Δ.Π.Μ.Σ Μαθηματικά της Αγοράς και της Παραγωγής

Μαθηματικά Υποδείγματα Παραγωγής, Εφοδιαστικής και Υπηρεσιών ΙΙ - Ουρές Αναμονής ΜΑΘΗΜΑ 1ο

Γιάννης Δημητρακόπουλος, PhD in OR
Τμήμα Μαθηματικών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών


OFFERS
FOOD TO GO
FOOD TO GO
CRAISINS
FOREST FEAST
URBAN FRUIT

Τι είναι ουρά αναμονής;

Κάθε μορφής ουρά που διαμορφώνεται από άτομα (άνθρωποι ή αντικείμενα) για την παροχή κάποιας υπηρεσίας (εξυπηρέτησης) που παρατηρούμε ή συμμετέχουμε στην καθημερινότητά μας. Σχετίζεται με την «αναμονή ή καθυστέρηση» στην ολοκλήρωση μίας λειτουργίας ή στην παροχή υπηρεσίας.

Παραδείγματα

- η ουρά στη τράπεζα, στην εφορία, στα επείγοντα ενός νοσοκομείου,
- η ουρά των κλήσεων στην αναμονή ενός τηλ. κέντρου, των «πακέτων» στο σύστημα μετάδοσης/λήψης στο διαδίκτυο.
- η ουρά στη γραμμή παραγωγής για κάποια διαδικασία (κατασκευή, συναρμολόγηση, πακετάρισμα)

Συνήθως αυτή έχει αρνητικά φορτισμένη έννοια, καθώς συνδέεται με φαινόμενα αναμονής/καθυστέρησης και υπεισέρχεται **αβεβαιότητα**.

→

Ανάλυση με Στοχαστικά Υποδείγματα

Θεωρία Ουρών Αναμονής

Ανάπτυξη από Erlang (αρχές 20^{ου} αι.)

Μελέτη Συνωστισμού σε τηλ. δίκτυα

Περιεχόμενα Μαθήματος

1. Μοντέλα Συστημάτων Εξυπηρέτησης
- Τί είναι Σύστημα Εξυπηρέτησης;
- Πού υπεισέρχεται η αβεβαιότητα;
- Η έννοια της καθυστέρησης (αναμονής)
- Στοχαστική Μοντελοποίηση
- Βασικές έννοιες
- Βασικά Μέτρα Απόδοσης

2. Μαρκοβιανές Αλυσίδες Συνεχούς Χρόνου
- Ορισμός και Βασικές Έννοιες
- Ένα ισοδύναμο μοντέλο – Στασιμότητα
- Διαδικασίες Γέννησης - Θανάτου

3. Απλές Μαρκοβιανές Ουρές
- M/M/1
- M/M/s
- M/M/s/k (για s=1)
- Τροποποιήσεις της M/M/1
- Πεπερασμένος Πληθυσμός Πελατών

4. Μοντέλα με Γενικούς Χρόνους Εξυπηρέτησης
- Η M/G/1 Ουρά
- Τύπος Pollaczek- Khintchine
- Εφαρμογές

5. Μοντέλα με Προτεραιότητες
- Preemptive και non-Preemptive Μοντέλα

6. Δίκτυα Ουρών
- Ουρές σε Σειρά
- Ανοικτά Δίκτυα Jackson
- Equivalence property και product form – Εξισώσεις Κίνησης

Μοντέλα Συστημάτων Εξυπηρέτησης – Τι είναι;

Σύστημα Εξυπηρέτησης ή Ουρά Αναμονής (service or queueing system) καλείται κάθε σύστημα εισόδου/εξόδου διακριτών οντοτήτων (μονάδων, πελατών - customers) στο οποίο υπεισέρχεται τυχαιότητα.

