Πρόβλημα 1

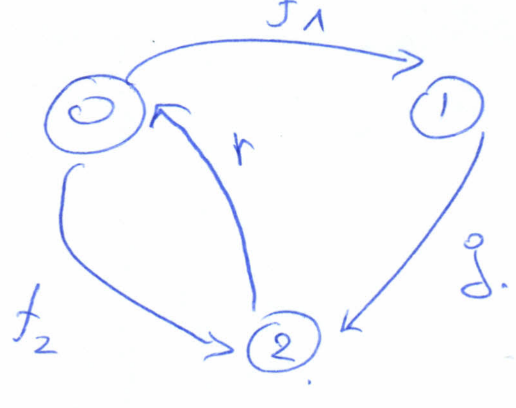
(α) Έστω $X(t)$ = κατάσταση του συστήματος $= \begin{cases} 0 & \text{κανονική λειτ.} \\ 1 & \text{μικρή βλάβη} \\ 2 & \text{καταστροφική βλάβη.} \end{cases}$

με χώρο καταστάσεων $S=\{0,1,2\}$

Επειδή οι χρόνοι μετάβασης μεταξύ των καταστάσεων είναι Exp τότε η σ.δ. $\{X(t), t\geq 0\}$ είναι μια Μαρκοβιανή Αλυσίδα συνεχούς χρόνου, με αντίστοιχους ρυθμούς μετάβασης

$q_{01}=f_1$, $q_{02}=f_2$ και διάγραμμα ρυθμών μετάβασης

$q_{12}=g$, $q_{20}=r$.



(β) Έστω π_j = ποσοστό του χρόνου που το μηχάνημα βρίσκεται στην κατάσταση j.

Η $(\pi_j : j\in S)$ είναι η στάσιμη κατανομή της $\{X(t); t\geq 0\}$ η οποία ικανοποιεί τις παρακάτω εξισώσεις ισορροπίας

$j=0: \quad f_1 \pi_0 = r \pi_2 \quad \Rightarrow \quad \pi_2 = \frac{f_1}{r} \pi_0$

$j=1: \quad g \pi_1 = f_1 \pi_0 \quad \Rightarrow \quad \pi_1 = \frac{f_1}{g} \pi_0$

$j=2: \quad r \pi_2 = f_2 \pi_0 + \cdot g \pi_1$

και την εξίσωση κανονικοποίησης $\quad \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$.

$$\Rightarrow \pi_0 \left(1 + \frac{f_1}{g} + \frac{f_1}{r}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \pi_0 \cdot \frac{gr + f_1(r+g)}{gr} = 1$$

$$\Rightarrow \pi_0 = \frac{gr}{gr + f_1(r+g)} = \frac{gr}{gr + f_1 r + f_1 g}$$

και $\pi_1 = \frac{f_1}{\cancel{g}} \cdot \frac{\cancel{g} r}{gr + f_1 r + f_1 g} = \frac{f_1 \cdot r}{gr + f_1 r + f_1 g}$

$\pi_2 = \frac{f_1}{r} \cdot \frac{gr}{gr + f_1 \cdot r + f_1 \cdot g} = \frac{f_1 \cdot g}{gr + f_1 r + f_1 \cdot g}$

Πρόβλημα 2

Η 1η επιλογή αντιστοιχεί σε ένα σύστημα M/M/2 με ρυθμούς αφίξεων $\lambda_n = \lambda$, $n=0,1,\dots$ και εξυπηρέτησης

$$\mu_n = \mu, \quad n = 1,2,\dots$$

Το σύστημα είναι ευσταθές αν. και μόνο αν. $\rho = \frac{\lambda}{2\mu} < 1$

$\iff \lambda < 2\mu$.

Για $\lambda < 2\mu$ ~~...~~ και σε στάσιμη κατάσταση έχουμε

$$P_0 = \sum_{n=0}^{1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^2}{2!} \cdot \frac{1}{1-\frac{\lambda}{2\mu}} \text{ : και}$$

αναμενόμενο αριθμό πελατών στο χώρο αναμονής: $L_q = P_0 \cdot \dfrac{(\lambda/\mu)^2 \cdot \frac{\lambda}{2\mu}}{2!\left(1-\frac{\lambda}{2\mu}\right)^2}$

