση. (15, Κουτσόπουλος, σελ. 52) Έστω άτομο με συνάρτηση ωφελιμότητας $u(x) = \sqrt{x}, (x \geq 0)$ και περιουσία w, που αντιμετωπίζει κίνδυνο $X \sim U(0, w)$. Να βρεθούν τα $G_{\max}, G_{\min}, K_{\max}, K_{\min}$ της θεωρίας.

Λύση

α) Η σχέση $u(w - G_{\max}) = \mathbf{E}[u(w - X)]$ δίνει

$$\sqrt{w - G} = \frac{1}{w}\int_0^w \sqrt{w - x}dx = \frac{1}{w}\left.\frac{(w - x)^{-3/2}}{-3/2}\right|_0^w = \frac{2}{3}\frac{1}{w}w^{3/2} = \frac{2}{3}\sqrt{w} \tag{1.1}$$

$$\Rightarrow w - G = \frac{4}{9}w \Rightarrow G_{\max} = \frac{5}{9}w. \tag{1.2}$$

β) Όμοια, η $u(w) = \mathbf{E}[u(w + G_{\min} - X)]$ δίνει

$$\sqrt{w} = \int_0^w u(w + G - x)\frac{1}{w}dx = \frac{1}{w}\int_0^w \sqrt{w + G - x}\,dx = \frac{1}{w}\left(-\frac{2}{3}\right)(w + G - x)^{3/2}\Big|_0^w$$
$$= -\frac{2}{3w}[G^{3/2} - (w + G)^{3/2}] \Rightarrow w^{3/2} = \frac{2}{3}[(w + G)^{3/2} - G^{3/2}] \Rightarrow \ldots G_{\min} \approx 0,52129w.$$

Η εξίσωση έχει ακόμα δύο λύσεις οι οποίες όμως δεν είναι πραγματικοί αριθμοί, οπότε απορρίπτονται.

γ)

$$\sqrt{w + K_{\min}} = u(w + K_{\min}) = \mathbf{E}[u(w + X)] = \frac{1}{w}\int_0^w \sqrt{w + x}\,dx$$
$$= \frac{1}{w}\left.\frac{2}{3}(w + x)^{3/2}\right|_0^w = \frac{2}{3w}[(2w)^{3/2} - w^{3/2}] = \sqrt{w}\frac{2}{3}(2^{3/2} - 1)$$
$$\cdots \Rightarrow K_{\min} = \left(3 - \frac{16}{9}\sqrt{2}\right)w.$$

δ)

$$\sqrt{w} = u(w) = \mathbf{E}[u(w + X - K_{\max})] = \frac{1}{w}\int_0^w \sqrt{w + x - K_{\max}}\,dx$$
$$\ldots \Rightarrow K_{\max} \approx 0.47871w$$

1.2 Κινδυνοφοβία/Κινδυνοφιλία

Ένα άτομο λέγεται **κινδυνόφοβο** αν η συνάρτηση ωφελιμότητάς του είναι κοίλη ενώ λέγεται **κινδυνόφιλο** αν η συνάρτηση ωφελιμότητάς του είναι κυρτή.

Για την ακρίβεια, ο φυσιολογικός ορισμός των εννοιών είναι ως εξής. Ένα άτομο λέγεται κινδυνόφοβο αν για κάθε παιχνίδι X (δηλαδή κέρδος που εκφράζεται από την τυχαία μεταβλητή X), το άτομο προτιμάει το $\mathbf{E}(X)$ (σταθερό κέρδος) από το X ή είναι αδιάφορο μεταξύ των δύο. Λέγεται κινδυνόφιλο αν για κάθε παιχνίδι X, το άτομο προτιμάει το X από το $\mathbf{E}(X)$ ή είναι αδιάφορο μεταξύ των δύο.

Έστω τώρα άτομο κινδυνόφοβο με συνάρτηση ωφελιμότητας u και $x, y \in \mathbb{R}, \lambda \in (0, 1)$. Θεωρούμε το παιχνίδι X που δίνει x με πιθανότητα λ και y με πιθανότητα $1 - \lambda$. Τότε

$$\mathbf{E}(X) \succeq X \Leftrightarrow u\{\mathbf{E}(X)\} \geq \mathbf{E}\{u(X)\} \Leftrightarrow u(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda u(x) + (1 - \lambda)u(y).$$

Αυτό είναι ο ορισμός του να είναι η u κοίλη.

Παραδείγματα

• Κοίλες συναρτήσεις ωφελιμότητας: $\log x$ [στο $(0,\infty)$], x^c [στο $(0,\infty)$ με $c \in (0,1]$ σταθερά] , $-e^{-ax}$ ($a > 0$ σταθερά).
• Κυρτές συναρτήσεις ωφελιμότητας : $(x+a)^2$ [στο $[-a,\infty)$ με a σταθερα], e^{ax} ($a > 0$ σταθερά).

Ανισότητα Jensen

Έστω $I \subset \mathbb{R}$ διάστημα, $u : I \to \mathbb{R}$ κοίλη, και X τυχαία μεταβλητή που παίρνει τιμές στο I. Τότε ισχύει

$$u\{\mathbf{E}(X)\} \geq \mathbf{E}\{u(X)\} \tag{1.3}$$

όποτε οι μέσες τιμές στην ανισότητα ορίζονται και είναι πεπερασμένες.
Αν η u είναι κυρτή, τότε ισχύει $u\{\mathbf{E}(X)\} \leq \mathbf{E}\{u(X)\}$, πάλι με την προϋπόθεση οι μέσες τιμές ορίζονται και είναι πεπερασμένες.
Αν u είναι γνήσια κοίλη (ή γνήσια κυρτή) και η X όχι σταθερή, τότε οι παραπάνω ανισότητες ειναι γνήσιες.

Πρόταση. Έστω ότι η u είναι γνήσια αύξουσα και κοίλη. Τότε στα τέσσερα σενάρια της πιο πάνω εφαρμογής ισχύει ότι

$$G_{\max}, G_{\min} \geq \mathbf{E}(X), \tag{1.4}$$
$$K_{\max}, K_{\min} \leq \mathbf{E}(X). \tag{1.5}$$

Απόδειξη

α)

$$u(w-G) = \mathbf{E}[u(w-X)] \leq u(\mathbf{E}(w-X)) = u(w-\mathbf{E}(X)) \tag{1.6}$$
$$\Rightarrow w-G \leq w-\mathbf{E}(X) \Rightarrow G_{\max} \geq \mathbf{E}(X). \tag{1.7}$$

Η ανισότητα στην πρώτη γραμμή είναι εφαρμογή της ανισότητας Jensen. Η πρώτη συνεπαγωγή της δεύτερης γραμμής ισχύει γιατί η u είναι γνήσια αύξουσα.

β) Όμοια,

$$u(w) = \mathbf{E}[u(w+G-X)] \leq u(\mathbf{E}(w+G-X)) = u(w+G-\mathbf{E}(X)) \tag{1.8}$$
$$\Rightarrow w \leq w+G-\mathbf{E}(X) \Rightarrow G_{\min} \geq \mathbf{E}(X). \tag{1.9}$$

γ) Όμοια,

$$u(w+K) = \mathbf{E}[u(w+X)] \leq u(\mathbf{E}(w+X)) = u(w+\mathbf{E}(X)) \tag{1.10}$$
$$\Rightarrow w+K \leq w+\mathbf{E}(X) \Rightarrow K_{\min} \leq \mathbf{E}(X). \tag{1.11}$$

δ) Όμοια,

$$u(w) = \mathbf{E}[u(w-K+X)] \leq u(\mathbf{E}(w-K+X)) = u(w-K+\mathbf{E}(X)) \tag{1.12}$$
$$\Rightarrow w \leq w-K+\mathbf{E}(X) \Rightarrow K_{\max} \leq \mathbf{E}(X). \tag{1.13}$$

■

Παράδειγμα. (Το παράδοξο της Αγίας Πετρούπολης)

Ρίχνουμε ένα δίκαιο νόμισμα. Αν έρθει K για πρώτη φορά στην n-οστή ρίψη κερδίζουμε 2^n (και τελειώνει το παιχνίδι). Πόσο πρέπει να είναι το κόστος συμμετοχής;
Η X παίρνει τις τιμές $\{2^n : n = 1, 2, \ldots\}$ με αντίστοιχες πιθανότητες $\mathbf{P}(X = 2^n) = 2^{-n}$ για κάθε φυσικό $n \geq 1$. Άρα

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{x\in\mathbb{R}} x\,\mathbf{P}(X = x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n} = \infty.$$

Αν έχουμε περιουσία w και συνάρτηση ωφελιμότητας $u(x) = \log x$, πόσο είναι το $K_{\max}$ για να παίξουμε; Με βάση την πιο πάνω θεωρία, πρέπει να ισχύει

$$\log w = u(w) = \mathbf{E}[u(w - K + X)] = \sum_{n=1}^{\infty} u(w - K + 2^n)\frac{1}{w^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\log(w - K + 2^n).$$

Για $w = 100$ προκύπτει $K \cong 7.75$
Για $w = 1000$ προκύπτει $K \cong 10.95$
Για $w = 10^6$ προκύπτει $K \cong 20.88$

Αυτό το παιχνίδι λέγεται παράδοξο γιατί εφόσον έχει μέση τιμή άπειρο θα πρεπε οποιαδήποτε πεπερασμένη τιμή να είναι ευκαιρία. Ποιος όμως δίνει ακόμα και 100 Ευρώ για να παίξει; Το παράδοξο διατυπώθηκε από τον Nicolaus Bernoulli το 1713 και έχουν προταθεί διάφορες προσεγγίσεις για την επίλυσή του.

1.3 Απόλυτος συντελεστής αποφυγής κινδύνου

Έστω $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση ωφελιμότητας. Υποθέτουμε ότι υπάρχει η u'' και ότι $u'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Απόλυτο συντελεστή αποφυγής κινδύνου για πλούτο w λέμε τον αριθμό

$$r_u(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)}.$$

Ισοδύναμα,

$$r_u(w) = -(\log u')'.$$

Παρατηρήσεις

1)Αν το άτομο είναι κινδυνόφοβο, τότε $r_u(w) \geq 0$. Αν το άτομο είναι κινδυνόφιλο, τότε $r_u(w) \leq 0$

2) Αν οι $u, \tilde{u}$ είναι συναρτήσεις ωφελιμότητας ώστε $\tilde{u}(w) = \alpha u(w) + \beta, \alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$ τότε

$$r_{\tilde{u}} = -\frac{\alpha u''}{\alpha u'} = -\frac{u''}{u'} = r_u.$$

Παραδείγματα

1) Αν $u(w) = \log w$, τότε $u'(w) = \frac{1}{w}, u''(w) = -\frac{1}{w^2}$, και έτσι

$$r_u(w) = -\frac{-\frac{1}{w^2}}{\frac{1}{w}} = \frac{1}{w}.$$

2) Αν $u(w) = w^c (c > 0, w > 0)$, τότε $u'(w) = cw^{c-1}, u''(w) = c(c-1)w^{c-2}$ και

$$r_u(w) = -\frac{c(c-1)w^{c-2}}{cw^{c-1}} = -\frac{c-1}{w} = \frac{1-c}{w} = \begin{cases} > 0 & \text{αν } c < 1, \\ < 0 & \text{αν } c > 1, \\ = 0 & \text{αν } c = 1. \end{cases}$$

Σημασία του r_u στην ασφάλιση

Ασφαλισμένος έχει περιουσία w, συνάρτηση ωφελιμότητας u, και αντιμετωπίζει κίνδυνο X με $\mathbf{E}(X) = \mu, \mathrm{Var}(X) = \sigma^2$. Αν P η μέγιστη τιμή που δέχεται για ασφάλιση του X, γνωρίζουμε ότι $u(w - P) = \mathbf{E}[u(w - X)]$. Υποθέτοντας ότι $P \approx \mu$, ισχύει

$$P \approx \mu + \frac{1}{2}\sigma^2 r_u(w - \mu).$$

Απόδειξη:
Υπενθυμίζουμε ότι το ανάπτυγμα Taylor της u με κέντρο το x_0 είναι

$$u(x_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} u^{(k)}(x_0)\, t^k.$$

Κάτω από κατάλληλες προϋποθέσεις αυτό ισούται με $u(x_0+t)$. Και τότε κρατώντας μόνο πεπερασμένους όρους παίρνουμε μια προσέγγιση του $u(x_0+t)$.
Έτσι, για $x_0 = w - \mu$ και κρατώντας από το ανάπτυγμα τη μία φορά δύο όρους και την άλλη τρεις, έχουμε

$$\begin{aligned} u(w-P) &= u(w-\mu+\mu-P) \approx u(w-\mu) + u'(w-\mu)(\mu-P), \\ u(w-X) &= u(w-\mu+\mu-X) \approx u(w-\mu) + u'(w-\mu)(\mu-X) + \frac{1}{2}u''(w-\mu)(\mu-X)^2. \end{aligned}$$

Παίρνοντας μέση τιμή στη δεύτερη ισότητα, έχουμε

$$\mathbf{E}[u(w-X)] \approx u(w-\mu) + \frac{1}{2}u''(w-\mu)\sigma^2.$$

Γνωρίζουμε ότι $u(w-P) = \mathbf{E}[u(w-X)]$. Άρα

$$u'(w-\mu)(\mu-P) \approx \frac{1}{2}u''(w-\mu)\sigma^2 \Rightarrow$$

$$\mu - P \approx \frac{1}{2}\frac{u''(w-\mu)}{u'(w-\mu)}\sigma^2 = -\frac{\sigma^2}{2} r_u(w-\mu).$$

■

Το εκθετικό ασφάλιστρο

1) Έστω ασφαλισμένος με περιουσία w, συνάρτηση ωφελιμότητας $u(x) = -e^{-\alpha x}, \alpha > 0$, και κίνδυνος X. Τότε το μέγιστο ασφάλιστρο, P, που δέχεται να πληρώσει για την ασφάλισή του ικανοποιεί τα εξής:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[u(w-X)] = u(w-P) &\Leftrightarrow \mathbf{E}[e^{-\alpha w + \alpha X}] = e^{-\alpha w + \alpha P} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{E}[e^{\alpha X}] = e^{\alpha P} \Leftrightarrow P = \frac{1}{\alpha}\log \mathbf{E}[e^{\alpha X}]. \end{aligned}$$

2) Έστω ασφαλιστής με περιουσία w, συνάρτηση ωφελιμότητας $u(x) = -e^{-\alpha x}, \alpha > 0$ και κίνδυνος X. Τότε το ελάχιστο ασφάλιστρο, P, που δέχεται να πληρωθεί για την ασφάλισή ικανοποιεί τα εξής:

$$u(w) = \mathbf{E}[u(w+P-X)] \Leftrightarrow e^{-\alpha w} = \mathbf{E}[e^{-\alpha w - \alpha P + \alpha X}] = e^{-\alpha w}e^{-\alpha P}\mathbf{E}[e^{\alpha X}]$$

$$\Leftrightarrow P = \frac{1}{\alpha}\log \mathbf{E}[e^{\alpha X}].$$

Άσκηση. Για το εκθετικό ασφάλιστρο $P(Y) = \frac{1}{\alpha}\log \mathbf{E}[e^{\alpha Y}]$ ($\alpha > 0$ σταθερά) να δείξετε ότι ισχύει $P(2X) > 2P(X)$ για κάθε μη σταθερό κίνδυνο X με $\mathbf{E}[e^{2\alpha X}] < \infty$.

Λύση

Η ζητούμενη γράφεται ισοδύναμα

$$\frac{1}{\alpha}\log \mathbf{E}[e^{\alpha 2X}] > 2\frac{1}{\alpha}\log \mathbf{E}[e^{\alpha X}] \Leftrightarrow \mathbf{E}[e^{2\alpha X}] > (\mathbf{E}[e^{\alpha X}])^2,$$

το οποίο ισχύει γιατί η $f(x) = x^2$ είναι κυρτή (ανισότητα Jensen) και η $e^{\alpha X}$ είναι μη σταθερή. ■

1.4 Ασφαλιστικά Σχήματα

Κάθε συνάρτηση $I : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ με $I(x) \le x$ λέγεται ασφαλιστικό σχημα. Δηλαδή σε ζημιά X ο ασφαλιστής πληρώνει $I(X)$.

Παραδείγματα:

1) $I(x) = x$. Πλήρης κάλυψη
2) $I(x) = \lambda x$ με $\lambda \in (0,1)$ δεδομένο. Αναλογική κάλυψη
3) $I_\alpha(x) = \max\{x - \alpha, 0\} = (x - \alpha)_+$ με $\alpha > 0$ δεδομένο. Κάλυψη υπερβάλλοντος ζημίας

Το κομμάτι που πληρώνει ο ασφαλισμένος λέγεται **ίδια κράτηση** και είναι το ποσό

$$K(x) = x - I(x). \tag{1.14}$$

Ποια είναι η τιμή του ασφαλίστρου; Θα δούμε ποια τιμή προτείνει ο ασφαλισμένος και ποια ο ασφαλιστής.

α) Έστω ασφαλισμένος με περιουσία w, συνάρτηση ωφελιμότητας u, που αντιμετωπίζει κίνδυνο X. Αν G είναι το μέγιστο που δέχεται να πληρώσει για το ασφαλιστικό σχήμα I, τότε

$$\mathbf{E}[u(w - X)] = \mathbf{E}[u\{w - G - X + I(X)\}]. \tag{1.15}$$

β) Έστω ασφαλιστής με περιουσία w, συνάρτηση ωφελιμότητας u, ο οποίος πρόκειται να ασφαλίσει κίνδυνο X με το ασφαλιστικό σχήμα I. Αν G είναι το ελάχιστο που δέχεται ώστε να αναλάβει την ασφάλιση, τότε

$$u(w) = \mathbf{E}[u\{w + G - I(X)\}].$$

Παράδειγμα: Έστω ότι $u(x) = -e^{-\alpha x}$, όπου $\alpha > 0$.

