Γραμμικά Μοντέλα
Άσκηση

Διδάσκουσα: Λουκία Μελιγκοτσίδου
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Μαθηματικών

April 21, 2020

Άσκηση

Δίνεται το γραμμικό μοντέλο $Y_i = 1 + \beta X_i^2 + \varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, n$, $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$, σ^2 γνωστό.
(α) Να βρεθεί η εκτιμήτρια ελαχίστων τετραγώνων της παραμέτρου β και η κατανομή της.
(β) Να κατασκευασθεί 95% διάστημα εμπιστοσύνης για το $Y_0 = 1 + \beta X_0^2$ όταν X_0 γνωστή σταθερά, σ^2 γνωστό.
(γ) Πως θα ελέγχατε την

$$\begin{array}{ll} H_0: & \beta = \beta_0 \\ H_1: & \beta \neq \beta_0 \end{array}$$

Λύση
(α) Ελαχιστοποιούμε το

$$Q = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - 1 - \beta X_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2$$

$$\frac{dQ}{d\beta} = -2 \sum_{i=1}^{n} (Y_i - 1 - \beta X_i^2) X_i^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 Y_i - \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \beta \sum_{i=1}^{n} X_i^4 = 0 \Rightarrow \hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 Y_i - \sum_{i=1}^{n} X_i^2}{\sum_{i=1}^{n} X_i^4}$$

Επειδή $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ έχουμε $Y_i \sim N(1 + \beta X_i^2, \sigma^2)$

Άρα το $\hat{\beta}$ ακολουθεί κανονική κατανομή ως γραμμικός συνδυασμός κανονικών τ.μ. Έχουμε

$$E(\hat{\beta}) = E\Big[\frac{\sum X_i^2 Y_i - \sum X_i^2}{\sum X_i^4}\Big] = \frac{1}{\sum X_i^4}\Big[\sum X_i^2 E(Y_i) - \sum X_i^2\Big]$$

$$= \frac{1}{\sum X_i^4}\Big[\sum X_i^2 (1 + \beta X_i^2) - \sum X_i^2\Big] = \frac{1}{\sum X_i^4}\Big[\sum X_i^2 + \beta \sum X_i^4 - \sum X_i^2\Big] = \beta$$

$$Var(\hat{\beta}) = Var\Big[\frac{\sum X_i^2 Y_i - \sum X_i^2}{\sum X_i^4}\Big] = \frac{1}{(\sum X_i^4)^2}\Big[\sum X_i^4 Var(Y_i)\Big]$$

$$= \frac{1}{(\sum X_i^4)^2} \sigma^2 \sum X_i^4 = \frac{\sigma^2}{\sum X_i^4}$$

Άρα $\hat{\beta} \sim N(\beta, \frac{\sigma^2}{\sum X_i^4})$

(β) $\hat{Y}_0 = 1 + \hat{\beta} X_0^2$

Το $\hat{Y}_0$ ακολουθεί κανονική κατανομή ως γραμμικός μετασχηματισμός κανονικής τ.μ, με

$$E(\hat{Y}_0) = 1 + \beta X_0^2$$

$$Var(\hat{Y}_0) = X_0^4 Var(\hat{\beta}) = X_0^4 \frac{\sigma^2}{\sum X_i^4}$$

Άρα $\hat{Y}_0 \sim N(1 + \beta X_0^2, \frac{\sigma^2 X_0^4}{\sum X_i^4})$

$$\Rightarrow Z = \frac{\hat{Y}_0 - 1 - \beta X_0^2}{\sqrt{X_0^4 \sigma^2 / \sum X_i^4}} \sim N(0,1)$$

Δ.Ε. : $Pr(-Z_{a/2} < Z < Z_{a/2}) = 1 - \alpha$

$$\Rightarrow P\Big(-Z_{a/2} < \frac{\hat{Y}_0 - 1 - \beta X_0^2}{\sqrt{X_0^4 \sigma^2 / \sum X_i^4}} < Z_{a/2} \Big)$$

$$\Rightarrow \hat{Y}_0 - Z_{a/2} \sqrt{X_0^4 \sigma^2 / \sum X_i^4} < Y_0 = 1 + \beta X_0^2 < \hat{Y}_0 + Z_{a/2} \sqrt{X_0^4 \sigma^2 / \sum X_i^4}$$

(γ) Έχουμε δείξει ότι

$$\hat{\beta} \sim N(\beta, \frac{\sigma^2}{\sum X_i^4})$$

$$\frac{\hat{\beta} - \beta}{\sigma / \sqrt{\sum X_i^4}} \sim N(0,1)$$

Κάτω από την H_0 $\frac{\hat{\beta} - \beta_0}{\sigma / \sqrt{\sum X_i^4}} \sim N(0,1)$

Άρα απορρίπτουμαι την H_0 αν $\Big| \frac{\hat{\beta} - \beta_0}{\sigma / \sqrt{\sum X_i^4}} \Big| > Z_{a/2}$