Μέλη μιας ουράς:
- αντικείμενα (jobs σε συστήματα παραγωγής)
- άτομα (πελάτες/customers)

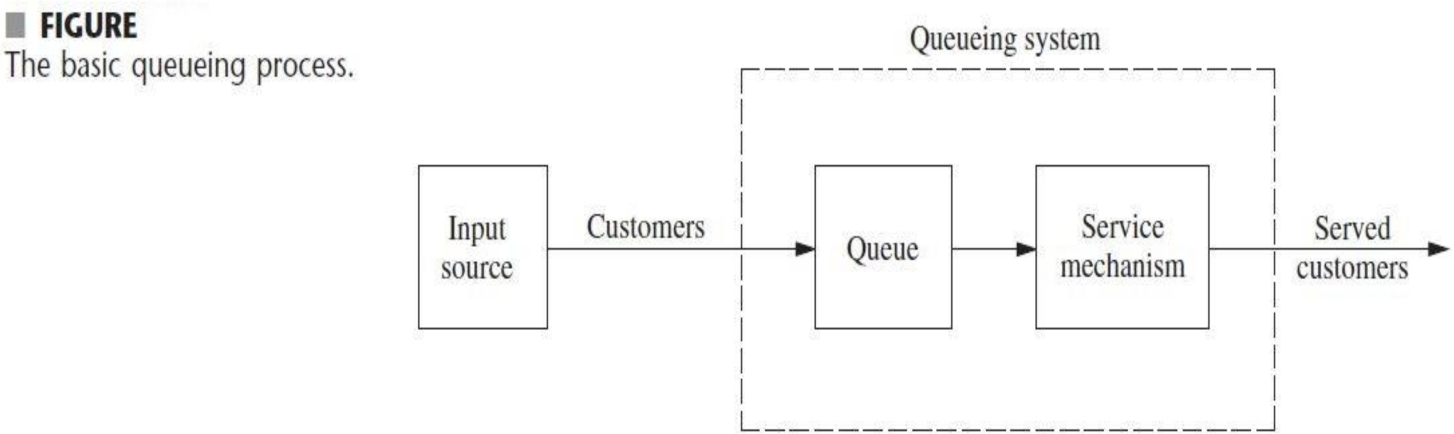
Διαμόρφωση Ουράς λόγω τυχαιότητας σε:
- αφίξεις (arrivals) πελατών στο σύστημα – γεγονότα εισόδου (αφίξεις νέων πελατών)
- απαιτήσεις προς εξυπηρέτηση (service requirements) – γεγονότα εξόδου (service completion or reneging).

Μαθηματική Μοντελοποίηση και Ανάλυση με Στοχαστικά Μοντέλα

↓

Θεωρία Ουρών Αναμονής: Μελέτη του συνωστισμού με στοχαστικά μοντέλα

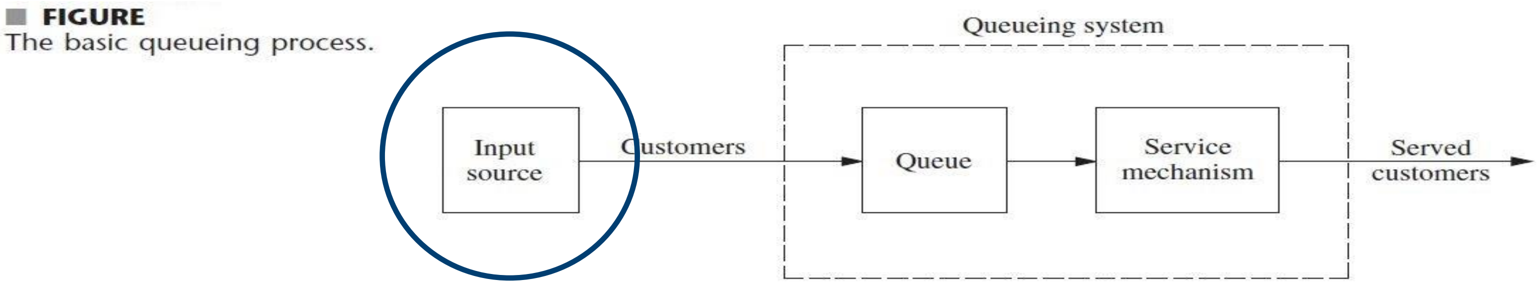
Μοντέλα Εξυπηρέτησης – Βασική Δομή



Βασική Εφαρμογή:

Το ΤΕΠ του Νοσ. Καλαμάτας παρέχει άμεση περίθαλψη σε ασθενείς που μεταφέρονται είτε ιδιωτικά είτε με ασθενοφόρο. Η τρέχουσα πολιτική λειτουργίας απαιτεί να υπάρχει τουλάχιστον ένας γενικός γιατρός σε υπηρεσία κάθε στιγμή. Αύξηση των επισκέψεων, αυξάνει την αναμονή των ασθενών και η διοίκηση του Νοσοκομείου πρέπει να αποφασίσει αν θα βάλει 2^{o} γιατρό ή όχι.