α) Αν η u είναι η συνάρτηση ωφελιμότητας του ασφαλισμένου, τότε το μέγιστο που δέχεται να πληρώσει για να ασφαλιστεί από κίνδυνο X με το σχήμα I προσδιορίζεται ως εξής:

$$e^{-\alpha w}\mathbf{E}[e^{\alpha X}] = e^{-\alpha w + \alpha G}\mathbf{E}[e^{\alpha(X - I(X))}] \Leftrightarrow G = \frac{1}{\alpha}\log\frac{M_X(\alpha)}{M_{K(X)}(\alpha)}.$$

β) Αν η u είναι η συνάρτηση ωφελιμότητας του ασφαλιστή, τότε το ελάχιστο που ζητάει ώστε να ασφαλίσει κίνδυνο X με το σχήμα I προσδιορίζεται ως εξής:

$$e^{-\alpha w} = e^{-\alpha w - \alpha G}\mathbf{E}[e^{\alpha I(X)}] \Leftrightarrow G = \frac{1}{\alpha}\log M_{I(X)}(\alpha).$$

Αναλογική κάλυψη και κάλυψη υπερβάλλοντος ζημίας

Συμβολισμοί:

$G(\lambda)$: το ασφάλιστρο που δίνει ο ασφαλισμένος όταν $I(x) = \lambda x$.
$G^A(\lambda)$: το ασφάλιστρο που ζητάει ο ασφαλιστής όταν $I(x) = \lambda x$.
$G(x_1)$: το ασφάλιστρο που δίνει ο ασφαλισμένος όταν $I(x) = (x - x_1)_+$.
$G^A(x_1)$: το ασφάλιστρο που ζητάει ο ασφαλιστής όταν $I(x) = (x - x_1)_+$.

Άσκηση. Έστω συνάρτηση ωφελιμότητας $u(x) = -e^{-x}$, περιουσία w και κίνδυνος X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x) = ce^{-x}, x \in (0, w)$ όπου $c = e^w/(e^w - 1)$.

α) Να βρεθεί το $G(\lambda)$, όπου $\lambda \in (0,1)$.
β) Να βρεθεί το $G(x_1)$, όπου $x_1 \in (0, w)$.

Λύση

α)

$$\mathbf{E}[u(w - X)] = \mathbf{E}[u(w - G - X + \lambda X)] \Leftrightarrow \mathbf{E}[e^{-w+X}] = \mathbf{E}[e^{-w+G+(1-\lambda)X}]$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{E}[e^X] = e^G \mathbf{E}[e^{(1-\lambda)X}] \Leftrightarrow \int_0^w e^x ce^{-x} dx = e^G \int_0^w e^{(1-\lambda)x} ce^{-x} dx$$

$$\Leftrightarrow we^{-G} = \int_0^w e^{-\lambda x} dx = \left.\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right|_0^w = \frac{e^{-\lambda w} - 1}{-\lambda} = \frac{1 - e^{-\lambda w}}{\lambda}$$

$$\Leftrightarrow G(\lambda) = \log \frac{\lambda w}{1 - e^{-\lambda w}}.$$

β) $K(x) = x - I(x) = x - (x - x_1)^+ = \begin{cases} x_1, & \text{αν } x > x_1, \\ x, & \text{αν } x \le x_1, \end{cases} = x \wedge x_1.$

$$\mathbf{E}[u(w - X)] = \mathbf{E}[u(w - G - K(X))] \Leftrightarrow \mathbf{E}[e^X] = e^G \mathbf{E}[e^{K(X)}] = e^G \mathbf{E}[e^{X \wedge x_1}].$$

Υπολογίζουμε την τελευταία μέση τιμή

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[e^{X \wedge x_1}] &= \int_0^w ce^{-x} e^{x \wedge x_1} dx = \int_0^{x_1} ce^{-x} e^x dx + \int_{x_1}^w ce^{-x} e^{x_1} dx \\ &= c[x_1 + e^{x_1}(e^{-x_1} - e^{-w})] = c(x_1 + 1 - e^{x_1 - w}). \end{aligned}$$

Επίσης, $\mathbf{E}[e^X] = cw$, οπότε

$$cw = e^G c(x_1 + 1 - e^{x_1 - w}) \Rightarrow G(x_1) = \log \frac{w}{x_1 + 1 - e^{x_1 - w}}.$$

■

Θεώρημα. Έστω $P > 0$. Άτομο με συνάρτηση ωφελιμότητας u αντιμετωπίζει κίνδυνο X για τον οποίο ισχύει $P \le \mathbf{E}(X)$. Από όλα τα ασφαλιστικά σχηματα $I(x)$ με $\mathbf{E}[I(X)] = P$, το υπερβάλλοντος ζημίας $I(x_1)$ (όπου το x_1 ικανοποιεί την $\mathbf{E}[I_{x_1}(X)] = P$) μεγιστοποιεί τη μέση ωφελιμότητα του ατόμου, $\mathbf{E}[u(w - P + I(X) - X)]$, και ελαχιστοποιεί τη διασπορά της ιδίας κράτησης, $\mathrm{Var}(K_x)$

Άσκηση. (σελ 71, Κουτσόπουλος) Άτομο έχει περιουσία $w = 1$, συνάρτηση ωφελιμότητας $u(x) = \sqrt{x}$, και αντιμετωπίζει κίνδυνο $X \sim U(0,1)$.

α) Βρείτε τα λ, x_1 ώστε $\mathbf{E}[(X - x_1)^+] = \mathbf{E}(\lambda X) = 2/9$.

β) Βρείτε τις διασπορές $\mathrm{Var}((1-\lambda)X), \mathrm{Var}(K_{x_1})$.

γ) Να υπολογιστούν οι $\mathbf{E}(u|\lambda X), \mathbf{E}(u|I_{x_1})$, δηλαδή η μέση ωφελιμότητα του ατόμου κάτω από την αναλογική ασφάλιση και την υπερβάλλοντος ζημίας του ερωτήματος (α).

<u>Λύση</u>

α)

$$\frac{2}{9} = \lambda \mathbf{E}(X) = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{4}{9}.$$

Είναι σαφές ότι πρέπει $x_1 \in (0,1)$ (γιατί;). Έτσι

$$\frac{2}{9} = \mathbf{E}[(X - x_1)^+] = \int_0^1 (x - x_1)^+ dx = \int_{x_1}^1 (x - x_1) dx = \frac{(1 - x_1)^2}{2} \Rightarrow \begin{cases} 1 - x_1 = \frac{2}{3} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3}, \\ 1 - x_1 = \frac{2}{3} \Rightarrow x_1 = \frac{5}{3}. \end{cases}$$

Εφόσον όμως $x_1 \in (0,1)$, αποδεκτή λύση είναι μόνο η $x_1 = 1/3$.

β) Υπολογίζουμε

$$\mathrm{Var}((1-\lambda)X) = (1-\lambda)^2 \mathrm{Var}(X) = \frac{25}{81}\frac{1}{12} = \frac{25}{972}$$

και

$$\mathrm{Var}(K_{x_1}(X)) = \mathbf{E}[(K_{x_1}(X))^2] - (\mathbf{E}[K_{x_1}(X)])^2.$$

Έπειτα υπολογίζουμε τις μέσες τιμές στην τελευταία έκφραση.

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[(K_{x_1}(X))^2] = \mathbf{E}[(X \wedge x_1)^2] &= \int_0^1 (x - x_1)^2 dx = \int_0^{x_1} x^2 dx + \int_{x_1}^1 x_1^2 dx \\ &= \frac{x_1^3}{3} + x_1^2(1 - x_1) = x_1^2 - \frac{2}{3}x_1^3 = \frac{1}{9} - \frac{2}{3}\frac{1}{27} = \frac{7}{81}\end{aligned}$$

και

$$K_{x_1}(X) = X - I_{x_1}(X) \Rightarrow \mathbf{E}[K_{x_1}(X)] = \frac{1}{2} - \frac{2}{9} = \frac{5}{18}.$$

Άρα

$$\mathrm{Var}(K_{x_1}(X)) = \frac{7}{81} - \frac{25}{256} = \frac{1}{108}.$$

γ) Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(u|\lambda X) &= \mathbf{E}[u(w - P - K(X))] = \mathbf{E}[u(\frac{7}{9} - \frac{5}{9}X)] = \int_0^1 \sqrt{\frac{7}{9} - \frac{5}{9}x}dx \\ &= \cdots = \frac{14\sqrt{7} - 4\sqrt{2}}{45}\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(u|I_{x_1}) &= \mathbf{E}\left\{u\left(1 - \frac{2}{9} - (X \wedge x_1)\right)\right\} = \int_0^1 \sqrt{\frac{7}{9} - (x \wedge x_1)}\,dx \\ &= \int_0^{1/3} \sqrt{\frac{7}{9} - x}\,dx + \int_{1/3}^1 \sqrt{\frac{7}{9} - \frac{1}{3}}\,dx = \cdots = \frac{14}{81}\sqrt{7} + \frac{20}{81}.\end{aligned}$$

■

Κεφάλαιο 2

Αρχές υπολογισμού του ασφαλίστρου και μέτρα κινδύνου

2.1 Αρχές υπολογισμού του ασφαλίστρου

Αρχή υπολογισμού του ασφαλίστρου είναι μια συνάρτηση π που σε κάθε τυχαία μεταβλητή X (κίνδυνο) αντιστοιχεί έναν αριθμό $\pi(X)$, το ασφάλιστρο για τον κίνδυνο. Συνηθισμένες τέτοιες αρχές είναι οι εξής.

α) Καθαρό ασφάλιστρο/αρχή της ισοδυναμίας: $\pi(X) = \mathbf{E}(X)$.

β) Αρχή της μαθηματικής ελπίδας:

$$\pi(X) = (1+\alpha)\mathbf{E}(X),$$

όπου $\alpha > 0$ είναι δεδομένο [επειδή ο ασφαλιστής παίρνει το ρίσκο, χρεώνει κάτι παραπάνω από την $\mathbf{E}(X)$].

γ) Αρχή της διασποράς:

$$\pi(X) = \mathbf{E}(X) + \alpha \operatorname{Var}(X),$$

με $\alpha > 0$ δεδομένο (το επιπλέον ποσό χρέωσης είναι ανάλογο της μεταβλητότητας της X).

δ) Αρχή της ημιδιασποράς:

$$\pi(X) = \mathbf{E}(X) + \operatorname{Var}_+(X),$$

με $\alpha > 0$ δεδομένο, όπου $\operatorname{Var}_+(X) = \mathbf{E}[(\{X - \mathbf{E}(X)\}_+)^2]$ (δηλαδή λαμβάνονται υπόψιν μόνο οι αποκλίσεις προς τα πάνω).

ε) Αρχή της τυπικής απόκλισης:

$$\pi(X) = \mathbf{E}(X) + \alpha\sqrt{\operatorname{Var}(X)},$$

με $\alpha > 0$.

ζ) Εκθετική αρχή:

$$\pi(X) = \frac{1}{\alpha}\log \mathbf{E}[e^{\alpha X}],$$

με $\alpha > 0$.

η) Αρχή της ωφελιμότητας: $\pi(X)$ είναι ο αριθμός που λύνει την εξίσωση

$$u(0) = \mathbf{E}[u(\pi(X) - X)],$$

όπου u η συνάρτηση ωφελιμότητας του ασφαλιστή.

ϑ) Αρχή της μέγιστης απώλειας.
Αν ο κίνδυνος X είναι φραγμένος με μέγιστη τιμή ξ, δηλαδή $\xi = \inf\{s \in \mathbb{R} : \mathbf{P}(X \le s) = 1\} < \infty$, και έχουμε $p \in [0,1]$, τότε θέτουμε

$$\pi_p(X) = p\mathbf{E}(X) + (1-p)\xi.$$

Αυτό είναι ένας κυρτός συνδυασμός των $\mathbf{E}(X), \xi$. Το p εκφράζει σε πόσο βαθμό συμμετέχει η $\mathbf{E}(X)$ στον συνδυασμό.
Αν ο κίνδυνος X είναι μη φραγμένος, τότε έχουμε δεδομένα $p, \varepsilon \in (0,1)$ και θέτουμε

$$\xi_\varepsilon := \inf\{r : \mathbf{P}(X > r) \le \varepsilon\},$$
$$\pi_{p,\varepsilon}(X) := p\,\mathbf{E}(X) + (1-p)\,\xi_\varepsilon.$$

Το ξ_ε παίζει εδώ τον ρόλο του φράγματος για την X. Η πιθανότητα η X να ξεπεράσει την τιμή ξ_ε είναι το πολύ ε, το οποίο το επιλέγουμε μικρό, για παράδειγμα, 0.05.

Επιθυμητές ιδιότητες ασφαλίστρων

Γενικά θέλουμε μια αρχή υπολογισμού ασφαλίστρων να έχει τις παρακάτω ιδιότητες, αλλά αυτό δεν συμβαίνει πάντα.

1) $\pi(X) \ge \mathbf{E}(X)$
2) $\pi(X) \le \xi$
3) $\pi(X+c) = \pi(X) + c$ για κάθε $c \in \mathbb{R}$ (Συνέπεια)
4) $\pi(X+Y) = \pi(X) + \pi(Y)$ για κάθε X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές (Προσθετικότητα)
5) $\pi(X) = \pi(\pi(X|Y))$ για κάθε X, Y (Επαναληπτικότητα)

Στην ιδιότητα 2, το ξ είναι όπως ορίστηκε πιο πάνω, στην αρχή της μέγιστης απώλειας. Στην ιδιότητα 5, το $\pi(X|Y)$ είναι τυχαία μεταβλητή και έτσι μπορούμε να την αντιμετωπίσουμε σαν έναν καινούργιο κίνδυνο.

Άσκηση

α) Να δείξετε ότι η αρχή της ισοδυναμίας ικανοποιεί τις ιδιότητες 1-5.
β) Να δείξετε ότι η αρχή της διασποράς ικανοποιεί τις ιδιότητες 1,3,4 αλλά όχι την 2.

Λύση

α) Η πρώτη ιδιότητα ισχύει προφανώς αφού η ζητούμενη ανισότητα ισχύει ως ισότητα $\pi(X) = \mathbf{E}(X)$. Η δεύτερη ιδιότητα ισχύει προφανώς αν $\xi = \infty$, ενώ αν $\xi < \infty$, είναι ιδιότητα της μέσης τιμής η οποία είναι διαισθητικά προφανής (η μέση τιμή ενός τυχαίου μεγέθους που παίρνει τιμές το πολύ ξ δεν μπορεί να ξεπεράσει το ξ). Για αυστηρή απόδειξη, στην περιπτωση που η X έχει πυκνότητα f_X, υπολογίζουμε

$$\mathbf{E}(X) = \int_0^\infty x f_X(x)dx = \int_0^\xi x f_X(x)dx \le \xi \int_0^\xi f_X(x)dx = \xi.$$

Η τρίτη και τέταρτη ιδιότητα ισχύουν προφανώς, ενώ για την πέμπτη έχουμε $\pi(X|Y) = \mathbf{E}(X|Y)$, άρα

$$\pi(\pi(X|Y)) = \mathbf{E}\{\mathbf{E}(X|Y)\} = \mathbf{E}(X) = \pi(X).$$

Η δεύτερη ισότητα είναι συνέπεια του νόμου των επαναλαμβανόμενων μέσων τιμών.

β) Προφανώς $\pi(X) \ge \mathbf{E}(X)$ και

$$\pi(X+c) = \mathbf{E}(X) + c + \alpha\,\mathrm{Var}(X) = \pi(X) + c.$$

Αν οι X, Y είναι ανεξάρτητες, τότε ισχύει $\pi(X+Y) = \pi(X) + \pi(Y)$ λόγω της γραμμικότητας μέσης τιμής και επειδή (για X, Y ανεξάρτητες) ισχύει $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$
Η ιδιότητα 2 δεν ισχύει. Έστω $n \ge 1$ και μια τυχαία μεταβλητή X με

$$X = \begin{cases} 1 & \text{με πιθανότητα } 1 - \frac{1}{n}, \\ n^2 & \text{με πιθανότητα } \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Τότε $\xi = n^2$ ενώ

$$\mathbf{E}(X) = 1 - \frac{1}{n} + n^2\frac{1}{n} = n + 1 - \frac{1}{n}, \quad \mathbf{E}(X^2) = 1^2(1-\frac{1}{n}) + n^4\frac{1}{n} = n^3 + 1 - \frac{1}{n}.$$

Έτσι

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}(X))^2 = n^3 - n^2 - 2n + 2 + \frac{1}{n}$$

και

$$\pi(X) = n + 1 - n^{-1} + \alpha(n^3 - n^2 - 2n + 2 + n^{-1}).$$

Για οποιοδήποτε $\alpha > 0$, υπάρχει αρκετά μεγάλο n ώστε $\pi(X) > n^2 = \xi$. Αυτό γιατί $\pi(X) \approx an^3$. ■

Άσκηση. (2, σελ.26, Κουτσόπουλος) Για $p, \varepsilon \in (0,1)$ δεδομένα, να υπολογιστεί το ασφάλιστρο μέγιστης απώλειας για κίνδυνο X με πυκνότητα α) $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$. β) $f(x) = \frac{\alpha}{(1+x)^{\alpha+1}}$, $x > 0$ όπου $\alpha > 1$ δεδομένο.