άρα $P_0 = 1 + \dfrac{\lambda}{\mu} + \dfrac{\lambda^2}{\cancel{2}\mu^{\cancel{2}}} \cdot \dfrac{\cancel{2\mu}}{2\mu-\lambda} = \dfrac{\mu(2\mu-\lambda)+\lambda(2\mu-\lambda)+\lambda^2}{\mu(2\mu-\lambda)}$

$$= \frac{(\mu+\lambda)(2\mu-\lambda)+\lambda^2}{}$$

και $L_q = \dfrac{(\mu+\lambda)(2\mu-\lambda)+\lambda^2}{\mu(2\mu-\lambda)} \cdot \dfrac{\frac{\lambda^2}{\cancel{\mu^2}} \cdot \frac{\lambda}{\cancel{2\mu}} \quad \mu(2\mu-\lambda)}{\cancel{2}\ \frac{(2\mu-\lambda)^2}{\cancel{4\mu^2}}}$

άρα $L_q = \dfrac{\lambda^3[(\mu+\lambda)(2\mu-\lambda)+\lambda^2]}{\mu^2(2\mu-\lambda)^3}$

και από Little: $W_q = \dfrac{L_q}{\bar{\lambda}} = \dfrac{L_q}{\lambda} = \dfrac{\lambda^2[(\mu+\lambda)(2\mu-\lambda)+\lambda^2]}{\mu^2(2\mu-\lambda)^3}$

$$\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n \overset{\lambda_n=\lambda}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda P_n = \lambda$$

Άρα ο αναμενόμενος χρόνος παραμονής πελάτη στο σύστημα

είναι $W = W_q + \dfrac{1}{\mu} = \dfrac{\lambda^2[(\mu+\lambda)(2\mu-\lambda)+\lambda^2]}{\mu^2(2\mu-\lambda)^3} + \dfrac{1}{\mu}$

Η 2η επιλογή αντιστοιχεί σε μία ουρά M/M/1 με ρυθμούς αφίξεων $\lambda_n = \lambda$ και ρυθμούς εξυπηρέτησης $\mu_n = 2\mu$

άρα στη στάσιμη κατάσταση για $\rho = \dfrac{\lambda}{2\mu} < 1 \Leftrightarrow \lambda < 2\mu$ (συνθήκη ευστάθειας) έχω

$$W = \frac{1}{2\mu-\lambda} \quad \text{και} \quad W_q = \frac{\lambda}{2\mu(2\mu-\lambda)}.$$

β) Για $λ=8$ και $μ=6$

Ικανοποιείται η συνθήκη ευστάθειας και για τα δύο συστήματα που αντιστοιχούν στις επιλογές 1 και 2 αντίστοιχα και συγκρίνουμε τους παραπάνω αναμενόμενους χρόνους παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα

1η επιλογή: $$W_1 = \frac{8^2\left[(8+6)(12-8)+8^2\right]}{6^2(12-8)^3} + \frac{1}{6} = \frac{21}{6}$$

2η επιλογή: $$W_2 = \frac{1}{2\cdot 6-8} = \frac{1}{4}$$

άρα $W_1 > W_2$, και άρα η 2η επιλογή είναι καλύτερη.

γ) αρκεί να $\frac{W_1}{W_2} > 1 \quad \forall λ, μ$ με $λ < 2μ$.

Έχουμε ότι $$\frac{W_1}{W_2} = \frac{\dfrac{λ^2\left((μ+λ)(2μ-λ)+λ^2\right)+μ(2μ-λ)^3}{μ^2(2μ-λ)^3}}{\dfrac{1}{2μ-λ}}$$

$$\Rightarrow \frac{W_1}{W_2} = \frac{\cancel{μ}\left(λ^2(2μ+λ)+(2μ-λ)^3\right)}{μ^{\cancel{2}}(2μ-λ)^2} = \dots > 1.$$

Πρόβλημα 3

Έχουμε 3 κλάσεις περιστατικών με nonpreemptive priority που φθάνουν σύμφωνα με Poisson διαδικασία αντίστοιχων ρυθμών.

$$\lambda_3 = 4/hr. = 96/day \quad \text{τα συνήθη περιστατικά.}$$

$$\lambda_2 = 3/day \quad \text{τα σοβαρά περιστατικά.}$$

$$\lambda_1 = 1/day \quad \text{τα επείγοντα περιστατικά.}$$

(Τα επείγοντα περιστατικά έχουν την υψηλότερη προτεραιότητα).

και οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι εκθετικοί με ρυθμούς

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu = 72/day$$

αφού $E[S] = 20min = \frac{1}{72} day$.

Το συνολικό σύστημα με συνολικό ρυθμό αφίξεων

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 100 \quad \text{και} \quad \mu = 72/day$$

είναι $M/M/s$ όπου s ο αριθμός των γιατρών.

Άρα για να είναι ευσταθές απαιτείται $\lambda < s\mu \Rightarrow$

$$100 < 72s \Rightarrow s > \frac{100}{72} \Rightarrow s \geq 2$$

άρα ο ελάχιστος αριθμός γραμμών που απαιτείται για να είναι το σύστημα ευσταθές είναι $s=2$.