Μοντέλα Εξυπηρέτησης – Είσοδος



Εξωτερικό περιβάλλον

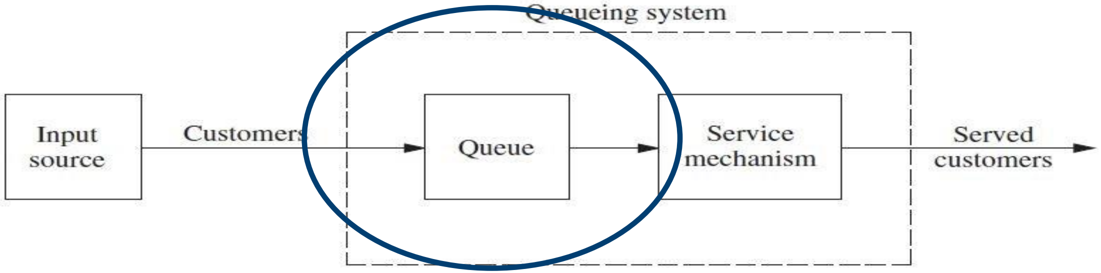
Πηγή Εισόδου – Δυνητικός Πληθυσμός Πελατών

- Αναφέρεται σε όλους τους δυνητικούς πελάτες που ενδιαφέρονται για την υπηρεσία
- **Μέγεθος**: πεπερασμένο ή άπειρο
- **Διαδικασία Εισόδου** = τυχαίος μηχανισμός που φθάνουν οι πελάτες στο σύστημα

  Συνήθως Διαδικασία Poisson κατάλληλο στοχαστικό μοντέλο για αφίξεις πελατών
  - Μοντελοποιεί τυχαία γεγονότα στο χρόνο με δεδομένο μέσο ρυθμό αφίξεων
  - Πλήθος αφίξεων: Διαδικασία **Poisson ρυθμού λ**.
  - Χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αφίξεων: **Εκθετική με παράμετρο λ.**
- Υποθέσεις για συμπεριφορά των πελατών κατά την είσοδο (π.χ. **balking**).

Μοντέλα Εξυπηρέτησης – Η ουρά

■ FIGURE
The basic queueing process.



Η ουρά ή Χώρος Αναμονής

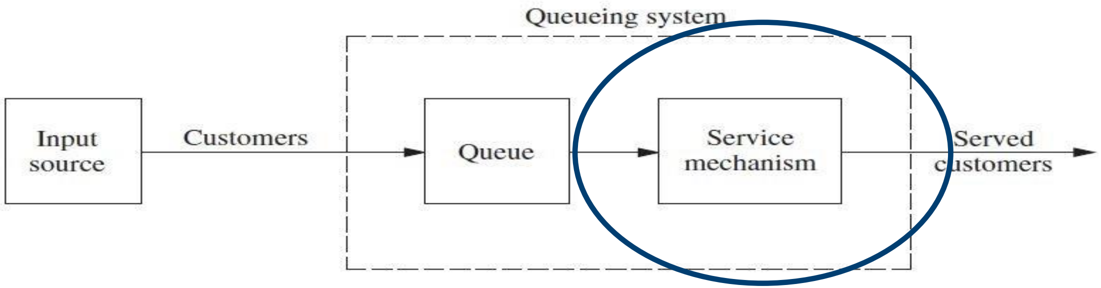
Σύστημα Εξυπηρέτησης – Η ουρά

- Αναφέρεται στο χώρο αναμονής των πελατών
- **Χωρητικότητα (buffer size)**: πεπερασμένη ή άπειρη
- **Πειθαρχία ουράς** (queue discipline)

  Κανόνας επιλογής ενός πελάτη από το χώρο αναμονής (ουρά) προς εξυπηρέτηση (π.χ. **FCFS/FIFO**, **LCFS/LIFO**, **random order** ή **με προτεραιότητες** (**preemptive/non-preemptive priority queues**).