Λύση

Και στις δυο περιπτώσεις ο κίνδυνος είναι μη φραγμένος, δηλαδή $\xi = \infty$, οπότε ο τύπος για το ασφάλιστρο είναι $\pi_{p,\varepsilon}(X) = p\mathbf{E}(X) + (1-p)\xi_\varepsilon$. Υπολογίζουμε λοιπόν τις ποσότητες $\mathbf{E}(X), \xi_\varepsilon$.

α)

$$\mathbf{E}(X) = \int_0^\infty xe^{-x}dx = \cdots = 1$$

και $\xi_\varepsilon = \inf\{s : \mathbf{P}(X > s) \le \varepsilon\}$. Επειδή για $s > 0$ ισχύει

$$\mathbf{P}(X > s) = \int_s^\infty f(x)dx = \int_s^\infty e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_s^\infty = e^{-s},$$

έχουμε $e^{-s} \le \varepsilon \Leftrightarrow s \ge \log\frac{1}{\varepsilon}$. Οπότε $\xi_\varepsilon = \log(1/\varepsilon)$.

β) Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X) &= \int_0^\infty xf(x)dx = \int_0^\infty \alpha x(1+x)^{-\alpha-1}dx = -\int_0^\infty x((1+x)^{-\alpha})' \\ &= -\, x(1+x)^{-\alpha}\big|_0^\infty + \int_0^\infty (1+x)^{-\alpha}(x)'dx = 0 + \frac{(1+x)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\bigg|_0^\infty = \frac{1}{\alpha-1}.\end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει γιατί $\alpha > 1$. Έπειτα, για $s > 0$ υπολογίζουμε

$$\mathbf{P}(X > s) = \int_s^\infty f(x)dx = \int_s^\infty \alpha(1+x)^{-\alpha-1}dx = -(1+x)^{-\alpha}\big|_s^\infty = \frac{1}{(1+s)^\alpha}.$$

Έτσι

$$\mathbf{P}(X > s) \le \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{(1+s)^\alpha} \le \varepsilon \Leftrightarrow s \ge \frac{1}{\varepsilon^{1/\alpha}} - 1,$$

οπότε $\xi_\varepsilon = \varepsilon^{-1/\alpha} - 1$. ■

Άσκηση. Να δείξετε ότι η εκθετική αρχή, $\pi_\alpha(X) := (1/\alpha)\log\mathbf{E}(e^{aX})$,

α) ικανοποιεί τις ιδιότητες 1-5,

β) είναι άυξουσα ως πρός α,

γ) $\lim_{\alpha\to 0^+}\pi_\alpha(X) = \mathbf{E}(X)$.

Λύση

α) Η ανισότητα Jensen για την κοίλη συνάρτηση log δίνει

$$\log\mathbf{E}[e^{\alpha X}] \ge \mathbf{E}[\log e^{\alpha X}] = \alpha\mathbf{E}(X) \Rightarrow \pi_\alpha(X) \ge \mathbf{E}(X).$$

Αν $\xi = \infty$, προφανώς $\pi_\alpha(X) \le \xi$
Αν $\xi < \infty$, τότε

$$\frac{1}{\alpha} \log \mathbf{E}[e^{\alpha X}] \le \frac{1}{\alpha} \log e^{\alpha \xi} = \xi.$$

Έπειτα,

$$\pi_\alpha(X + c) = \frac{1}{\alpha} \log \mathbf{E}[e^{\alpha X + \alpha c}] = \frac{1}{\alpha} \log e^{\alpha c} \mathbf{E}[e^{\alpha X}] = c + \pi_\alpha(X).$$

Έστω X, Y ανεξάρτητες. Τότε

$$\pi_\alpha(X + Y) = \frac{1}{\alpha} \log \mathbf{E}[e^{\alpha X + \alpha Y}] = \frac{1}{\alpha} \log \mathbf{E}[e^{\alpha X} e^{\alpha Y}] = \frac{1}{\alpha} \log\{\mathbf{E}[e^{\alpha X}]\mathbf{E}[e^{\alpha Y}]\} = \pi_\alpha(X) + \pi_\alpha(Y).$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι $\pi_\alpha(\pi_\alpha(X|Y)) = \pi_\alpha(X)$. Το ασφάλιστρο για την τυχαία μεταβλητή

$$W := \pi_\alpha(X|Y) = \frac{1}{\alpha} \log \mathbf{E}[e^{\alpha X}|Y]$$

είναι

$$\pi_\alpha(W) = \frac{1}{\alpha} \log \mathbf{E}[e^{\alpha W}] = \frac{1}{\alpha} \log \mathbf{E}[\mathbf{E}[e^{\alpha X}|Y]] = \frac{1}{\alpha} \log \mathbf{E}[e^{\alpha X}] = \pi_\alpha(X).$$

Η τρίτη ισότητα είναι συνέπεια του νόμου των επαναλαμβανόμενων μέσων τιμών.

β) Θέλουμε για $\alpha < \beta$ να ισχύει $\log[\{\mathbf{E}(e^{\alpha X})\}^{1/\alpha}] \le \log[\{\mathbf{E}(e^{\beta X})\}^{1/\beta}]$, δηλαδή $\{\mathbf{E}(e^{\alpha X})\}^{1/\alpha} \le \{\mathbf{E}(e^{\beta X})\}^{1/\beta}$.
Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ με $f(t) = t^{\beta/\alpha}$, η οποία είναι κυρτή γιατί $\beta/\alpha > 1$. Η ανισότητα Jensen δίνει

$$f(\mathbf{E}[e^{\alpha X}]) \le \mathbf{E}[f(e^{\alpha X})] \Rightarrow \{\mathbf{E}[e^{\alpha X}]\}^{\beta/\alpha} \le \mathbf{E}[e^{\beta X}] \Rightarrow \{\mathbf{E}[e^{\alpha X}]\}^{1/\alpha} \le \{\mathbf{E}[e^{\beta X}]\}^{1/\beta}.$$

■

2.2 Μέτρα κινδύνου

Μέτρο κινδύνου είναι μια συνάρτηση που σε κάθε κίνδυνο X αντιστοιχεί έναν αριθμό $m(X)$ ο οποίος εκφράζει κάποιο χαρακτηριστικό του κινδύνου. Για παράδειγμα, οι ποσότητες $\mathbf{E}(X), \xi, \mathrm{Var}_+(X)$, που συναντήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, είναι τέτοια μέτρα. Πιο δημοφιλή είναι τα μέτρα που σχετίζονται με το κεφάλαιο που πρέπει να υπάρχει σε διαθεσιμότητα ώστε ο οργανισμός που αντιμετωπίζει τον κίνδυνο να μπορεί να αποφύγει τη χρεοκοπία (με μεγάλη πιθανότητα). Ορίζουμε τέτοια μέτρα πιο κάτω, ξεκινώντας από το σημαντικότερο από αυτά, το VaR.

Value-at-Risk/Αξία σε κίνδυνο

Για δεδομένο κίνδυνο $S(\ge 0)$ και $p \in [0, 1]$ (συνήθως το p είναι κοντά στο 1, π.χ., $p = 0.95$) ονομάζουμε **αξία σε κίνδυνο** σε επίπεδο εμπιστοσύνης p την ποσότητα

$$\mathrm{VaR}(S; p) := \inf\{s : F_S(s) \ge p\}.$$

Δηλαδή, αν ονομάσουμε s_0 την $\mathrm{VaR}(S; p)$, τότε η πιθανότητα η ζημιά S να ξεπεράσει το s_0 είναι το πολύ $1 - p$, και το s_0 είναι ο μικρότερος αριθμός με αυτή την ιδιότητα.

Αν η S έχει πυκνότητα f και το σύνολο $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\}$ είναι ένα διάστημα I (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε η F_S είναι γνησίως αύξουσα στο I με εικόνα $(0, 1)$ (αν κάποιο άκρο του I είναι πεπερασμένο, τότε το αντίστοιχο άκρο του $(0, 1)$ πρέπει να γίνει κλειστό) και

$$\mathrm{VaR}(S; p) = F_S^{-1}(p)$$

για κάθε $p \in (0, 1)$. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι μια $S \sim \exp(2)$. Αυτή έχει $I = (0, \infty), F_S(t) = (1 - e^{-2t})\, \mathbf{1}_{t>0}$, και εύκολα έχουμε ότι $\mathrm{VaR}(S; p) = -(1/2) \log(1 - p)$ για κάθε $p \in (0, 1)$. Για τις ακραίες περιπτώσεις $p = 0$ και $p = 1$ έχουμε $\mathrm{VaR}(S; 0) = -\infty, \mathrm{VaR}(S; 1) = \infty$.

Άλλα μέτρα κινδύνου

1) **Αναμενόμενο έλλειμα** (expected shortfall)

$$\mathrm{ES}(S; p) := \mathbf{E}[\{S - \mathrm{VaR}(S; p)\}_+].$$

2) **Tail-Value-at-Risk**

$$\mathrm{TVaR}(S; p) := \frac{1}{1-p} \int_p^1 \mathrm{VaR}(S; t) dt.$$

(Μέσος ορος VaR για επίπεδα σημαντικότητας στο $[p, 1]$)

3) **Conditional Tail Expectation**

$$\mathrm{CTE}(S; p) := \mathbf{E}\{S | S > \mathrm{VaR}(S; p)\}.$$

(Δηλαδή αν τα πράγματα πάνε άσχημα ($S > \mathrm{VaR}(S; p)$), πόσο άσχημα μπορούν να πάνε κατα μέσο όρο;)

Άσκηση. Αν $S \sim U(\alpha, \beta)$, να βρεθούν οι ποσότητες $\mathrm{VaR}, \mathrm{ES}, \mathrm{TVaR}, \mathrm{CTE}$ για δεδομένο $p \in (0, 1)$.

Λύση

Η συνάρτηση κατανομής της S είναι

$$F_S(t) = \mathbf{P}(S \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{αν } t \leq \alpha, \\ \frac{t-\alpha}{\beta-\alpha} & \text{αν } \alpha < t < \beta, \\ 1 & \text{αν } t \geq \beta. \end{cases}$$

Οπότε

$$s_0 := \mathrm{VaR}(S; p) = \inf\{s : F_S(s) \geq p = \begin{cases} -\infty, & \text{αν } p = 0, \\ \alpha + (\beta - \alpha)p, & \text{αν } p \in (0, 1]. \end{cases}$$

Έτσι, εφόσον $p \in (0, 1)$,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[(S - s_0)_+] &= \int_\alpha^\beta (x - s_0)_+ \frac{1}{\beta - \alpha} dx = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_0^{\beta - s_0} y dy = \frac{1}{\beta - \alpha} \left. \frac{y^2}{2} \right|_0^{\beta - s_0} \\ &= \frac{(\beta - s_0)^2}{2(\beta - \alpha)} = \frac{[\beta - \alpha - p(\beta - \alpha)]^2}{2(\beta - \alpha)} = \frac{(\beta - \alpha)^2 (1 - p)^2}{2(\beta - \alpha)} = \frac{(\beta - \alpha)(1 - p)^2}{2}, \end{aligned}$$

$$\mathrm{TVaR}(S; p) = \frac{1}{1-p} \int_p^1 [\alpha + (\beta - \alpha)t] dt = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{1 - p} \frac{1 - p^2}{2} = \alpha + \frac{(\beta - \alpha)(1 + p)}{2},$$

και τέλος

$$\begin{aligned} \mathrm{CTE}(S; p) = \mathbf{E}(S | S > s_0) = \frac{\mathbf{E}(S \cdot 1_{S > s_0})}{\mathbf{P}(S > s_0)} &= \frac{1}{1-p} \int_\alpha^\beta x \, 1_{x > s_0} \frac{1}{\beta - \alpha} \, dx \\ = \frac{1}{(\beta - \alpha)(1 - p)} \int_{s_0}^\beta x \, dx = \frac{1}{(\beta - \alpha)(1 - p)} \left. \frac{x^2}{2} \right|_{s_0}^\beta &= \cdots = \frac{\alpha + \beta + p(\beta - \alpha)}{2}. \end{aligned}$$

■

Συνεπή μέτρα κινδύνου

Ένα μέτρο κινδύνου m που σε κίνδυνο X αντιστοιχεί την τιμή $m(X)$ ονομάζεται **συνεπές** (coherent) αν ικανοποιεί τις εξής τέσσερις συνθήκες για κάθε τυχαίες μεταβλητές X, Y.

1) $m(X+Y) \leq m(X) + m(Y)$ — Υποπροσθετικότητα

2) $m(\alpha X) = \alpha m(X)$ για κάθε $\alpha \geq 0$. — Θετική ομογένεια

3) Αν $X \leq Y$ τότε $m(X) \leq m(Y)$. — Μονοτονία

4) $m(X+k) = m(X) + k$ για κάθε σταθερά k. — Αναλλοίωτο στις μεταθέσεις

Άσκηση. Να δείξετε ότι το VaR ικανοποιεί τις ιδιότητες 2-4.

Λύση

Έστω $p \in (0,1)$ δεδομένο.

Για την ιδιότητα 2, η περίπτωση $\alpha = 0$ αφήνεται ως άσκηση. Για $\alpha > 0$,

$$\mathrm{VaR}(\alpha S; p) = \inf\{x : \mathbf{P}(\alpha S \leq x) \geq p\} = \alpha \inf\left\{\frac{x}{\alpha} : \mathbf{P}(S \leq \frac{x}{\alpha}) \geq p\right\} = \alpha\, \mathrm{VaR}(S; p).$$

Για την ιδιότητα 3, έστω ότι ισχύει $X \leq Y$. Επειδή $Y \leq s \Rightarrow X \leq s$ έχουμε $\mathbf{P}(Y \leq s) \leq \mathbf{P}(X \leq s)$. Άρα

$$\begin{aligned}
&\{s : \mathbf{P}(X \leq s) \geq p\} \supset \{s : \mathbf{P}(Y \leq s) \geq p\} \\
&\Rightarrow \inf\{s : \mathbf{P}(X \leq s) \geq p\} \leq \inf\{s : \mathbf{P}(Y \leq s) \geq p\} \\
&\Rightarrow \mathrm{VaR}(X; p) \leq \mathrm{VaR}(Y; p).
\end{aligned}$$

(Υπενθύμιση: $A \subset B \Rightarrow \inf A \geq \inf B$. Με $\subset$ δηλώνουμε το υποσύνολο, όχι απαραίτητα γνήσιο.)

Για την ιδιότητα 4, υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\mathrm{VaR}(X+k; p) &= \inf\{s : \mathbf{P}(X+k \leq s) \geq p\} = \inf\{s : \mathbf{P}(X \leq s-k) \geq p\} \\
&= k + \inf\{s-k : \mathbf{P}(X \leq s-k) \geq p\} = k + \mathrm{VaR}(X; p).
\end{aligned}$$

■

Άσκηση. Να δείξετε ότι αν $0 \leq p \leq q \leq 1$, τότε $\mathrm{VaR}(S;p) \leq \mathrm{VaR}(S;q)$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
&\{x : \mathbf{P}(S \leq x) \geq p\} \supset \{x : \mathbf{P}(S \leq x) \geq q\} \\
&\Rightarrow \inf\{x : \mathbf{P}(S \leq x) \geq p\} \leq \inf\{x : \mathbf{P}(S \leq x) \geq q\} \\
&\Rightarrow \mathrm{VaR}(S; p) \leq \mathrm{VaR}(S; q)
\end{aligned}$$

■

Άσκηση. Έστω $p = 0,9$ και X, Y κίνδυνοι με $X \sim U(0,1)$ και $Y = \begin{cases} 0.95 - X & \text{αν } X \leq 0.95, \\ 1.95 - X & \text{αν } X > 0.95. \end{cases}$

Να δείξετε ότι δεν ισχύει η σχέση

$$\mathrm{CTE}(X+Y; p) \leq \mathrm{CTE}(X; p) + \mathrm{CTE}(Y; p),$$

και άρα το CTE δεν είναι υποπροσθετικό μέτρο κινδύνου.

Λύση

Η συνάρτηση κατανομής της X είναι

$$F_X(s) = \begin{cases} 0 & \text{αν } s \leq 0, \\ s & \text{αν } s \in (0,1), \\ 1 & \text{αν } s \geq 1. \end{cases}$$

Επίσης, εύκολα βρίσκουμε ότι $Y \sim U(0,1)$, άρα

$$\mathrm{VaR}(X;p) = \mathrm{VaR}(Y;p) = \inf\{s : F_X(s) \geq p\} = p = 0.9.$$

Έπειτα,

$$X + Y = \begin{cases} 0,95 & \text{αν } X \leq 0.95, \\ 1.95 & \text{αν } X > 0.95. \end{cases}$$

(Παρατηρήστε ότι οι X, Y είναι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές ενώ η $X + Y$ είναι διακριτή).

$$\mathrm{CTE}(X;p) = \mathrm{CTE}(Y;p) = \mathbf{E}(X|X > 0,9) = \frac{\mathbf{E}[X 1_{X>0,9}]}{\mathbf{P}(X > 0,9)} = \frac{\int_{0,9}^{1} x dx}{0,1} = \frac{1}{0.1} \cdot \frac{1}{2}(1 - 0.9^2) = 0.95$$

Τώρα, για την $\mathrm{CTE}(X+Y;p)$, υπολογίζουμε πρώτα την

$$\mathrm{VaR}(X+Y;p) = \inf\{s : \mathbf{P}(X+Y \leq s) \geq 0.9\} = 0.95.$$

Άρα

$$\mathrm{CTE}(X+Y;p) = \mathbf{E}[X+Y|X+Y > 0,95] = 1,95 > 1.9 = 2 \cdot 0.95 = \mathrm{CTE}(X;p) + \mathrm{CTE}(Y;p).$$

■

Κεφάλαιο 3

Το ατομικό πρότυπο

Σε αυτό και στα επομενα κεφάλαια μελετάμε το χαρτοφυλάκιο ενός ασφαλιστή. Η συνολική ζημιά την οποία θα αντιμετωπίσει σε μια δεδομένη χρονική περίοδο είναι μια τυχαία μεταβλητή S, το άθροισμα των ζημιών που θα προκύψουν από τις ασφαλίσεις που έχει κάνει. Μας ενδιαφέρουν χαρακτηριστικά της S όπως οι $\mathbf{E}(S), \mathrm{Var}(S)$, και οι πιθανότητες $\mathbf{P}(S > x)$ για μεγάλο x. Αυτά σαφώς προκύπτουν αν μπορούμε να προσδιορίσουμε την κατανομή της S, το οποίο όμως γενικά είναι δύσκολο.