(β) Αν $s=2$ τότε, από τους τύπους του non preemptive priority βρίσκω τους αναμενόμενους χρόνους παραμονής στο σύστημα κάθε κατηγορίας πελατών.

$$A = 2! \, \frac{2\cdot 72 - 100}{\left(\frac{100}{72}\right)^2} \cdot \left\{ \sum_{j=0}^{1} \frac{(100/72)^j}{j!} \right\} + 2\cdot 72$$

~~[illegible]~~ :

$$\text{άρα } A = 2 \cdot \frac{44}{\frac{100^2}{72^2}} \cdot \left(1 + \frac{100}{72}\right) + 144$$

$$= \frac{2 \cdot 72^2 \cdot 44}{100^2} \cdot \frac{172}{\cancel{72}} + 144$$

$$= 108,97 + 144 = 252,97.$$

$$B_0 = 1, \quad \cancel{B_1} = \cancel{[illegible]}, \quad B_1 = 1 - \frac{1}{2\cdot 72} = \frac{143}{144}.$$

$$B_2 = 1 - \frac{1+3}{144} = \frac{140}{144}, \quad B_3 = 1 - \frac{100}{144} = \frac{44}{144}$$

$$W_1 = \frac{1}{A B_0 B_1} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{252{,}97 \cdot 1 \cdot \frac{143}{144}} + \frac{1}{72} = 0{,}013 \text{ day}$$

$$\simeq 20 \text{ min}$$

$$W_2 = \frac{1}{A B_1 B_2} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{252{,}97 \cdot \frac{143}{144} \cdot \frac{140}{144}} + \frac{1}{72} = 0{,}017 \text{ day}$$

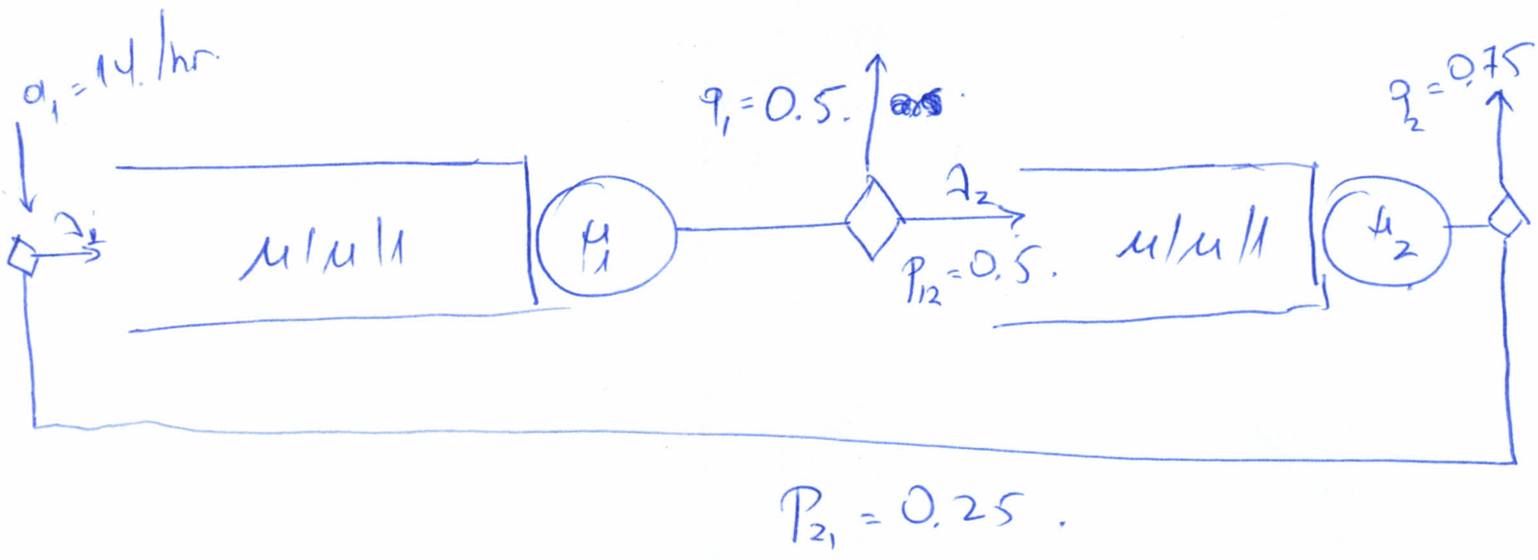
$$\simeq 26 \text{ min}$$

$$W_3 = \frac{1}{A B_2 B_3} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{252{,}97 \cdot \frac{140}{144} \cdot \frac{44}{144}} + \frac{1}{72} = 0{,}027 \text{ day}$$

$$\simeq 39 \text{ min}$$

Πρόβλημα 4

Το δίκτυο είναι ανοικτό Jackson μπορεί να παρασταθεί σύμφωνα με το παρακάτω διάγραμμα:



Το δίκτυο αποτελείται από 2 σταθμούς εξυπηρέτησης της μορφής M/M/1 με άπειρη χωρητικότητα και αντίστοιχους ρυθμούς εξυπηρέτησης $\mu_1 = 20/hr$

$\mu_2 = 12/hr$.