Μοντέλα Εξυπηρέτησης – Η εξυπηρέτηση

■ FIGURE
The basic queueing process.

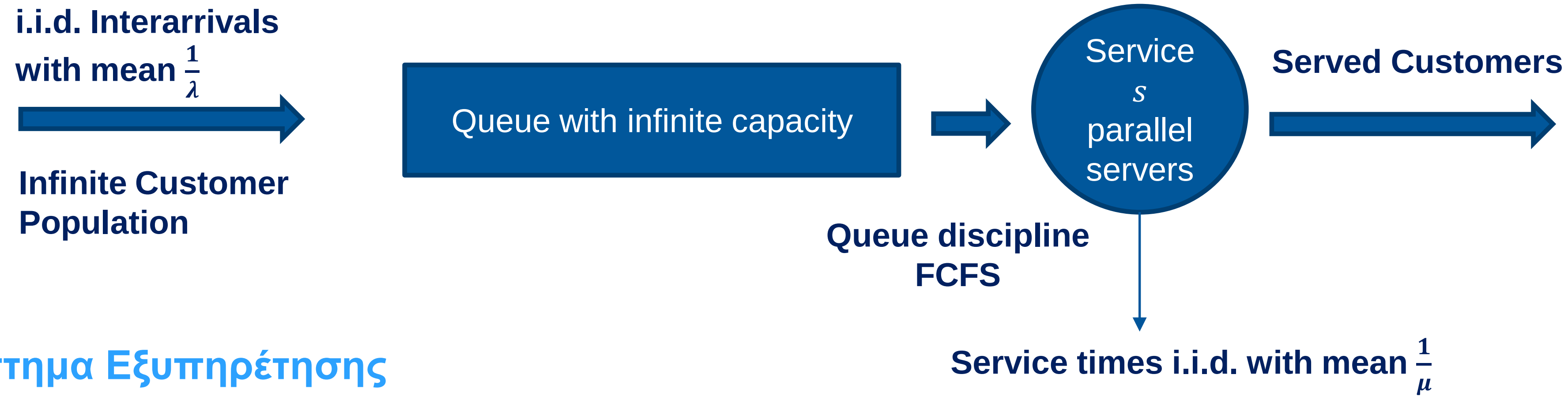


Η εξυπηρέτηση - Μηχανισμός

Σύστημα Εξυπηρέτησης – Χώρος και Μηχανισμός Εξυπηρέτησης

- Υπάρχουν ένας ή περισσότεροι σταθμοί εξυπηρέτησης σε **παράλληλη ή σειριακή διάταξη**.
- Σε κάθε σταθμό υπάρχουν ένας ή περισσότεροι **υπηρέτες** (**servers**) που εργάζονται ταυτόχρονα όταν είναι κατειλημμένοι από πελάτες (παράλληλοι υπηρέτες).
- Τυχαίος μηχανισμός εξυπηρέτησης = Κατανομή των διαδοχικών χρόνων εξυπηρέτησης.
- Χρόνος εξυπηρέτησης είναι ο χρόνος ολοκλήρωσης **μίας εξυπηρέτησης από έναν απασχολημένο υπηρέτη**.