Υπενθυμίσεις από τις πιθανότητες

Για X, Y τυχαίες μεταβλητές σε κοινό χώρο πιθανότητας ορίζουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y),\\ \mathrm{Var}(X|Y) &= \mathbf{E}(X^2|Y) - \{\mathbf{E}(X|Y)\}^2,\end{aligned}$$

και τότε ισχύει

$$\mathbf{E}[\mathbf{E}(X|Y)] = \mathbf{E}(X), \tag{3.1}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}\{\mathbf{E}(X|Y)\} + \mathbf{E}\{\mathrm{Var}(X|Y)\}. \tag{3.2}$$

Οι δυο αυτές σχέσεις λέγονται «Νόμος των επαναλαμβανόμενων μέσων τιμών» και «Νόμος της ολικής διασποράς» αντίστοιχα.

Έστω $X_1, \ldots X_n$ τυχαίες μεταβλητές με $\mathbf{E}(X_i), \mathrm{Var}(X_i) \in \mathbb{R}$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Τότε

$$\mathbf{E}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathbf{E}(X_1) + \cdots + \mathbf{E}(X_n), \tag{3.3}$$

$$\mathrm{Var}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathrm{Var}(X_1) + \cdots + \mathrm{Var}(X_n) + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j). \tag{3.4}$$

Αν οι X_i είναι ανεξάρτητες ανά δύο, τότε $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0$ για όλα τα $i \neq j$ και ο τελευταίος τύπος γράφεται

$$\mathrm{Var}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathrm{Var}(X_1) + \cdots + \mathrm{Var}(X_n). \tag{3.5}$$

3.1 Το ατομικό πρότυπο

Έχουμε n ζημιογόνα γεγονότα $1, 2, \ldots, n$. Έστω X_i= η ζημιά του γεγονότος i αν αυτό συμβεί και I_i η τυχαία μεταβλητή

$$I_i := \begin{cases} 1 & \text{αν συμβεί το γεγονός } i, \\ 0 & \text{αν δεν συμβεί το γεγονός } i. \end{cases}$$

Υποθέτουμε ότι οι $X_1, \ldots, X_n, I_1, \ldots, I_n$ είναι όλες ανεξάρτητες μεταξύ τους. Το συνολικό μέγεθος ζημιάς (για τον ασφαλιστή) είναι

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i I_i.$$

Για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$, θέτουμε

$$\begin{aligned} q_i &= \mathbf{P}(I_i = 1) \text{ (η πιθανότητα να συμβεί το γεγονός } i\text{)}, \\ \mu_i &= \mathbf{E}(X_i), \\ \sigma_i &= \sqrt{\mathrm{Var}(X_i)}. \end{aligned}$$

Οι $\{X_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$ δεν είναι απαραίτητο να είναι ισόνομες.

Θεώρημα. Η μέση τιμή και η διασπορά του S είναι

$$\mathbf{E}(S) = \sum_{i=1}^{n} q_i \mu_i, \tag{3.6}$$

$$\mathrm{Var}(S) = \sum_{i=1}^{n} q_i \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} q_i(1 - q_i)\mu_i^2. \tag{3.7}$$

Απόδειξη. Η γραμμικότητα της μέσης τιμής δίνει

$$\mathbf{E}(S) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(X_i I_i) = \sum_{i=1}^{n} q_i \mu_i.$$

Έπειτα, $\mathbf{E}(X_i I_i) = \mathbf{E}(X_i)\mathbf{E}(I_i) = \mu_i q_i$ επειδή οι X_i, I_i είναι ανεξάρτητες. Και έτσι προπύπτει ο τύπος στην εκφώνηση.
Επειδή για $i \neq j$ οι $X_i I_i, X_j I_j$ είναι ανεξάρτητες, έχουμε

$$\mathrm{Var}(S) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i I_i).$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας την ανεξαρτησία των X_i, I_i, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X_i I_i) &= \mathbf{E}(X_i^2 I_i^2) - (\mathbf{E}(X_i I_i))^2 = \mathbf{E}(X_i^2)\mathbf{E}(I_i^2) - \mu_i^2 q_i^2 \\ &= (\sigma_i^2 + \mu_i^2) q_i - \mu_i^2 q_i^2 = q_i \sigma_i^2 + q_i(1 - q_i)\mu_i^2. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε επίσης τις $\mathbf{E}(I_i^2) = \mathbf{E}(I_i) = q_i, \mathbf{E}(X_i^2) = \mathrm{Var}(X_i) + \{\mathbf{E}(X_i)\}^2$. ■

Το πλήθος των γενογότων που συμβαίνουν είναι η τυχαία μεταβλητή $\Xi = I_1 + I_2 + \cdots + I_n$.
Το μέσο πλήθος τους είναι $\mathbf{E}(\Xi) = q_1 + \cdots + q_n$.
Η μέση αποζημίωση είναι

$$\overline{x} = \frac{\mathbf{E}(S)}{\mathbf{E}(\Xi)}.$$

Άσκηση. Έστω $n = 500$ ανεξάρτητοι και ισόνομοι κίνδυνοι $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ με $q = 0.01$ και κατανομή με

$$f(x) = \frac{6}{5} 10^{-12} \sqrt{x}, \ 0 < x < 10^8 \ \text{ και } \ \mathbf{P}(X_i = 10^8) = \frac{1}{5}.$$

Να υπολογιστούν οι ποσότητες

α) $\mathbf{E}(X_i), \mathrm{Var}(X_i)$,

β) $\mathbf{E}(S), \mathrm{Var}(S)$.

Λύση

α) Η X_i είναι μεικτές τυχαίες μεταβλητές (δηλαδή η κατανομή τους έχει ένα διακριτό και ένα συνεχές κομμάτι. Δες στο παράρτημα Α΄.3 σχετική θεωρία). Έτσι η μέση τιμής της X_1 είναι

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X_1) &= \int_0^{10^8} xf(x)dx + 10^8\mathbf{P}(X_1 = 10^8) = \frac{6}{5}10^{-12}\int_0^{10^8} x^{3/2}dx + 10^8\frac{1}{5} = \frac{6}{5}10^{-12}\left.\frac{x^{5/2}}{5/2}\right|_0^{10^8} \\ &= \frac{6}{5}\cdot\frac{2}{5}10^{-12}(10^8)^{5/2} + \frac{5}{25}10^8 = \frac{12}{25}10^8 + \frac{5}{25}10^8 = \frac{17}{25}10^8.\end{aligned}$$

Όμοια, η δεύτερη ροπή της X_1 είναι

$$\mathbf{E}(X_1^2) = \int_0^{10^8} x^2 f(x)dx + (10^8)^2\mathbf{P}(X_1 = 10^8) = \cdots = \frac{19}{35}10^{16}.$$

Προκύπτει ότι

$$\frac{\sqrt{\mathrm{Var}(X_i)}}{\mathbf{E}(X_i)} \cong 0.4171.$$

β) Αφήνεται στον αναγνώστη. ■

3.2 Ασφάλιση με την αρχή της μαθηματικής ελπίδας

Υποθέτουμε τώρα ότι ο ασφαλιστής ζητάει ποσό $(1+\theta)\mathbf{E}(X_i)$ από τον ασφαλισμένο i για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$. Το συνολικό ποσό (ασφάλιστρο) που θα εισπράξει είναι

$$G = (1+\theta)\mathbf{E}(S).$$

Ζητάμε το $\theta > 0$ ώστε η πιθανότητα το ασφάλιστρο να μην μπορέσει να καλύψει τις ζημιές, δηλαδή η

$$\mathbf{P}\{S > (1+\theta)\mathbf{E}(S)\},$$

να ισούται με α ή απλώς να είναι μικρότερη ή ίση του α, όπου α μικρό, π.χ., $\alpha = 0.05$.
Αν για την $S = \sum_{i=1}^n X_i I_i$ μπορεί να εφαρμοστεί το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (για παράδειγμα αν οι $X_i I_i$ είναι ανεξάρτητες, ισόνομες με πεπερασμένη και μη μηδενική διασπορά), τότε

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{S > (1+\theta)\mathbf{E}(S)\} &= \mathbf{P}\{S - \mathbf{E}(S) > \theta\mathbf{E}(S)\} \\ &= \mathbf{P}\left(\frac{S - \mathbf{E}(S)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S)}} > \theta\frac{\mathbf{E}(S)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S)}}\right) \approx \mathbf{P}\left(Z > \theta\frac{\mathbf{E}(S)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S)}}\right).\end{aligned}$$

Υπάρχει μοναδικό $z_\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε $\mathbf{P}(Z > z_\alpha) = \alpha$.
Άρα

$$\mathbf{P}(S > (1+\theta)\mathbf{E}(S)) \leq \alpha \Leftrightarrow \theta\frac{\mathbf{E}(S)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S)}} \geq z_\alpha \Leftrightarrow \theta \geq z_\alpha\frac{\sqrt{\mathrm{Var}(S)}}{\mathbf{E}(S)}.$$

Άσκηση. Δίνεται χαρτοφυλάκιο $n = 10^4$ ανεξάρτητων και ισόνομων κινδύνων με $q = 0.01$ και $X_1 \sim U(1, 100)$. Επιδιώκουμε να ισχύει $\mathbf{P}\{S > (1+\theta)\mathbf{E}(S)\} = 0.01$.

α) Πόσο είναι το θ;

β) Να δείξετε ότι για να αρκεί το $\theta = 0.1$ πρέπει $n \geq 71\,618$.

Λύση

α) Θέτουμε $X := X_1$. Βρίσκουμε ότι $z_{0.01} \approx 2.326348$. Έπειτα,

$$\mathbf{E}(S) = \sum_{i=1}^n q_i\mu_i = n\cdot q\cdot\mathbf{E}(X_1) = 10^4\cdot 10^{-2}\cdot 50 = 5000$$

και

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(S) &= n \cdot q \cdot \mathrm{Var}(X) + n \cdot q(1-q)\{\mathbf{E}(X)\}^2 \\ &= 10^4 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{10^4}{12} + 10^4 \cdot 10^{-2} \cdot 0.99 \cdot 50^2 = \frac{10^6}{12} + 0.99 \cdot 10^2 \cdot 50^2 \approx 330\,833.33\end{aligned}$$

Άρα

$$\theta = z_\alpha \frac{\sqrt{\mathrm{Var}(S)}}{\mathbf{E}(S)} \approx 0.267614$$

β) Το θ αρκεί για δεδομένο n αν έχουμε

$$\theta \geq z_\alpha \frac{\sqrt{\mathrm{Var}(S)}}{\mathbf{E}(S)}.$$

Θα λύσουμε αυτή την ανισότητα ως προς n. Παρατηρούμε ότι $\mathbf{E}(S) = n\beta$ και $\mathrm{Var}(S) = n\gamma$, όπου $\beta := q\mathbf{E}(X) = 0.5$ και $\gamma := q\,\mathrm{Var}(X) + q(1-q)\{\mathbf{E}(X)\}^2 \approx 33.0833$. Δηλαδή το δεξί μέλος της πιο πάνω ανισότητας είναι

$$z_\alpha \frac{\sqrt{n\gamma}}{n\beta} = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{z_\alpha \sqrt{\gamma}}{\beta}.$$

Άρα η ανισότητα ισοδυναμεί με την

$$n \geq \frac{z_\alpha^2 \gamma}{\beta^2 \theta^2} \simeq 71\,617.4.$$

■

3.3 Άθροισμα τυχαίων μεταβλητών

Ιδανικά, για τη μελέτη του ατομικού προτύπου θα θέλαμε να γνωρίζουμε την κατανομή του αθροίσματος $S = \sum_{i=1}^n X_i I_i$. Αυτό δεν είναι πάντοτε εφικτό, και γι΄ αυτό καταφεύγουμε σε προσεγγίσεις, όπως κάναμε στην προηγούμενη παράγραφο, όπου χρησιμοποιήσαμε το κεντρικό οριακό θεώρημα. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις που είναι εφικτό. Σε αυτές τις περιπτώσεις, λειτουργεί μια από τις εξής δύο τεχνικές.

α) Ροπογεννήτριες.
β) Συνέλιξη.

Ροπογεννήτριες

Έστω τυχαία μεταβλητή X. Η ροπογεννήτρια της X είναι η συνάρτηση M_X που ορίζεται σε κάθε $t \in \mathbb{R}$ ως

$$M_X(t) = \mathbf{E}\{e^{tX}\}.$$

Η ροπογεννήτρια έχει τις εξής δύο πολύ χρήσιμες ιδιότητες.

1. (Θεώρημα μοναδικότητας) Αν X, Y τυχαίες μεταβλητές και υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $M_X(t) = M_Y(t) < \infty$ για κάθε $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, τότε οι X, Y έχουν την ίδια κατανομή (γράφουμε τότε $X \stackrel{\mathrm{d}}{=} Y$).

2. (Άθροισμα) Αν X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές τότε $M_{X+Y}(t) = M_X(t) M_Y(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Συνδυάζοντας αυτές τις δύο ιδιότητες, μπορούμε να προσδιορίσουμε την κατανομή του αθροίσματος κάποιων τυχαίων μεταβλητών.

Παράδειγμα. Αν $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2),\ i = 1, \dots, n$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, τότε

$$S := X_1 + \cdots + X_n \sim N(\mu, \sigma^2),$$

όπου

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i,\ \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2.$$

Πράγματι, για $t \in \mathbb{R}$ η ροπογεννήτρια της S είναι

$$M_S(t) = \mathbf{E}\{e^{t(X_1+\cdots+X_n)}\} = e^{\mu_1 t + \sigma_1^2 t/2} \cdot \dots \cdot e^{\mu_n t + \sigma_n^2 t/2} = e^{\mu t + \sigma^2 t/2}.$$

Όμως αυτή είναι η ροπογεννήτρια μιας τυχαίας μεταβλητής με κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$, οπότε το θεώρημα μοναδικότητας δίνει ότι $S \sim N(\mu, \sigma^2)$. ■

Η μέθοδος των ροπογεννητριών λειτουργεί όταν η ροπογεννήτρια της S προκύπτει να είναι η ροπογεννήτρια κάποιας γνωστής κατανομής. Στο επόμενο παράδειγμα αυτό δεν συμβαίνει.

Παράδειγμα. Έστω $X, Y \sim U(0,1)$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Τότε για $t \neq 0$ έχουμε

$$M_Y(t) = M_X(t) = \mathbf{E}[e^{tX}] = \int_0^1 e^{tx} dx = \left.\frac{e^{tx}}{t}\right|_0^1 = \frac{e^t - 1}{t},$$

άρα

$$M_{X+Y}(t) = \begin{cases} 1 & \text{αν } t = 0, \\ \left(\frac{e^t-1}{t}\right)^2 & \text{αν } t \neq 0. \end{cases}$$

Αυτή δεν είναι η ροπογεννήτρια κάποιας γνωστής κατανομής. ■

Συνέλιξη

Θεώρημα: Έστω X_1, X_2 ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

α) Αν οι X_1, X_2 είναι διακριτές, με την X_1 να παίρνει τιμές $\{z_i,\ i \in I\}$(I αριθμήσιμο, συνήθως πεπερασμένο). Τότε για κάθε $z \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\mathbf{P}(X_1 + X_2 = z) = \sum_{i \in I} \mathbf{P}(X_1 = z_i)\mathbf{P}(X_2 = z - z_i).$$

Δηλαδή η συνάρτηση πιθανότητας της $X_1 + X_2$ είναι

$$f_{X_1+X_2}(z) = \sum_{x \in \mathbb{R}} f_{X_1}(x) f_{X_2}(z - x).$$

Το δεξί μέλος της τελευταίας σχέσης ονομάζεται **συνέλιξη** των f_{X_1}, f_{X_2} και συμβολίζεται με $f_{X_1} * f_{X_2}(z)$. Προφανώς στο άθροισμα συμμετέχουν μόνο τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία και οι δύο όροι του γινομένου είναι θετικοί. Το πλήθος αυτών των όρων είναι αριθμήσιμο αφού οι X_1, X_2 είναι διακριτές.

β) Αν οι X_1, X_2 είναι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές, με πυκνότητες f_{X_1}, f_{X_2}, τότε η $X_1 + X_2$ είναι επίσης συνεχής τυχαία μεταβλητή και έχει πυκνότητα

$$f_{X_1+X_2}(z) = \int_{\mathbb{R}} f_{X_1}(x) f_{X_2}(z - x) dx$$

για κάθε $z \in \mathbb{R}$. Το δεξί μέλος της τελευταίας σχέσης ονομάζεται **συνέλιξη** των f_{X_1}, f_{X_2} και συμβολίζεται με $f_{X_1} * f_{X_2}(z)$.

Παράδειγμα. Έστω $X_1 \sim \text{Poisson}(\lambda),\ X_2 \sim \text{Poisson}(\mu)$ με $\lambda, \mu > 0$. Θα δείξουμε ότι $X_1 + X_2 \sim \text{Poisson}(\lambda + \mu)$.