Επίσης εξωτερικές αφίξεις πραγματοποιούνται μόνο στο σταθμό 1 με ρυθμό $a_1 = 14/hr$ και οι πιθανότητες μετάβασης από τον σταθμό i στο σταθμό j είναι:

$P_{12} = 0.5$ με πιθανότητα αναχώρησης από δίκτυο

$q_1 = 0.5$.

και $P_{21} = 0.25$ με πιθανότητα αναχώρησης από δίκτυο

$q_2 = 0.75$.

(a) Βρίσκω τους προσφορικούς ρυθμούς αφίξεων σε κάθε σταθμό του δικτύου, έστω λ_1, λ_2.

Αυτοί ικανοποιούν το παρακάτω σύστημα εξισώσεων.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= a_1 + 0.25\lambda_2 \\ \lambda_2 &= 0.5\lambda_1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \lambda_1 &= 14 + 0.25\lambda_2 \\ \lambda_2 &= 0.5\lambda_1 \end{aligned} \Bigg\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 14 + \frac{1}{8}\lambda_1 \Rightarrow \frac{7}{8}\lambda_1 = 14 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{8}{7} \cdot 14 = 16$$

$$\text{και } \lambda_2 = \frac{1}{2} 16 = 8$$

- <u>1ος σταθμός</u> έχει $\lambda_1 = 16$ και $\mu_1 = 20$, άρα $\lambda_1 = 16 < 20 = \mu_1$ και άρα η ουρά είναι ευσταθής
- <u>2ος σταθμός</u> έχει $\lambda_2 = 8$ και $\mu_2 = 12$ άρα $\lambda_2 = 8 < 12 = \mu_2$ και άρα η ουρά είναι ευσταθής.

Στη στάσιμη διαδικασία οι αντίστοιχοι αναμενόμενοι συνολικοί αριθμοί πελατών σε κάθε σταθμό είναι L_1, L_2 και υπολογίζονται από τους τύπους της $M/M/1$.

<u>1ος σταθμός</u>: $M/M/1$, $\lambda_1 = 4$, $\mu_1 = 20 \Rightarrow L_1 = \dfrac{\lambda_1}{\mu_1 - \lambda_1} = \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4}$

<u>2ος σταθμός</u>: $M/M/1$, $\lambda_2 = 2$, $\mu_2 = 12 \Rightarrow L_2 = \dfrac{\lambda_2}{\mu_2 - \lambda_2} = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$.

άρα ο αναμενόμενος συνολικός αριθμός πελατών στο δίκτυο είναι $L = L_1 + L_2 = \dfrac{9}{20}$.

β) Στη περίπτωση αυτή έχουμε $p_{21} = 0$ και $q_2 = 1$.

Ζητάμε τον ελάχιστο ρυθμό εξυπηρέτησης μ_2 ώστε για τον αναμενόμενο συνολικό αριθμό πελατών σ' αυτή τη περίπτωση έστω $\tilde{L}$, να ισχύει $\tilde{L} < L = \dfrac{9}{20}$

Υπολογίζουμε εκ νέου τους πραγματικούς ρυθμούς αφίξεων.

Ο. λ_1, λ_2 ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$\lambda_1 = \alpha_1 = 14 < 20 = \mu_1$$

και $$\lambda_2 = 0.5 \cdot \lambda_1 = 7 < \mu_2 .$$

Θεωρούμε $\mu_2 \in (7, 12)$ ώστε ~~το~~ το σύστημα στο 2ο σταθμό να είναι ευσταθές και άρα:

$$\tilde{L}_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1 - \lambda_1} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$$

και $$\tilde{L}_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2 - \lambda_2} = \frac{7}{\mu_2 - 7}$$

$$\Rightarrow \tilde{L} = \tilde{L}_1 + \tilde{L}_2 = \frac{7}{3} + \frac{7}{\mu_2 - 7}$$

άρα $$\tilde{L} < L \Rightarrow \frac{7}{3} + \frac{7}{\mu_2 - 7} < 6$$

$$\Rightarrow \frac{7}{\mu_2 - 7} < \frac{11}{3}, \text{ και } \mu_2 \in (7, 12)$$

$\Rightarrow \mu_2 > 98/11$ δηλ.

$\Rightarrow 98/11 < \mu_2 < 12$