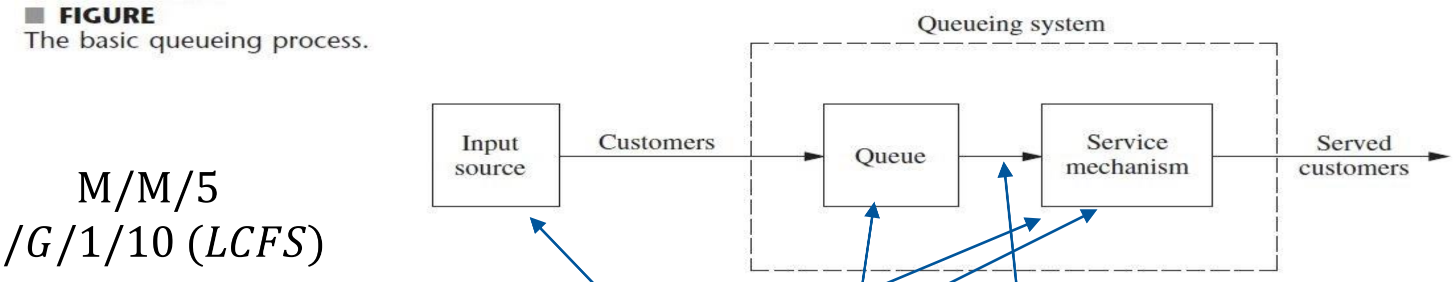
Μοντέλα Εξυπηρέτησης – Τυπικό Μοντέλο



Σύστημα Εξυπηρέτησης

- Άπειρο πλήθος δυνητικών πελατών – Αφίξεις με ανεξ.+ισον. ενδιαμ. χρόνους με σταθερό μέσο (ρυθμού λ πελ. / χρον. μον.)
- Σύστημα με μία ουρά άπειρης χωρητικότητας, έναν σταθμό εξυπηρέτησης με s παράλληλους υπηρέτες, που εξυπηρετούν σε ανεξ.+ ισον. χρόνους με μέσο $1/\mu$
- Πειθαρχία ουράς FCFS δηλαδή οι πελάτες εξυπηρετούνται με τη σειρά που εισέρχονται.

Μοντέλα Εξυπηρέτησης – Ονοματολογία Kendall



M/M/5

$D/G/1/10\ (LCFS)$

A/B/s/k (queue disc)

A **Κατανομή διαδικασίας αφίξεων** B **Κατανομή διαδικασίας εξυπηρετήσεων**	s = **πλήθος παράλληλων υπηρετών** k =**χωρητικότητα συστήματος (in queue +**s**)**
•M = Εκθετικοί Χρόνοι ⟹ Διαδ. Poisson •D = Σταθεροί Χρονοι •E_k = Erlang k ισοδύναμο της $Gamma(k, \mu)$ Άθροισμα k ανεξάρτητων $Exp(\mu)$ •G = Γενικοί Χρόνοι με σταθερό μέσο $b = \frac{1}{\mu}$	**queue discipline** •Η FCFS δεν αναφέρεται •LCFS •SIRO (Service in Random Order) •FCFS/ P-R (FCFS Preemptive – Resume

Μοντέλα Εξυπηρέτησης – Ορολογία, Συμβολισμοί

Κατάσταση συστήματος (system state)

Το πλήθος πελατών στο σύστημα εξυπηρέτησης

Στοχαστική Διαδικασία

$\mathrm{N(t)} =$ το πλήθος των πελατών **στο σύστημα εξυπηρέτησης** κατά τη χρονική στιγμή t.

Μεταβατική Κατανομή

$$P_n(t) = P(N(t) = n)$$

Μήκος Ουράς (queue length)

Το πλήθος πελατών στο χώρο αναμονής

Στοχαστική Διαδικασία

$\mathrm{N_q(t)} =$ το πλήθος των πελατών **στο χώρο αναμονής** κατά τη χρονική στιγμή t.

Μοντέλα Εξυπηρέτησης – Ορολογία, Συμβολισμοί

- λ_n (πελάτες/χρονική μονάδα) = Μέσος ρυθμός **αφίξεων** (**arrival rate**) όταν στο σύστημα υπάρχουν n πελάτες.
- μ_n (πελάτες/χρονική μονάδα) = Μέσος ρυθμός **εξυπηρέτησης** (**service rate**) όταν στο σύστημα υπάρχουν n πελάτες.
- Αν τα μεγέθη είναι σταθερά (ανεξάρτητα του n), δηλ. $\lambda_n = \lambda, \mu_n = \mu$ αντίστοιχα, τότε

$$\frac{1}{\lambda} = \text{αναμενόμενος χρόνος μεταξύ διαδοχικών αφίξεων}$$

$$\frac{1}{\mu} = \begin{array}{c}\text{αναμενόμενος χρόνος μεταξύ διαδοχικών εξυπηρετήσεων} \\ \text{από απασχολημένο υπηρέτη}\end{array}$$

Μοντέλα Εξυπηρέτησης – Ρυθμός Συνωστισμού

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu}$$

$\lambda = arrival\ rate$ – μέσο πλήθος αφίξεων στη μον. χρόνου
$\mu = service\ rate$ – μέσο πλήθος εξυπηρετήσεων στη μον. Χρόνου
$s = number\ of\ parallel\ servers$

- Είναι το ποσοστό του χρόνου κατά το οποίο το σύστημα είναι απασχολημένο.
- Είναι το μέσο ποσό εργασίας το οποίο μπορεί να διεκπεραιώσει το σύστημα.