Εδώ είναι μια περίπτωση στην οποία δουλεύουν κοι οι δύο τεχνικές. Ας χρησιμοποιήσουμε την τεχνική της συνέλιξης. Εφόσον καθεμία από τις X_1, X_2 παίρνει τιμές στο $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots\}$, το άθροισμά τους θα παίρνει τιμές στο ίδιο σύνολο. Έτσι, η συνάρτηση πιθανότητας της $X_1 + X_2$ σε οποιοδήποτε $k \in \mathbb{N}$ ισούται με

$$\begin{aligned} f_{X_1+X_2}(k) &= \sum_{x \in \mathbb{R}} f_{X_1}(x) f_{X_2}(k-x) = \sum_{j=0}^{k} f_{X_1}(j) f_{X_2}(k-j) = \sum_{j=0}^{k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\mu} \frac{\mu^{k-j}}{(k-j)!} \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda^j \mu^{k-j} = e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda+\mu)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Η δεύτερη ισότητα στην πρώτη γραμμή ισχύει γιατί για να είναι οι οροι ενός γινομένου $f_{X_1}(x) f_{X_2}(k-x)$ θετικοί πρέπει οι αριθμοί $x, k-x$ να είναι φυσικοί. Αυτό σημαίνει ότι x φυσικός με $k - x \geq 0$. Επίσης, αν $k \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{N}$, τότε $f_{X_1+X_2}(k) = \mathbf{P}(X_1 + X_2 = k) = 0$ αφού οι X_1, X_2 παίρνουν τιμές στο $\mathbb{N}$. Κατά τα γνωστά, η $f_{X_1+X_2}$ είναι η συνάρτηση πιθανότητας της κατανομής Poisson$(\lambda + \mu)$. ■

Παράδειγμα. Έστω $X, Y \sim U(0,1)$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Με βάση το β) του θεωρήματος πιο πάνω, η $X + Y$ έχει πυκνότητα

$$f(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) f_Y(z-x)\, dx = \int_0^1 f_Y(z-x)\, dx.$$

Η δεύτερη ισότητα ισχύει γιατί $f_X(x) = \mathbf{1}_{0<x<1}$. Τώρα, επειδή $f_Y = f_X$, αν $z \leq 0$ ή $z \geq 2$, το τελευταίο ολοκλήρωμα ισούται με μηδέν. Αν $z \in (0,1]$, τότε το ολοκλήρωμα ισούται με

$$\int_0^z 1\, dx = z,$$

ενώ αν $z \in (1,2)$, ισούται με

$$\int_{z-1}^1 1\, dx = 1 - 2z.$$

Έτσι, η πυκνότητα της $X + Y$ είναι

$$f(z) = \begin{cases} 0 & \text{αν } z \leq 0 \text{ ή } z \geq 2, \\ z & \text{αν } z \in (0,1], \\ 1-2z & \text{αν } z \in [(1,2). \end{cases}$$

■

Κεφάλαιο 4

Το συλλογικό πρότυπο

Στο συλλογικό πρότυπο, όπως και στο ατομικό πρότυπο, μελετάμε το χαρτοφυλάκιο συμβολαίων ενός ασφαλιστή. Αυτή τη φορά, το πλήθος των συμβολαίων είναι τυχαίος αριθμός και οι ζημιές που προκύπτουν από τα συμβόλαια είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές.

4.1 Το συλλογικό πρότυπο

Έστω $(X_i)_{i\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών και N τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ και ανεξάρτητη από τις $(X_i)_{i\geq 1}$. Θέτουμε

$$S = \begin{cases} 0 & \text{αν } N = 0, \\ X_1 + \cdots + X_N & \text{αν } N \geq 1. \end{cases}$$

Προσέξτε ότι έχουμε άθροισμα τυχαίου πλήθους απο τις $(X_i)_{i\geq 1}$. Σε αντίθεση με το ατομικό πρότυπο

- Οι X_i είναι ισόνομες.
- Όλες οι ζημιές $\{X_i : i = 1, 2, \dots, N\}$ συμβαίνουν (αφού συμμετέχουν στο άθροισμα).
- Η N δεν είναι απαραίτητα φραγμένη τυχαία μεταβλητή (στο ατομικό πρότυπο ήταν σταθερή, ίση με δεδομένο n).

Θα συμβολίζουμε με X την X_1.

Θεώρημα.
α) $\mathbf{E}(S) = \mathbf{E}(N)\mathbf{E}(X)$,
β) $\mathrm{Var}(S) = \mathbf{E}(N)\,\mathrm{Var}(X) + (\mathbf{E}(X))^2\,\mathrm{Var}(N)$,
γ) $M_S(t) = \mathbf{E}[e^{tS}] = M_N(\log M_X(t))$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.
Απόδειξη.
α) Πρακτικά, υπολογίζουμε

$$\mathbf{E}(S) = \mathbf{E}\{\mathbf{E}(S|N)\} = \mathbf{E}\{\mathbf{E}(X_1 + \cdots + X_N|N)\} = \mathbf{E}\{N\mathbf{E}(X)\} = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(N).$$

Σημειώνουμε ότι η ισότητα $\mathbf{E}(X_1 + \cdots + X_N|N) = N\,\mathbf{E}(X)$ ισχύει και όταν $N = 0$.
Ο σχολαστικός υπολογισμός είναι ο εξής $\mathbf{E}(S) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(S|N)) = \mathbf{E}[\phi(N)]$, όπου $\phi(n) = \mathbf{E}(S|N = n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Υπολογίζουμε ότι

$$\phi(n) = \mathbf{E}(X_1 + \cdots + X_n|N = n) = \mathbf{E}(X_1 + \cdots + X_n) = n\,\mathbf{E}(X).$$

Η δεύτερη ισότητα ισχύει γιατί η N είναι ανεξάρτητη από τις $(X_i)_{i\geq 1}$. Επίσης η $\phi(n) = n\,\mathbf{E}(X)$ ισχύει και για $n = 0$. Έτσι $\mathbf{E}(S) = \mathbf{E}\{N\mathbf{E}(X)\} = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(N)$.

β) Παραλείποντας τις λεπτομέρειες, χρησιμοποιώντας τον νόμο της ολικής διασποράς (3.2), υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(S) &= \mathbf{E}\{\mathrm{Var}(S|N)\} + \mathrm{Var}\{\mathbf{E}(S|N)\} = \mathbf{E}\{N\,\mathrm{Var}(X)\} + \mathrm{Var}\{N\mathbf{E}(X)\}\\ &= \mathbf{E}(N)\,\mathrm{Var}(X) + (\mathbf{E}(X))^2\,\mathrm{Var}(N).\end{aligned}$$

γ) Όμοια,

$$\begin{aligned}M_S(t) &= \mathbf{E}\{e^{tS}\} = \mathbf{E}\{\mathbf{E}(e^{tS}|N)\} = \mathbf{E}[\mathbf{E}(e^{tX_1}\cdot\dots\cdot e^{tX_N})|N]\\ &= \mathbf{E}[\{\mathbf{E}(e^{tX})\}^N)] = \mathbf{E}[\{M_X(t)\}^N] = \mathbf{E}[e^{N\log M_X(t)}] = M_N\{\log M_X(t)\}.\end{aligned}$$

■

Κατανομή της S

Υποθέτουμε ότι οι X_i παίρνουν μόνο μη αρνητικές τιμές. Για $x \geq 0$,

$$\begin{aligned}F_S(x) = \mathbf{P}(S \leq x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{P}(S \leq x|N=k)\mathbf{P}(N=k)\\ &= 1\cdot\mathbf{P}(N=0) + \sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{P}(N=k)\mathbf{P}(X_1+\cdots+X_k \leq x|N=k)\\ &= \mathbf{P}(N=0) + \sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{P}(N=k)\mathbf{P}(X_1+\cdots+X_k \leq x).\end{aligned}$$

α) Αν η X_1 έχει πυκνότητα, τότε για $x > 0$ η S έχει πυκνότητα την οποία βρίσκουμε παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση ως προς x.

$$f_S(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{P}(N=k)f_{X_1+\cdots+X_k}(x) \text{ για } x>0 \text{ και } \mathbf{P}(S=0) = \mathbf{P}(N=0). \tag{4.1}$$

$f_{X_1+\cdots+X_k}$ είναι η πυκνότητα της $X_1+\cdots+X_k$. Δηλαδή η S έχει μεικτή κατανομή, με μάζα $\mathbf{P}(N=0)$ στο 0 και πυκνότητα f_S στο $(0,\infty)$.

β) Αν η X_1 είναι διακριτή, τότε και η S είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή και έχει συνάρτηση πιθανότητας

$$f_S(x) := \mathbf{P}(S=x) = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{P}(N=k)\mathbf{P}(X_1+\cdots+X_k=x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Γενικά δεν είναι εύκολος ο υπολογισμός των f_S.

Υπενθύμιση για την κατανομή Γάμμα

Για δεδομένα $a,\lambda>0$, η κατανομή $\Gamma(a,\lambda)$ είναι αυτή με πυκνότητα

$$f(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{x>0},$$

όπου $\Gamma(a) := \int_0^\infty t^{a-1}e^{-t}\,dt$ είναι η συνάρτηση Γάμμα. Ισχύει ότι $\Gamma(n) = (n-1)!$ για κάθε φυσικό $n\geq 1$ (υπόψιν ότι $0! = 1$).

Αν $X\sim\Gamma(a,\lambda)$, τότε η X έχει ροπογεννήτρια

$$M_X(t) = \begin{cases}\frac{1}{(1-\frac{t}{\lambda})^a} & \text{αν } t<\lambda,\\ \infty & \text{αν } t\geq\lambda.\end{cases}$$

Αν οι $X_i \sim \Gamma(a_i,\lambda),\ i=1,\dots,n$ είναι ανεξάρτητες, τότε $X_1+\cdots+X_n\sim\Gamma(a,\lambda)$ με $a = a_1+\cdots+a_n$. Αυτό αποδεικνύεται με χρήση ροπογεννητριών.

Η περιπτωση που $a = 1$, δηλαδή η $\Gamma(1, \lambda)$, είναι η εκθετική κατανομή $\exp(\lambda)$.

Άσκηση. Έστω ότι η N έχει συνάρτηση πιθανότητας $\mathbf{P}(N = n) = pq^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N} := \{0, 1, \ldots, \}$, όπου $p \in (0, 1)$ σταθερά, $q := 1 - p$. Επίσης, υποθέτουμε η κοινή κατανομή των X_i είναι η $\exp(\beta)$, όπου $\beta > 0$, δηλαδή με πυκνότητα $f(x) = \beta e^{-\beta x}\mathbf{1}_{x>0}$.

α) Να δείξετε ότι η κατανομή της $S = X_1 + \cdots + X_N$ έχει μάζα $f(0) = p$ στο 0 και πυκνότητα $f(x) = qp\beta e^{-p\beta x}$ στο $(0, \infty)$.

β) Να δείξετε ότι η ροπογεννήτρια τη S είναι $M_S(t) = \frac{p\beta - pt}{p\beta - t}$ για $t < p\beta$ και $M_S(t) = \infty$ διαφορετικά.

<u>Λύση</u>

α) Με βάση την (4.1) έχουμε $f(0) = \mathbf{P}(S = 0) = \mathbf{P}(N = 0) = p$, και για $x > 0$, η S έχει πυκνότητα

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(N = k) f_{X_1+\cdots+X_k}(x).$$

Αφού $X_i \sim \exp(\beta) \equiv \Gamma(1, \beta)$, για κάθε $k \in \mathbb{N}^+$ έχουμε $X_1 + \cdots + X_k \sim \Gamma(k, \beta)$. Άρα για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} pq^k \frac{\beta^k}{\Gamma(k)} x^{k-1} e^{-\beta x} = pe^{-\beta x} q\beta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(q\beta)^{k-1} x^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= pe^{-\beta x} q\beta \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(q\beta x)^j}{j!} = pq\beta e^{-\beta x} e^{q\beta x} = pq\beta e^{-\beta(1-q)x} = pq\beta e^{-p\beta x} \end{aligned}$$

Στη δεύτερη ισότητα της δεύτερης γραμμής χρησιμοποιήσαμε τη δυναμοσειρά της εκθετικής, $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$.

β) Η κατανομή της S προσδιορίστηκε στο προηγούμενο ερώτημα. Οπότε για $t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$M_S(t) = \mathbf{E}\{e^{tS}\} = \mathbf{P}(S = 0) \cdot e^0 + \int_0^{\infty} e^{tx} qp\beta e^{-p\beta x} dx = p + qp\beta \int_0^{\infty} e^{-x(p\beta - t)} dx.$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα ισούται με ∞ για $t \geq p\beta$, ενώ για $t < p\beta$ είναι πεπερασμένο και έτσι

$$M_S(t) = p + pq\beta \left. \frac{e^{-x(p\beta - t)}}{-(-p\beta - t)} \right|_0^{\infty} = p + pq\beta \left(-\frac{1}{-(p\beta - t)} \right) = p + \frac{pq\beta}{p\beta - t} = \frac{p\beta - pt}{p\beta - 1}.$$

■

4.2 Σύνθετες κατανομές

Έστω $(X_i)_{i \geq 0}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών και N τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$ ανεξάρτητη από τις X_i και η οποία έχει όνομα A (π.χ Poisson).

Θέτουμε

$$S_N = \begin{cases} 0 & \text{αν } N = 0, \\ X_1 + \cdots + X_n & \text{αν } N = n. \end{cases}$$

Η κατανομή της S_N ονομάζεται **σύνθετη A κατανομή**.

Παρατηρήστε οτι αν η X_1 (άρα και κάθε X_i) παίρνει μόνο την τιμή 1, τότε $S_N = N$.

Άσκηση. Να δείξετε ότι

α) Αν $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$, τότε $M_{S_N}(t) = e^{\lambda(M_X(t)-1)}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

β) Αν $N \sim \mathrm{NB}(r, p)$ (δηλαδή αρνητική διωνυμική με παραμέτρους $r > 0$ και $p \in (0,1)$), τότε

$$M_{S_N}(t) = \frac{p}{(1 - qM_X(t))^r}$$

για όλα τα t με $M_X(t) < 1/q$ [όπου $q := 1 - p$] και $M_{S_N}(t) = \infty$ διαφορετικά.

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο $M_{S_N}(t) = M_N(\log M_X(t))$. Επομένως αρκεί να υπολογίσουμε τη ροπογεννήτρια της N.

α) Για $u \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$M_N(u) = \mathbf{E}\{e^{uN}\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{uk} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^u)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^u} = e^{\lambda(e^u - 1)}.$$

Άρα

$$M_{S_N}(t) = e^{\lambda(e^{\log M_X(t)} - 1)} = e^{\lambda(M_X(t) - 1)}$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

β) Η συνάρτηση πιθανότητας της $\mathrm{NB}(r, p)$ είναι $\mathbf{P}(N = n) = \binom{n + r - 1}{n} p^r q^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Άρα

$$M_N(u) = \mathbf{E}[e^{uN}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{uk} \binom{k + r - 1}{k} p^r q^k.$$

Για τον υπολογισμό του αθροίσματος, κάνουμε την εξής μετατροπή στον διωνυμικό συντελεστή

$$\begin{aligned}\binom{k + r - 1}{k} &= \frac{(k + r - 1)(k + r - 2) \dots (k + r - k)}{k!} = \frac{r(r + 1) \dots (r + k - 1)}{k!} \\ &= \frac{(-1)^k (-r)(-r - 1) \dots (-r - k + 1)}{k!} = (-1)^k \frac{(-r)_k}{k!} = (-1)^k \binom{-r}{k}.\end{aligned}$$

[$(-r)_k$ είναι το καθοδικό παραγοντικό.] Άρα

$$M_N(u) = p^r \sum_{k=0}^{\infty} e^{uk} (-1)^k \binom{-r}{k} q^k = p^r \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-r}{k} (-qe^u)^k = p^r (1 - qe^u)^{-r}.$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει όταν $qe^u < 1$ αφού το διωνυμικό θεώρημα $(1 + t)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} t^k$ ισχύει εγγυημένα για $|t| < 1$. Η ισότητα δίνει ότι $M(-\log q-) = \infty$ (όριο από αριστερά) γιατί $r > 0$, άρα η ροπογεννήτρια ισούται με ∞ για $u \geq -\log q$. Αντικαθιστώντας στην $M_{S_N}(t) = M_N(\log M_X(t))$, καταλήγουμε στο ζητούμενο. ■

Ιδιότητες της σύνθετης Poisson

Αν $N \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$ και η X_1 έχει την f ως συνάρτηση πιθανότητας (αν είναι διακριτή) ή ως πυκνότητα (αν είναι συνεχής), τότε λέμε ότι η σύνθετη Poisson $S = S_N$ παράγεται από το ζευγάρι (λ, f).

1) **Θεώρημα** (κλειστότητα στο άθροισμα)

Αν $S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(k)}$ είναι ανεξάρτητες σύνθετες Poisson και παράγονται από τα ζεύγη $(\lambda_1, f_1), (\lambda_2, f_2), \dots, (\lambda_k, f_k)$ τότε η $S = S^{(1)} + \cdots + S^{(k)}$ είναι σύνθετη Poisson και παράγεται από το ζευγάρι (λ, f) με

$$\lambda := \lambda_1 + \cdots + \lambda_k,$$

$$f(x) := \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i(x).$$

(Δηλαδή η f είναι ένας κυρτός συνδυασμός των f_i.)