Σημαντικό!!! Όταν έχουμε **άπειρη** χωρητικότητα, τότε τίθεται ζήτημα αν το σύστημα είναι **ευσταθές**.

Το σύστημα εξυπηρέτησης **ευσταθές** (ή ισοδύναμα η ουρά **δεν απειρίζεται**) αν και μόνο αν

$$\rho < 1 \Leftrightarrow \lambda < s\mu.$$

Αντιθέτως, αν

$$\rho \geq 1 \Leftrightarrow \lambda \geq s\mu,$$

τότε το Σύστημα Εξυπηρέτησης **δεν είναι ευσταθές** και η ουρά **μακροπρόθεσμα απειρίζεται**.

Αν η χωρητικότητα είναι πεπερασμένη, τότε το σύστημα είναι **πάντοτε** ευσταθές (**για κάθε** λ, μ)

Μοντέλα Εξυπηρέτησης – Στασιμότητα

Υποθέτουμε ότι το σύστημα έχει λειτουργήσει για απεριόριστο χρονικό διάστημα
Βρίσκεται **σε στατιστική ισορροπία ή στασιμότητα (steady-state)**.

Στην περίπτωση αυτή, η κατανομή του πλήθους των πελατών δεν εξαρτάται από την αρχική κατανομή (δηλαδή τις τιμές $P(N(0) = n)$) ή το χρονικό διάστημα t.

Τότε λέμε ότι έχουμε την **στάσιμη ή οριακή κατανομή του πλήθους πελατών στο σύστημα**.

$$\pi_n = P(N = n), n \in \{0,1,2, \dots\},$$

όπου N είναι η **οριακή** τυχαία μεταβλητή του πλήθους των πελατών στο Σύστημα Εξυπηρέτησης **σε κατάσταση στασιμότητας** (**steady-state probabilities**).

Η π_n = **το ποσοστό του χρόνου** που το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση n
= **το ποσοστό του χρόνου που** υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα.

Μοντέλα Εξυπηρέτησης – Μέτρα Απόδοσης

Υποθέτουμε ότι το Σύστημα Εξυπηρέτησης είναι **ευσταθές** και βρίσκεται **σε κατάσταση στασιμότητας, δηλ.** $\boldsymbol{\rho < 1}$**.**
Άρα υπάρχει γνήσια στάσιμη (οριακή) κατανομή $\boldsymbol{\pi_n, n} \in \boldsymbol{N}$, του πλήθους πελατών.

Συνολικό Σύστημα:

Μέσο πλήθος πελατών στο Σύστημα:

$$L = E(N) = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n \, .$$

Μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο Σύστημα: $W = E(\boldsymbol{\mathcal{W}})$.

Η $\boldsymbol{\mathcal{W}}$ (**οριακή** $\boldsymbol{t} \to \infty$**)** τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το χρόνο παραμονής (από τη στιγμή εισόδου στην ουρά ως τη στιγμή της αναχώρησης από το σύστημα) ενός πελάτη στο Σύστημα Εξυπηρέτησης.

Μοντέλα Εξυπηρέτησης – Μέτρα Απόδοσης

Υποθέτουμε ότι το Σύστημα Εξυπηρέτησης είναι **ευσταθές** και βρίσκεται **σε κατάσταση στασιμότητας, δηλ.** $\boldsymbol{\rho} < 1$**.**
Άρα υπάρχει γνήσια στάσιμη (οριακή) κατανομή $\boldsymbol{\pi_n}, \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N}$, του πλήθους πελατών.

<u>**Χώρος Αναμονής**</u>:

Μέσο πλήθος πελατών στο Χώρο Αναμονής (ουρά):

$$L_q = E(N_q) = \sum_{n=s}^{\infty} (n-s)\pi_n \,,$$

όπου N_q είναι η **οριακή** τυχαία μεταβλητή του πλήθους των πελατών στο Χώρο Αναμονής.

Μέσος χρόνος αναμονής ενός πελάτη (ουρά): $W_q = E(\boldsymbol{\mathcal{W}_q})$.