2) **Θεώρημα** (εκλέπτυνση της Poisson)

Αν η σύνθετη Poisson S παράγεται από το ζευγάρι (λ, f) όπου η f είναι συνάρτηση πιθανότητας μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής X που παίρνει τιμές $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_M\}$, θέτουμε

$$N_i = \{\text{πλήθος } j : 1 \le j \le N \text{ με } X_j = \alpha_i\}$$

για κάθε $i = 1, 2, \ldots, M$.
Τότε οι $N_1, N_2, \ldots, N_M$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και

$$N_i \sim \text{Poisson}(\lambda \cdot f(\alpha_i))$$

για κάθε $i = 1, 2, \ldots, M$.

4.3 Μεμειγμένες Κατανομές

Παράδειγμα. Έστω $N \sim \text{Poisson}(\Lambda)$ αλλά η Λ είναι τυχαία μεταβλητή με $\Lambda \sim \exp(2)$. Η κατανομή της N είναι παράδειγμα μεμειγμένης κατανομής. Πιο σωστά, έχουμε δύο τυχαίες μεταβλητές N, Λ ώστε $\Lambda \sim \exp(2)$ και για κάθε $x > 0$ ισχύει $N|\{\Lambda = x\} \sim \text{Poisson}(x)$. Σαφώς, η X παίρνει τιμές στο $\mathbb{N}$ και η κατανομή της υπολογίζεται ως εξής. Για $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{P}(N = k) = \int_0^\infty \mathbf{P}(N = k|\Lambda = x) f_\Lambda(x)dx = \int_0^\infty e^{-x}\frac{x^k}{k!}2e^{-2x}dx = \frac{2}{k!}\int_0^\infty x^k e^{-3x}dx =$$

$$= \frac{2}{k!}\int_0^\infty \frac{y^k}{3^k}e^{-y}\frac{1}{3}dy = \frac{2}{k!3^{k+1}}\int_0^\infty y^k e^{-y}dy = \frac{2}{k!3^{k+1}}\Gamma(k+1) = \frac{2}{3^{k+1}}.$$

Στη γενική περίπτωση, έχουμε συναρτήσεις $f_{X|\Theta}(x;\theta)$ του x οι οποίες εξαρτώνται από μια παράμετρο θ. Η $f_{X|\Theta}(x;\theta)$ μπορεί να είναι συνάρτηση πιθανότητας μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής ή πυκνότητα μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής. Έχουμε επίσης μια συνάρτηση $f_\Theta : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ η οποία επίσης μπορεί να είναι συνάρτηση πιθανότητας ή πυκνότητα.

Αν η f_Θ είναι συνάρτηση πιθανότητας, θέτουμε

$$f_X(x) = \sum_{\theta \in \mathbb{R}} f_{X|\Theta}(x;\theta)\, f_\Theta(\theta), \tag{4.2}$$

(παρατηρήστε ότι αυτό είναι κυρτός συνδυασμός των $f_{X|\Theta}(x;\theta)$ γιατί $\sum_{\theta\in\mathbb{R}} f_\Theta(\theta) = 1$) ενώ αν η f_Θ είναι πυκνότητα, θέτουμε

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X|\Theta}(x;\theta)\, f_\Theta(\theta)d\theta. \tag{4.3}$$

Το τι είναι αυτή η συνάρτηση f_X (συνάρτηση πιθανότητας ή πυκνότητα) το εξετάζουμε κατά περίπτωση. Για παράδειγμα, αν όλες οι $f_{X|\Theta}(x;\theta)$ είναι πυκνότητες, τότε η f_X είναι πυκνότητα. Αν όλες οι $f_{X|\Theta}(x;\theta)$ είναι συναρτήσεις πιθανότητας και υπάρχει ένα αριθμήσιμο $A \subset \mathbb{R}$ με $\sum_{x\in A} f_{X|\Theta}(x;\theta) = 1$ για κάθε θ, τότε η f_X είναι συνάρτηση πιθανότητας.
Το νόημα που έχουν οι παραπάνω συναρτήσεις είναι το εξής.

Έχουμε δύο τυχαίες μεταβλητές X, Θ. Η Θ περιγράφεται από την f_Θ, και έπειτα για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$ η δεσμευμένη τυχαία μεταβλητή $X|\{\Theta = \theta\}$ περιγράφεται από την $f_{X|\Theta}(x;\theta)$. Τότε η τυχαία μεταβλητή X περιγράφεται από την f_X. Η κατανομή της X λέγεται **μεμειγμένη κατανομή**.

Παράδειγμα. Έστω $f(x) = \left(\frac{2}{3}e^{-x} + \frac{1}{3}5e^{-5x}\right)\mathbf{1}_{x>0}$. Η f έχει ολοκλήρωμα 1 και είναι πάντοτε ≥ 0, άρα είναι πυκνότητα μιας τυχαίας μεταβλητής. Δεν είναι κάποια γνωστή πυκνότητα αλλά είναι κυρτός συνδυασμός δύο πυκνοτήτων. Μπορούμε επομένως να την γράψουμε ως μεμειγμένη κατανομή.

Εύκολα βλέπουμε ότι $X \sim \exp(\Theta)$ όπου $\Theta = \begin{cases} 1 & \text{με πιθανότητα } \frac{2}{3}, \\ 5 & \text{με πιθανότητα } \frac{1}{3}. \end{cases}$ Πιο σωστά, έχουμε την Θ με την κατανομή που μόλις περιγράψαμε και έπειτα $X|\{\Theta = \theta\} \sim \exp(\theta)$ για κάθε $\theta \in \{1, 5\}$.

Παράδειγμα. Έστω ότι $\Theta \sim \Gamma(a, \lambda)$ και $X|\{\Theta = \theta\} \sim \exp(\theta)$ για κάθε $\theta > 0$. Ποια η κατανομή της X; Επειδή κάθε $X|\{\Theta = \theta\} \sim \exp(\theta)$ είναι συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα, το ίδιο θα ισχύει και για την X. Και αφού η Θ έχει πυκνότητα, η πυκνότητα της X υπολογίζεται με βάση την (4.3) ως

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^\infty \theta e^{-\theta x} \mathbf{1}_{x>0} \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \theta^{a-1} e^{-\lambda\theta}\, d\theta = \mathbf{1}_{x>0} \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^\infty \theta^a e^{-(\lambda+x)\theta}\, d\theta \\ &\overset{y=(\lambda+x)\theta}{=} \mathbf{1}_{x>0} \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \frac{1}{(\lambda+x)^{a+1}} \int_0^\infty y^a e^{-y}\, dy = \frac{a\lambda^a}{(\lambda+x)^{a+1}} \mathbf{1}_{x>0}. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε το ότι το ολοκλήρωμα στη δεύτερη γραμμή είναι $\Gamma(a+1)$, το οποίο ως γνωστόν ισούται με $a\,\Gamma(a)$. ■

Κλείνουμε το κεφάλαιο με μια άσκηση πάνω στον νόμο των επαναλαμβανόμενων μέσων τιμών.

Άσκηση. Έστω $q \in (0, 1)$ και X, Y, I ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $I \sim \text{Bernoulli}(q)$, δηλαδή

$$I = \begin{cases} 1 & \text{με πιθανότητα } q, \\ 0 & \text{με πιθανότητα } 1-q. \end{cases}$$

Θέτουμε $T = qX + (1-q)Y$ και $Z = IX + (1-I)Y$. Να συγκριθούν οι $\mathbf{E}[T^k], \mathbf{E}[Z^k]$ για $k = 1, 2$.

Λύση

Προφανώς

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(T) &= q\mathbf{E}(X) + (1-q)\mathbf{E}(Y), \\ \mathbf{E}(T^2) &= q^2\mathbf{E}(X^2) + (1-q)^2\mathbf{E}(Y^2) + 2q(1-q)\mathbf{E}(XY). \end{aligned}$$

Έπειτα, $Z = \begin{cases} X & \text{αν } I = 1, \\ Y & \text{αν } I = 0, \end{cases}$ και

$$\mathbf{E}(Z) = \mathbf{E}\{\mathbf{E}(Z|I)\} = \mathbf{E}\{\phi(I)\} \text{ όπου } \phi(x) = \mathbf{E}(Z|I = x).$$

Η I παίρνει μόνο τις τιμές $0, 1$, οπότε υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \phi(0) &= \mathbf{E}(Z|I = 0) = \mathbf{E}(Y|I = 0) = \mathbf{E}(Y), \\ \phi(1) &= \mathbf{E}(Z|I = 1) = \mathbf{E}(X|I = 1) = \mathbf{E}(X). \end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα σε κάθε γραμμή ισχύει γιατί η I είναι ανεξάρτητη από την Y και από την X. Έτσι

$$\mathbf{E}(Z) = \mathbf{E}\{\phi(I)\} = \mathbf{P}(I = 0)\phi(0) + \mathbf{P}(I = 1)\phi(1) = (1-q)\mathbf{E}(Y) + q\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(T),$$

και όμοια

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Z^2) &= \mathbf{E}\{\mathbf{E}(Z^2|I)\} = \mathbf{P}(I = 0)\mathbf{E}(Z^2|I = 0) + \mathbf{P}(I = 1)\mathbf{E}(Z^2|I = 1) \\ &= (1-q)\mathbf{E}(Y^2) + q\mathbf{E}(X^2). \end{aligned}$$

Έπεται ότι γενικά ισχύει $\mathbf{E}(Z^2) \neq \mathbf{E}(T^2)$. Για παράδειγμα αν $\mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) = 0, \mathbf{E}(X^2), \mathbf{E}(Y^2) > 0$, και $q \in (0, 1)$, τότε $\mathbf{E}(T^2) < \mathbf{E}(Z^2)$. ■

Κεφάλαιο 5

Θεωρία χρεοκοπίας

Στοχαστική ανέλιξη σε συνεχή χρόνο είναι μια συλλογή από τυχαίες μεταβλητές $\{X_t : t \in [0, \infty]\}$ (π.χ η κίνηση Brown)

Η ανέλιξη Poisson

Έστω $\lambda > 0$. Επιλέγουμε $(X_i)_{i\geq 1}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με $X_i \sim \exp(\lambda)$. Έστω $T_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ για κάθε $n \geq 1$ (αυτοί είναι οι χρόνοι που συμβαίνει ένα ζημιογόνο γεγονός) και

$$N(t) := \text{πλήθος γεγονότων στο } [0, t] = \max\{n : T_n \leq t\}$$

για κάθε $t \geq 0$. Η $\{N(t) : t \geq 0\}$ ονομάζεται διαδικασία Poisson με παράμετρο λ.

Ισχύει ότι

1) Για κάθε $0 \leq s < t$, η τυχαία μεταβλητή $\hat{N}(s, t] := N(t) - N(s) \sim \text{Poisson}(\lambda(t - s))$.
Ιδιαιτέρως, ισχύει $\mathbf{E}[\hat{N}(s, t]] = \lambda(t - s)$.

2) Για κάθε $t_0 \geq 0$ σταθερό, η $\{N(t + t_0) - N(t_0),\ t \geq 0\}$ είναι επίσης ανέλιξη Poisson με παράμετρο λ και ανεξάρτητη της $\{N(t) : t \in [0, t_0]\}$.

Η διαδικασία του πλεονάσματος

Ασφαλιστής έχει αρχικό κεφάλαιο $u \geq 0$. Έστω $(X_i)_{i\geq 1}$ τα ποσά των ζημιών που θα χρειαστεί να καλύψει από τον χρόνο 0 και έπειτα, αριθμημένα με χρονολογική σειρά. Θέτουμε

$$\begin{aligned}
P(t) &:= \text{το σύνολο του ασφαλίστρων που εισπράτονται στο διάστημα } [0, t] \\
N(t) &:= \text{ο αριθμός ζημιών στο } [0, t] \\
S(t) &:= \text{σύνολο αποζημιώσεων που δίνονται στο } [0, t] = X_1 + X_2 + \cdots + X_{N(t)}.
\end{aligned}$$

Η περιουσία του ασφαλιστή τον χρόνο t (η διαδικασία του πλεονάσματος) είναι η

$$U(t) := u + P(t) - S(t).$$

Υποθέτουμε ότι

- $P(t) = c \cdot t$ για κάποιο $c > 0$.
- Οι ζημιές $X_1, X_2, \ldots$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $[0, \infty)$ και $\mathbf{P}(X_1 > 0) > 0$.
- Η $N(t)$ είναι ομοιογενής στοχαστική διαδικασία [δηλαδή $\mathbf{E}[N(t)] = mt$ για κάθε $t \geq 0$, όπου η $m > 0$ είναι σταθερά] και ανεξάρτητη από τις $(X_i)_{i\geq 1}$.
(Για παράδειγμα, η $\{N(t), t \geq 0\}$ μπορεί να είναι ανέλιξη Poisson με παράμετρο m και ανεξάρτητη από τις $(X_i)_{i\geq 1}$.)

Επιλογή του c.
Η μέση τιμή της περιουσίας του ασφαλιστή τον χρόνο t είναι

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\{U(t)\} &= u + ct - \mathbf{E}\{X_1 + \cdots + X_{N(t)}\} \\ &= u + ct - \mathbf{E}\{N(t)\}\mathbf{E}(X_1) = u + ct - mtp_1 = u + t(c - mp_1),\end{aligned}$$

όπου θέσαμε $p_1 = \mathbf{E}(X_1)$. Στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το ότι η $N(t)$ είναι ανεξάρτητη από τις $(X_i)_{i\geq 1}$. Επειδή η $\mathbf{E}\{U(t)\}$ πρέπει να είναι μη αρνητική για κάθε $t \geq 0$, πρέπει $c \geq mp_1$. Επομένως το c θα γράφεται ως

$$c = (1+\theta)mp_1$$

για κάποιο $\theta \geq 0$, το οποίο ονομάζεται **περιθώριο ασφάλειας**.

Ο συντελεστής προσαρμογής

Έστω $M_X(r) = \mathbf{E}[e^{rX}]$ η ροπογεννήτρια της $X = X_1$ και U όπως πριν. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $r > 0$ ώστε $M_X(r) < \infty$. Συντελεστή προσαρμογής R για την U ονομάζουμε τη μοναδική θετική λύση της εξίσωσης (ως προς r)

$$1 + (1+\theta)p_1 r = M_x(r). \tag{5.1}$$

Παρατηρούμε ότι η $r = 0$ ικανοποιεί την εξίσωση. Για να δείξουμε ότι έχει μόνο μια θετική λύση, κάνουμε πρώτα μερικές παρατηρήσεις. Επειδή η X παίρνει μη αρνητικές τιμές, η M_X είναι γνησίως αύξουσα. Θέτουμε

$$\gamma := \sup\{r \geq 0 : M_X(r) < \infty\}.$$

Από την υπόθεση για την M_X που κάναμε πιο πάνω, έχουμε $\gamma > 0$. Είναι δυνατόν να ισχύει $\gamma < \infty$ (π.χ., αν $X \sim \exp(\lambda)$, τότε $\gamma = \lambda$) ή $\gamma = \infty$ (π.χ. αν η X είναι φραγμένη τυχαία μεταβλητή). Σε κάθε περίπτωση όμως ισχύει

$$\lim_{r\to\gamma-} M_X(r) = \infty. \tag{5.2}$$

Όταν $\gamma < \infty$, αυτό ειναι συνέπεια του θεωρήματος μονότονης σύγκλισης της θεωριας μέτρου. Όταν $\gamma = \infty$, έχουμε το εξής επιχείρημα. Επειδή η X παίρνει μη αρνητικές τιμές και δεν είναι ταυτοτικά 0, υπάρχει $x_0 > 0$ ώστε $a := \mathbf{P}(X \geq x_0) > 0$. Τότε για κάθε $r > 0$ ισχύει

$$M_X(r) \geq \mathbf{E}(e^{rX}\mathbf{1}_{X\geq x_0}) \geq e^{rx_0}a. \tag{5.3}$$

Έτσι, προφανώς $\lim_{r\to\infty} M_X(r) = \infty$, και μάλιστα με ταχύτητα τουλάχιστον εκθετική.

Πρόταση. Η (5.1) έχει μοναδική θετική λύση.

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(r) = M_X(r) - 1 - (1+\theta)p_1 r$. Ισχύει $h(0) = 0$ και $h'(0) = M_X'(0) - (1+\theta)p_1 = -\theta p_1 < 0$. Άρα για μικρά $r > 0$ έχουμε $h(r) < 0$.

Επίσης, $\lim_{r\to\gamma-} h(r) = \infty$. Γιατί για $\gamma < \infty$ αυτό έπεται από την (5.2) ενώ για $\gamma = \infty$ έπεται από την (5.3). Άρα για r κοντά στο γ ισχύει ότι $M_X(r) > 0$. Επειδή η h είναι συνεχής, το θεώρημα Bolzano δίνει ότι υπάρχει $r \in (0, \gamma)$ ώστε $h(r) = 0$.

Για το ότι υπάρχει μόνο μία θετική ρίζα, αν υποθέσουμε το αντίθετο, δηλαδή θεωρήσουμε ότι υπάρχουν δύο ρίζες $0 < r_1 < r_2 < \gamma$, τότε επειδή και το 0 είναι ρίζα, εφαρμόζοντας το θεώρημα Rolle τρεις φορές, βρίσκουμε ότι υπάρχει $r \in (0, \gamma)$ με $h''(r) = 0$. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί $h''(r) = \mathbf{E}(X^2 e^{rX}) > 0$ για κάθε $r < \gamma$. ∎

Άσκηση. Αν η $(N(t))_{t\geq 0}$ είναι Poisson με παράμετρο μ και $X_i \sim \exp(\beta)$ να δείξετε ότι ο συντελεστής προσαρμογής ισούται με $R = \frac{\theta}{1+\theta}\beta$.

Λύση

Έχουμε $p_1 := \mathbf{E}(X) = 1/\beta$ και

$$M_X(r) = \int_0^\infty e^{rx}\beta e^{-\beta x}dx = \beta\int_0^\infty e^{-(\beta-r)x}dx = \beta\left.\frac{e^{-(\beta-r)x}}{-(\beta-r)}\right|_0^\infty = \begin{cases}\frac{\beta}{\beta-r} & \text{αν } r < \beta,\\ \infty & \text{αν } r \geq \beta.\end{cases}$$

Η (5.1) γίνεται (υποθέτοντας ότι το r που εμφανίζεται είναι $< \beta$)

$$1+(1+\theta)\frac{1}{\beta}r = \frac{\beta}{\beta-r} \Leftrightarrow (1+\theta)\frac{r}{\beta} = \frac{\beta}{\beta-r} \Leftrightarrow \beta - r = \frac{\beta}{1+\theta} \Leftrightarrow r = \frac{\beta\theta}{1+\theta}.$$

Παρατηρούμε ότι η λύση είναι μικρότερη του β και θετική. Άρα είναι ο συντελεστής προσαρμογής. ■

Η πιθανότητα χρεωκοπίας

Ορίζουμε τον χρόνο χρεοκοπίας

$$T := \inf\{t \geq 0 : U(t) < 0\}.$$

Αν το σύνολο στη σχέση αυτή είναι κενό (δηλαδή αν $U(t) \geq 0$ για κάθε $t \geq 0$), τότε $T = \infty$. Επίσης, θέτουμε

$$\psi(u) := \mathbf{P}(T < \infty | U(0) = u)$$

για κάθε $u \geq 0$. Αυτή είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας ξεκινώντας με απόθεμα u.

Θεώρημα. Για κάθε $u \geq 0$ ισχύει

$$\psi(u) = \frac{1}{\mathbf{E}[e^{-RU(T)} | T < \infty]}\, e^{-Ru} \tag{5.4}$$

όπου R είναι ο συντελεστής προσαρμογής

Παρατηρήσεις:

1) Επειδή $U(T) < 0$ και $R > 0$, ο παρονομαστής στην (5.4) είναι > 1. Άρα $\psi(u) < e^{-Ru}$ για κάθε $u \geq 0$.

2) Αν η κοινή κατανομή των ζημιών X_i είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $a > 0$ με $\mathbf{P}(0 \leq X_1 \leq a) = 1$, τότε

$$U(T) \geq -a \Rightarrow \mathbf{E}[e^{-RU(T)} | T < \infty] \leq e^{Ra} \Rightarrow \psi(u) \geq \frac{e^{-Ru}}{e^{Ra}}.$$

Οπότε

$$\frac{1}{e^{Ra}} e^{-Ru} \leq \psi(u) \leq e^{-Ru}$$

για κάθε $u \geq 0$.

Προσεγγιστική εύρεση του R

Η (5.1) γενικά δεν δίνει κλειστό τύπο για το r, οπότε βρίσκουμε προσεγγίσεις. Επειδή η M_X είναι πεπερασμένη σε περιοχή του 0 [την $(-\infty, \gamma)$], όλες της οι ροπές είναι πεπερασμένες και αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά με κέντρο το μηδέν και θετική ακτίνα σύγκλισης. Έστω

$$p_k := \mathbf{E}(X^k)$$

για κάθε $k = 1, 2, \ldots$, οι ροπές της X. Τότε

$$M_X(r) = \mathbf{E}[e^{rX}] = \mathbf{E}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(rX)^k}{k!}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{E}(X^k) r^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k}{k!} r^k.$$

Η (5.1) γίνεται

$$1 + rp_1 + \theta r p_1 = 1 + rp_1 + \frac{r^2}{2!}p_2 = \frac{r^3}{3!}p_3 + \cdots \Rightarrow \theta r p_1 = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{r^k}{k!} p_k.$$

Αν στο δεξί μέλος κρατήσουμε τους όρους με $k \le i$, για i δεδομένο, παίρνουμε μια λύση που την συμβολίζουμε με R_{i-1}. Για παράδειγμα, για $i = 2$ παίρνουμε την R_1 ως μοναδική θετική λύση της $\theta r p_1 = \frac{r^2}{2} p_2$ την

$$R_1 = \frac{2\theta p_1}{p_2}.$$

Οι R_i είναι προσεγγίσεις του R και ικανοποιούν $R < R_{i+1} < R_i$ για κάθε i (εύκολη άσκηση).

Θέτουμε

$$P(z) := \mathbf{P}(X \le z) \text{ για κάθε } z \in \mathbb{R},$$

που είναι η συνάρτηση κατανομής της X, και

$$T' := \inf\{s \ge 0 : U(s) < u\},$$

ο πρώτος χρόνος που το πλεόνασμα πέφτει κάτω από το αρχικό πλεόνασμα.

Θεώρημα. Αν η $(N(t))_{t\ge 0}$ είναι ανέλιξη Poisson με παράμετρο $\lambda > 0$, τότε για κάθε $x \ge 0$ ισχύει

$$\mathbf{P}(u - U(T') \ge x,\ T' < \infty) = \frac{1}{(1+\theta)p_1} \int_x^\infty \{1 - P(t)\}\, dt. \tag{5.5}$$

Παραγωγίζοντας ως προς x, βλέπουμε ότι, πρακτικά, αυτό που λέει το θεώρημα είναι ότι

$$\mathbf{P}(u - U(T') \in (x, x+dx), T' < \infty) = \frac{1}{(1+\theta)p_1}\{1 - P(x)\}\, dx.$$

Δηλαδή η τυχαία μεταβλητή $u - U(T')$ περιορισμένη στο γεγονός $T' < \infty$ έχει πυκνότητα $\frac{1}{(1+\theta)p_1}\{1 - P(x)\}$.

Υπενθυμίζουμε ότι επειδή η X παίρνει μη αρνητικές τιμές, ισχύει $\mathbf{E}(X) = \int_0^\infty \mathbf{P}(X > t)\, dt$, άρα θέτοντας $x = 0$ στην (5.5) παίρνουμε ότι

$$\mathbf{P}(T' < \infty) = \frac{1}{1+\theta}.$$

Και τώρα χρησιμοποιώντας αυτήν μαζί με την (5.5) παίρνουμε ότι η τυχαία μεταβλητή $L_1 := u - U(T')|\{T' < \infty\}$ (που προκύπτει από δέσμευση) έχει πυκνότητα

$$f_{L_1}(x) = \frac{1}{p_1}\{1 - P(x)\} \cdot \mathbf{1}_{x>0}. \tag{5.6}$$

Άσκηση. Έστω ότι η $(N(t))_{t\ge 0}$ είναι ανέλιξη Poisson με παράμετρο $\lambda > 0$. Να δειχθεί ότι

α) Αν $\mathbf{P}(X = 1) = 1$, τότε $L_1 \sim U(0, 1)$.

β) Αν $X \sim U(0, 1)$, τότε $f_{L_1}(x) = 2(1 - x) \cdot \mathbf{1}_{x\in(0,1)}$.

Λύση

α) Έχουμε $P(x) := \mathbf{P}(X \le x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x < 1, \\ 1 & \text{αν } x \ge 1, \end{cases}$

και προφανώς $p_1 = \mathbf{E}(X) = 1$. Άρα

$$f_{L_1}(x) = \frac{1 - P(x)}{p_1} \mathbf{1}_{x>0} = \begin{cases} 1 & \text{αν } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{αν } x \in \mathbb{R}\backslash(0, 1). \end{cases}$$

β) Όμοια, $p_1 = \mathbf{E}(X) = \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2}$ και

$P(x) = \mathbf{P}(X \le x) = \begin{cases} x & \text{αν } x \in (0, 1), \\ 1 & \text{αν } x \ge 1. \end{cases}$

Άρα $f_{L_1}(x) = \frac{1-P(x)}{p_1}\mathbf{1}_{x>0} = \begin{cases} 2(1-x) & \text{αν } x \in (0,1), \\ 0 & \text{αν } x \in \mathbb{R}\setminus(0,1). \end{cases}$ ■

Παλιά Θέματα

Άσκηση. Θεωρούμε την διαδικασία πλεονάσματος $(U(s))_{s\geq 0}$ με περιθώριο ασφάλειας θ και ζημιές $\{X_i : i \geq 1\}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με πυκνότητα

$$f(x) = \begin{cases} x/4 & \text{αν } x \in (1,3), \\ 0 & \text{αν } x \in \mathbb{R}\backslash(1,3), \end{cases}$$

οι οποίες συμβαίνουν με βάση μια διαδικασία Poisson $(N(t))_{t\geq 0}$ με παράμετρο $m = 3$

α) Ποια είναι η ροπογεννήτρια της X_1;

β) Να δειχθεί ότι ο συντελεστής προσαρμογής για τη διαδικασία ικανοποιεί την $R < \frac{13}{15}\theta =: R'$.

γ) Να δειχθεί ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ από αρχικό πλεόνασμα u ικανοποιεί την $\psi(u) \geq e^{-(u+3)R'}$ για κάθε $u \geq 0$.

δ) Αν το αρχικό πλεόνασμα είναι 0 (δηλαδή $u = 0$), να υπολογιστεί η πυκνότητα της τυχαίας μεταβλητής $Y = -U(T)|\{T < \infty\}$ όπου $T = \inf\{s : U(s) < 0\}$.

Λύση

α) Για κάθε $r \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned} M_{X_1}(r) = \mathbf{E}(e^{rX_1}) &= \int_1^3 \frac{x}{4} e^{rx} dx = \frac{1}{r}\int_1^3 \frac{x}{4}(e^{rx})' dx \\ &= \frac{1}{4r} x e^{rx}\Big|_1^3 - \frac{1}{4r}\int_1^3 e^{rx} dx = \frac{1}{4r}(3e^{3r} - e^r) - \frac{1}{4r^2}(e^{3r} - e^r). \end{aligned}$$

β) Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι

$$R < R' := \frac{2p_1}{p_2}\theta.$$

Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} p_1 = \mathbf{E}(X) &= \int_1^3 \frac{x^2}{4} dx = \frac{x^3}{12}\Big|_1^3 = \frac{27}{12} - \frac{1}{12} = \frac{13}{6}, \\ p_2 = \mathbf{E}(X^2) &= \int_1^3 \frac{x^3}{4} dx = \frac{x^4}{16}\Big|_1^3 = \frac{81}{16} - \frac{1}{16} = 5, \end{aligned}$$

Άρα

$$R' = \frac{2p_1\theta}{p_2} = \frac{13/3}{5}\theta = \frac{13}{15}\theta.$$

γ) Γνωρίζουμε ότι

$$\psi(u) = \frac{1}{\mathbf{E}[e^{-RU(T)|T<\infty}]} e^{-Ru} \leq e^{-Ru}.$$

Επειδή οι ζημιές ικανοποιούν $X_i \in (1,3)$ για κάθε i, έχουμε $U(T) = U(T-) - X_{N(T)} \geq 0 - X_{N(T)} > -3$.
Επομένως $-RU(T) < 3R$ και

$$\mathbf{E}[e^{-RU(T)}|T < \infty] < e^{3R} \Rightarrow \psi(u) > \frac{e^{-Ru}}{e^{3R}} = e^{-R(U+3)} > e^{-R'(u+3)}.$$

δ) Επειδή $u = 0$, έχουμε $T' = T$ και $-U(T)|\{T < \infty\} = L_1$.
Η τυχαία μεταβλητή L_1 έχει πυκνότητα

$$f_{L_1} = \frac{1 - P(x)}{p_1}\mathbf{1}_{x>0}$$

με $p_1 = \mathbf{E}(X) = 13/6$ και

$$P(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{αν } x \le 1, \\ \int_1^x \frac{t}{4}dt = \frac{x^2-1}{8} & \text{αν } x \in (1,3), \\ 1 & \text{αν } x \ge 3. \end{cases}$$

Άρα

$$f_{L_1}(x) = \frac{6}{13}\{1 - P(x)\}1_{x\ge 0} = \begin{cases} \frac{6}{13} & \text{αν } x \in (0,1), \\ \frac{6}{13}\left(1 - \frac{x^2-1}{8}\right) & \text{αν } x \in (1,3), \\ 0 & \text{αν } x \ge 3 \text{ ή } x \le 0. \end{cases}$$

Άσκηση. Δίνεται κίνδυνος X με πυκνότητα $f_X(x) = \begin{cases} 2/x^3 & \text{αν } x > 1, \\ 0 & \text{αν } x \le 1. \end{cases}$

Για $p = 3/4$ και $\varepsilon = 1/100$, να υπολογιστεί το ασφάλιστρο βασισμένο στην αρχή της μέγιστης απώλειας.

Λύση

α) Έχουμε $\xi_\varepsilon = \inf\{x : \mathbf{P}(X > x) \le \varepsilon\}$. Για $x > 1$ υπολογίζουμε

$$\mathbf{P}(X > x) = \int_x^\infty f(t)dt = \int_x^\infty \frac{2}{t^3}dt = -t^{-2}\big|_x^\infty = \frac{1}{x^2}.$$

Έτσι $\mathbf{P}(X > x) \le \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} \le 1/100 \Leftrightarrow x \ge 10$ και επομένως $\xi_\varepsilon = 10$. Επίσης,

$$\mathbf{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} t f_X(t)dt = \int_1^\infty \frac{2}{t^2}dt = -\frac{2}{t}\bigg|_1^\infty = 2.$$

Τελικά, το ζητούμενο ασφάλιστρο είναι

$$\pi_{p,\varepsilon} = \frac{3}{4}\cdot 2 + \frac{1}{4}\cdot 10 = 4.$$

■

Άσκηση. Άτομο με περιουσία $w = 1$ και συνάρτηση ωφελιμότητας $u(x) = -e^{-x}$ έχει δικαίωμα σε κέρδος $X \sim U(0,1)$. Έχει την επιλογή να ανταλλάξει το δικαίωμα στο κέρδος X με ποσό K και δικαίωμα σε κέρδος $Y \sim \exp(2)$ (δηλαδή $f_Y(x) = 2e^{-2x}1_{x>0}$). Το K μπορεί να είναι και αρνητικό, που σημαίνει ότι κατα την ανταλλαγή το άτομο δίνει ποσό $|K|$. Για ποιές τιμές του K το άτομο δέχεται την ανταλλαγή;

Λύση

Η ανταλλαγή γίνεται δεκτή αν και μόνο αν $\mathbf{E}[u(w+K+Y)] \ge \mathbf{E}[u(w+X)]$. Αυτή η σχέση γράφεται ισοδύναμα

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty u(w+K+y)2e^{-2y}dy \ge \int_0^1 u(w+x)dx \\ &\Leftrightarrow -\int_0^\infty e^{-w-K-y}2e^{-2y}dy \ge -\int_0^1 e^{-w-x}dx \\ &\Leftrightarrow \int_0^\infty 2e^{-K}e^{-3y}dy \le \int_0^1 e^{-x}dx \Leftrightarrow 2e^{-K}\frac{1}{3} \le -\,e^{-x}\big|_0^1 = 1 - e^{-1} \\ &\Leftrightarrow e^K \ge \frac{2/3}{1-1/e} \Leftrightarrow K \ge \log\frac{2/3}{1-1/e}. \end{aligned}$$

Η ελάχιστη τιμή του K είναι θετική γιατί $e < 3 \Rightarrow \frac{1-1/3}{1-1/e} > 1$. ■

Άσκηση. Θεωρούμε άτομο με συνάρτηση ωφελιμότητας $u(x) = x|x|$ και περιουσία $w = 5$. Το άτομο αντιμετωπίζει κίνδυνο $X \sim U(0,4)$.

α) Για ποια αναλογική ασφάλιση $I^\lambda(X) = \lambda X$ και ασφάλιση υπερβάλλοντος ζημίας $I_{x_1}(X) = (X - x_1)^+$ έχουμε $\mathbf{E}[I^\lambda(X)] = \mathbf{E}[I_{x_1}] = 1$;

β) Να δειχθεί ότι για το μέγιστο τίμημα G^λ που προτίθεται να πληρώσει το άτομο για να αγοράσει την ασφάλιση $I^\lambda(X)$ του ερωτήματος α) ισχύει $G^\lambda \leq 2$.

γ) Να υπολογιστεί το G^λ.

Λύση

α)

$$1 = \mathbf{E}(\lambda X) = \lambda \mathbf{E}(X) = \lambda 2 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}.$$

Προφανώς $x_1 \in (0,4)$, και τότε

$$1 = \mathbf{E}[(X - x_1)^+] = \frac{1}{4}\int_0^{4-x_1} y dy = \frac{(4-x_1)^2}{8} \Rightarrow 4 - x_1 = \pm\sqrt{8} \overset{x_1 \leq 4}{\Rightarrow} x_1 = 4 - 2\sqrt{2}.$$

β) Το $G = G^\lambda$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$\mathbf{E}\{u(w - X)\} = \mathbf{E}\{u(w - G - (1-\lambda)X)\} = \mathbf{E}\Big\{u\Big(w - G - \frac{X}{2}\Big)\Big\}. \tag{5.7}$$

Αν $G > 2$, τότε επειδή $X/2 < 2$, θα ισχύει $w - G - \frac{X}{2} < w - X$, και επειδή η u είναι γνησίως αύξουσα, δεν μπορεί να ισχύει η πιο πάνω ισότητα.

γ) Υπολογίζουμε τις μέσες ωφελιμότητες στην ισότητα (5.7).

$$\mathbf{E}\{u(w - X)\} = \frac{1}{4}\int_0^4 u(5-x)dx = \frac{1}{4}\int_0^4 (5-x)^2 dx = \frac{1}{4}\int_1^5 y^2 dy = \frac{1}{4}\frac{125-1}{3} = \frac{31}{3}.$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\Big\{u\Big(w - G - \frac{x}{2}\Big)\Big\} &= \mathbf{E}\Big\{u\Big(5 - G - \frac{x}{2}\Big)\Big\} = \frac{1}{4}\int_0^4 u(5 - G - \frac{x}{2})dx = \frac{1}{4}\int_0^4 \Big(5 - G - \frac{x}{2}\Big)^2 dx \\ &= \frac{1}{4}\int_{3-G}^{5-G} y^2 dy = \frac{1}{6}\left((5-G)^3 - (3-G)^3\right).\end{aligned}$$

Προκύπτει έτσι μια εξίσωση δεύτερου βαθμού με λύσεις $G = 4 \pm \sqrt{10}$. Επειδή όμως από το ερώτημα (β) πρέπει $G \leq 2$, δεκτή είναι μόνο η $G = 4 - \sqrt{10}$ ■

Άσκηση. Δίνεται χαρτοφυλάκιο n ανεξάρτητων και ισόνομων κινδύνων ώστε ο καθένας να έχει μέση τιμή $\alpha > 0$, διασπορά α^2, και πραγματοποιείται (ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους) με πιθανότητα $q = 1/2$. Έστω S το σύνολο των ζημιών. Πληρώνουμε για την πλήρη ασφάλιση του χαρτοφυλακίου το ποσό $(11/10)\mathbf{E}(S)$.

α) Να βρεθεί η μέση τιμή και η διασπορά του S

β) Μας δίνεται ότι η πιθανότητα το ασφάλιστρο να μην επαρκέσει είναι μικρότερη από 0.01. Να δειχθεί ότι $n \geq 1629$.

Λύση

α) $\mathbf{E}(S) = \sum_{i=1}^n q_i \mu_i = nq\mu = n\alpha/2$ και

$$\mathrm{Var}(S) = \sum_{i=1}^n q_i \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n q_i(1-q_i)\mu_i^2 = nq\sigma^2 + nq(1-q)\mu^2 = \frac{n\sigma^2}{2} + \frac{n}{2}\cdot\frac{1}{2}\mu^2 = \frac{3n\alpha^2}{4}.$$

β) Δίνεται ότι

$$\mathbf{P}\left(S > (1+\theta)\mathbf{E}(S)\right) < \frac{1}{100}$$

με $\theta = 1/10$. Όμως με βάση το κεντρικό οριακό θεώρημα έχουμε

$$\mathbf{P}(S > (1+\theta)S) = \mathbf{P}\left(\frac{S - \mathbf{E}(S)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S)}} > \theta\frac{\mathbf{E}(S)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S)}}\right) \approx 1 - \Phi\left(\theta\frac{\mathbf{E}(S)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S)}}\right).$$

Αυτή η πιθανότητα είναι < 0.01 αν και μόνο αν $\Phi\left(\theta\frac{\mathbf{E}(S)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S)}}\right) > 0.99 = \Phi(2.33)$. Επειδή η Φ είναι γνησίως αύξουσα, η ανισότητα ισοδυναμεί με

$$\theta\frac{\mathbf{E}(S)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S)}} > 2.33 \Leftrightarrow \frac{n\alpha/2}{\sqrt{3n\alpha^2/4}} > 23.3 \Leftrightarrow \sqrt{n} > \sqrt{3}\cdot 23.3 \Leftrightarrow n > 1628.67.$$

Επειδή ο n είναι ακέραιος, η τελευταία ανισότητα ικανοποιείται ακριβώς όταν $n > 1629$. ■

Παράρτημα Α΄

Στοιχεία πιθανοτήτων

Α΄.1 Τυχαίες μεταβλητές

Συνάρτηση κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής X λέμε τη συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ με

$$F(x) := \mathbf{P}(X \leq x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Ισχύει

$$\mathbf{P}(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = s(a) - s(b).$$

για κάθε $a < b$.

Διακριτή λέμε κάθε τυχαία μεταβλητή X για την οποία οι τιμές που είναι δυνατόν να πάρει αποτελούν αριθμήσιμο σύνολο, για παράδειγμα, το σύνολο των ακεραίων ή των φυσικών αριθμών. Μια διακριτή τυχαία μεταβλητή κωδικοποιείται από τη **συνάρτηση πιθανότητάς** της. Αυτή είναι η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(a) = \mathbf{P}(X = a)$$

για κάθε $a \in \mathbb{R}$. Η f είναι θετική μόνο για τα a που είναι δυνατές τιμές της X, για τα υπόλοιπα ισούται με 0.

Συνεχή λέμε κάθε τυχαία μεταβλητή X για την οποία υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ με $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$ ώστε

$$\mathbf{P}(X \in A) = \int_A f(x)\, dx$$

για κάθε $A \subset \mathbb{R}$. Η f λέγεται **πυκνότητα** της X. Εδώ η f **δεν** έχει την ερμηνεία $\mathbf{P}(X = a) = f(a)$. Μάλιστα ισχύει $\mathbf{P}(X = a) = 0$ για κάθε a.
Για μια τυχαία συνεχή μεταβλητή X, η συνάρτηση κατανομής της, F, είναι συνεχής. Για τις συνεχείς τυχαίες μεταβλητές που θα μας απασχολήσουν, η F είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο σε όλο το $\mathbb{R}$ εκτός από ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων. Και τότε η πυκνότητα υπολογίζεται ως

$$f(x) = F'(x)$$

στα σημεία παραγωγισιμότητας ενώ στα υπόλοιπα την ορίζουμε όπως μας βολεύει (π.χ., $= 0$). Επίσης, εφόσον για όλα τα a έχουμε $\mathbf{P}(X = a) = 0$, η ποσότητα $\mathbf{P}(a < X \leq b)$ παραμένει η ίδια αν αντικαταστήσουμε το $<$ με $\leq$ και το $\leq$ με $<$. Και προφανώς

$$\mathbf{P}(a < X < b) = \int_a^b f(t)\, dt$$

για κάθε $a < b$.

Α΄.2 Μέση τιμή

Στον επόμενο πίνακα, η γραμμή 2 είναι ο ορισμός της μέσης τιμής. Οι υπόλοιπες γραμμές είναι ιδιότητες.

$$
\begin{array}{llll}
 & X \text{ Διακριτή} & X \text{ Συνεχής} & \text{(Α΄.1)} \\
\mathbf{P}(X \in A) & \displaystyle\sum_{x\in A} f(x) & \displaystyle\int_A f(x)\,dx & \text{(Α΄.2)} \\
\mathbf{E}(X) & \displaystyle\sum_{x\in\mathbb{R}} x f(x) & \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx & \text{(Α΄.3)} \\
\mathbf{E}(X) & \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(X \geq k) & \displaystyle\int_0^{\infty} \mathbf{P}(X > x)\,dx & \text{(Α΄.4)} \\
\mathbf{E}\{h(X)\} & \displaystyle\sum_{x\in\mathbb{R}}^{\infty} h(x)f(x) & \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x)\,dx & \text{(Α΄.5)}
\end{array}
$$

Στη γραμμή 3 υποθέτουμε για διακριτή X ότι παίρνει τιμές στο $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots, \}$ ενώ για συνεχή X ότι παίρνει τιμές στο $[0, \infty)$. Τέτοιες τιμές παίρνουν οι τυχαίες μεταβλητές K_x, T_x αντίστοιχα. Μάλιστα, ο δεύτερος τύπος ισχύει για κάθε τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $[0, \infty)$ και εύκολα συνεπάγεται τον πρώτο.

Στις γραμμές 1, 2, 4, για διακριτή τυχαία μεταβλητή, το άθροισμα είναι πάνω σε αριθμήσιμο σύνολο. Δηλαδή είναι πάνω στα x που είναι δυνατές τιμές της X.

Στις γραμμές 1, 2, 4 δεν έχουμε τον περιορισμό $X \geq 0$ στις τιμές που παίρνει η X.

Η τυχαία μεταβλητή X κωδικοποιείται από την f με τον τρόπο που λέει η πρώτη γραμμή του πίνακα. Αλλά η f έχει άλλη σημασία και άλλο όνομα στην περίπτωση διακριτής και άλλο στην περίπτωση συνεχούς τυχαίας μεταβλητής.

Ειδική περίπτωση διακριτής τυχαίας μεταβλητής: Αν A είναι ένα τυχαίο γεγονός και θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$$X := \mathbf{1}_A := \begin{cases} 1 & \text{αν το } A \text{ συμβαίνει,} \\ 0 & \text{αν το } A \text{ δεν συμβαίνει,} \end{cases}$$

τότε η X είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή με δύο τιμές, τις 1 και 0. Τις παίρνει με πιθανότητες $\mathbf{P}(A), 1 - \mathbf{P}(A)$ αντίστοιχα. Άρα η μέση της τιμή είναι $1 \times \mathbf{P}(A) + 0 \times (1 - \mathbf{P}(A)) = \mathbf{P}(A)$. Δηλαδή

$$\mathbf{E}(\mathbf{1}_A) = \mathbf{P}(A).$$

Μέση τιμή σειράς.

$$\mathbf{E}\left(\sum_{k=0}^{\infty} X_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E}(X_k).$$

Ο ορισμός της διασποράς είναι

$$\mathrm{Var}(X) := \mathbf{E}\{(X - \mathbf{E}(X))^2\}.$$

Για $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ σταθερές και X τυχαία μεταβλητή, ισχύει

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= \mathbf{E}(X^2) - \{\mathbf{E}(X)\}^2, \\
\mathrm{Var}(\lambda x) &= \lambda^2 \,\mathrm{Var}(x), \\
\mathrm{Var}(X + \mu) &= \mathrm{Var}(x).
\end{aligned}
$$

Οι δυό τελευταίες σχέσεις γράφονται μαζί ως $\mathrm{Var}(\lambda X + \mu) = \lambda^2 \,\mathrm{Var}(X)$.

Α΄.3 Κατανομές

Πρακτικα, **κατανομή** είναι κάθε τρόπος να μοιραστεί μάζα 1 στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

Τυπικά, είναι κάθε συνάρτηση μ που σε κάθε $A \subset \mathbb{R}$ αντιστοιχεί έναν αριθμό $\mu(A) \in [0, 1]$ (το ποσό της μάζας που βρίσκεται μέσα στο A) και έχει τις εξής ιδιότητες:

1. $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ για κάθε ακολουθία ξένων ανα δύο υποσυνόλων του $\mathbb{R}$.
2. $\mu(\mathbb{R}) = 1$.

Η ιδιότητα 1 λέει ότι αν διασπάσουμε ένα σύνολο σε αριθμήσιμα κομμάτια ξένα ανα δύο, τότε η μάζα του συνόλου ισούται με το άθροισμα των μαζών των κομματιών. Συνέπεια της 1 είναι ότι $\mu(\emptyset) = 0$.

Παραδείγματα

(i) Δίνουμε μάζα 1/100 σε καθέναν από τους αριθμούς $1, 2, \ldots, 100$. Αυτό ορίζει μια κατανομή μ_1 για την οποία έχουμε

$$\mu_1(\{23\}) = \frac{1}{100}, \mu_1([20, 30]) = \frac{11}{100}, \mu_1((2, 3)) = 0, \mu_1([200, 250]) = 0.$$

(ii) Μοιράζουμε τη μάζα 1 ομοιόμορφα στο διάστημα (200, 250), το οποίο έχει μήκος 50. Αυτό ορίζει μια κατανομή μ_2 για την οποία έχουμε

$$\mu_2((210, 220)) = \frac{10}{50}, \mu_2(\{210\}) = 0.$$

(iii) (Διακριτές κατανομές) Γενίκευση της συνταγής του παραδείγματος (i) είναι η εξής. Έχουμε $C \subset \mathbb{R}$ ένα αριθμήσιμο σύνολο (π.χ., οι φυσικοί αριθμοί) και μια συνάρτηση $f : C \to [0, 1]$ με $\sum_{x \in C} f(x) = 1$. Η f δίνει μάζα $f(x)$ στον αριθμό x και έτσι ορίζει μια κατανομή μ_3 ως εξής. Για $A \subset \mathbb{R}$,

$$\mu_3(A) := \sum_{x \in A \cap C} f(x).$$

Δηλαδή η μάζα του A είναι το άθροισμα των μαζών των στοιχείων του C που περιέχονται στο A. Συνήθως επεκτείνουμε την f σε όλο το $\mathbb{R}$ θέτοντας $f(x) = 0$ για $x \in \mathbb{R} \setminus C$. Και τότε το πιο πάνω άθροισμα μπορούμε να το πάρουμε πάνω σε όλα τα $x \in A$. Απλώς τα $x \in A \setminus C$ δεν συνεισφέρουν κάτι στο άθροισμα.

(iv) (Συνεχείς κατανομές) Γενίκευση της συνταγής του παραδείγματος (ii) είναι η εξής. Έχουμε μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ με $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$. Η f ορίζει μια κατανομή μ_4 ως εξής. Για $A \subset \mathbb{R}$,

$$\mu_4(A) := \int_A f(x)\, dx.$$

Δηλαδή σε κάθε δεδομένο $A \subset \mathbb{R}$ δίνεται μάζα όσο είναι το εμβαδόν κάτω από το γράφημα της f στο σύνολο A. Από υπόθεση, το συνολικό εμβαδόν κάτω από το γράφημα της f σε όλο το $\mathbb{R}$ είναι 1.

(v) (Μεικτές κατανομές) Συνδυασμός των δύο πιο πάνω. Δηλαδή η μάζα 1 χωρίζεται σε δύο κομμάτια μάζας $a, 1 - a \in (0, 1)$. Το a μοιράζεται με διακριτό τρόπο στο $\mathbb{R}$ ενώ το $1 - a$ μοιράζεται με συνεχή τρόπο. Πιο συγκεκριμένα, υπάρχουν δυο συναρτήσεις $f_1 : \mathbb{R} \to [0, 1], f_2 : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ ώστε

- το $\{x : f_1(x) \neq 0\}$ είναι αριθμήσιμο,
- $\sum_{x \in \mathbb{R}} f_1(x) = a$,
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x)\, dx = 1 - a$.

Και η κατανομή ορίζεται ως

$$\mu_5(A) := \sum_{x \in A} f_1(x) + \int_A f_2(x)\, dx$$

για κάθε $A \subset \mathbb{R}$.

Α΄.3.1 Κατανομή τυχαίας μεταβλητής

Κάθε τυχαία μεταβλητή ορίζει μια κατανομή, την μ με

$$\mu(A) = \mathbf{P}(X \in A)$$

για κάθε $A \subset \mathbb{R}$. Αυτή η συνάρτηση μ λέγεται **κατανομή** της X.

Πώς περιγράφουμε την κατανομή μιας τυχαίας μεταβλητής X;

Αν η X είναι διακριτή, τότε δίνουμε τη συνάρτηση πιθανότητάς της, $f(x) := \mathbf{P}(X = x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αυτή η f είναι θετική μόνο σε ένα αριθμήσιμο σύνολο, και η κατανομή προκύπτει με τη συνταγή του παραδείγματος (iii) πιο πάνω.

Αν η X είναι συνεχής, τότε δίνουμε την πυκνότητά της, f, και η κατανομή προκύπτει με τη συνταγή του παραδείγματος (iv) πιο πάνω.

Αν η X είναι μεικτή, τότε δίνουμε τις συναρτήσεις f_1, f_2, όπως στο παράδειγμα (v) πιο πάνω.

Άσκηση. Έστω X μεικτή τυχαία μεταβλητή με $\mathbf{P}(X = k) = 1/10$ για $k = 1, 2, 3, 4$ και πυκνότητα του συνεχούς τμήματος $f_2(x) = 3e^{-5x}\mathbf{1}_{x>0}$.

(α) Πόση είναι η πιθανότητα $\mathbf{P}(X > 2)$;

(β) Ποια είναι η $\mathbf{E}(X^2)$;

Λύση

Παρατηρήστε ότι το διακριτό κομμάτι έχει μάζα 4/10. Καθένας από τους αριθμούς 1, 2, 3, 4 έχει πάρει 1/10. Περισσεύει μάζα 6/10. Τόσο είναι το ολοκλήρωμα της f_2. Η μάζα 6/10 μοιράζεται με συνεχή τρόπο στο $\mathbb{R}$ [μάλιστα στο $(0, \infty)$].

(α)
$$\mathbf{P}(X > 2) = \mathbf{P}(X = 3) + \mathbf{P}(X = 4) + \int_2^\infty 3e^{-5x}\, dx = \frac{2}{10} + \frac{3}{5}e^{-5\cdot 2}.$$

(β)
$$\mathbf{E}(X^2) = \sum_{k=1}^{4} k^2 \frac{1}{10} + \int_0^\infty x^2 3e^{-5x}\, dx = 3 + \frac{6}{125}.$$

Βιβλιογραφία

[1] Bower, N. L., Gerber, H. U., Hickman, J. C., Jones, D. A., Nesbitt, C. J. *Actuarial Mathematics*, second edition, (1997).

[2] Dickson, D. C., *Insurance risk and ruin.* Cambridge University Press, second edition, (2017).

[3] Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene, J., Denuit, M. *Modern actuarial risk theory. Using R.* Springer, (2008).

[4] Kreps, D. *Notes on the Theory of Choice.* Westview press, (1988).

[5] Κουτσόπουλος, Κ. *Αναλογιστικά Μαθηματικά. Μέρος Ι, Θεωρία Κινδύνων.* Εκδόσεις Συμμετρία (1999).

[6] Olivieri, A., Pitacco, E. *Introduction to insurance mathematics: technical and financial features of risk transfers.* Springer, second edition, (2015).