Η $\boldsymbol{\mathcal{W}_q}$ (**οριακή** $\boldsymbol{t} \to \infty$**)** τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το χρόνο αναμονής (από τη στιγμή εισόδου του πελάτη στην ουρά ως τη στιγμή που θα μπει στην εξυπηρέτηση).

Μοντέλα Εξυπηρέτησης – Μέτρα Απόδοσης

Υποθέτουμε ότι το Σύστημα Εξυπηρέτησης είναι **ευσταθές** και βρίσκεται **σε κατάσταση στασιμότητας, δηλ.** $\rho < 1$**.**
Άρα υπάρχει γνήσια στάσιμη (οριακή) κατανομή $\boldsymbol{\pi_n, n} \in \boldsymbol{N}$, του πλήθους πελατών.

Χώρος Εξυπηρέτησης:
Μέσο πλήθος πελατών στο Χώρο Εξυπηρέτησης (service):

$$L_s = E(N_s),$$

όπου N_s είναι η **οριακή** τυχαία μεταβλητή του πλήθους των πελατών στο Χώρο Εξυπηρέτησης.

Μέσος χρόνος εξυπηρέτησης ενός πελάτη (service):

$$W_s = \mathbf{E}(\boldsymbol{W_s}) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\mu}}.$$

Μοντέλα Εξυπηρέτησης – Μέτρα Απόδοσης

Υποθέτουμε ότι το Σύστημα Εξυπηρέτησης είναι **ευσταθές** και βρίσκεται **σε κατάσταση στασιμότητας, δηλ.** $\rho < 1$**.**

Άρα υπάρχει γνήσια στάσιμη (οριακή) κατανομή $\boldsymbol{\pi_n}, \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N}$, του πλήθους πελατών.

Βασικές Σχέσεις:

$$\begin{Bmatrix} N = N_q + N_s \\ \mathcal{W} = \mathcal{W}_q + \mathcal{W}_s \end{Bmatrix} \Longrightarrow \begin{Bmatrix} E(N) = E\left(N_q\right) + E(N_s) \\ E(\mathcal{W}) = E\left(\mathcal{W}_q\right) + E(\mathcal{W}_s) \end{Bmatrix} \Longrightarrow \begin{Bmatrix} L = L_q + L_s \\ W = W_q + \dfrac{1}{\mu} \end{Bmatrix}$$

Μοντέλα Εξυπηρέτησης – Νόμος του Little

Υποθέτουμε ότι το Σύστημα Εξυπηρέτησης είναι **ευσταθές** και βρίσκεται **σε κατάσταση στασιμότητας, δηλ.** $\boldsymbol{\rho < 1}$**.**

Άρα υπάρχει γνήσια στάσιμη (οριακή) κατανομή $\mathbf{N} \sim \boldsymbol{\pi_n}, \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N}$, του πλήθους πελατών.

Νόμος του Little:
Συνδέει τα L, L_q με τα W, W_q, αντίστοιχα. Εφαρμόζεται και ισχύει σε κάθε χώρο χωριστά.
Ασυμπτωτικά, το μέσο πλήθος πελατών = ρυθμό εισόδου επί τον μέσο χρόνο παραμονής.

Συνολικό Σύστημα	Χώρος Αναμονής	Χώρος Εξυπηρέτησης
$L = \bar{\lambda}\, W \Leftrightarrow W = \frac{L}{\bar{\lambda}}$	$L_q = \bar{\lambda} W_q \Leftrightarrow W_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}}$	$L_s = \bar{\lambda} W_s = \frac{\bar{\lambda}}{\mu}$

Συνέπεια: Η πιθανότητα κενού συστήματος είναι $\pi_0 = 1 - \rho$

Προσοχή!!!: Το $\bar{\lambda}$ αναφέρεται στον μακροπρόθεσμο μέσο ρυθμό εισόδου και είναι $\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \pi_n$. Παρατηρούμε ότι αν $\lambda_n = \lambda, \forall n$, τότε $\bar{\lambda} = \lambda$.

Μοντέλα Εξυπηρέτησης – Εκθετική Κατανομή

Χαρακτηριστικά:

- **Συνεχής τ.μ. (συνεχής** κατανομή).
- **Μοντελοποιεί** τους χρόνους μεταξύ διαδοχικών αφίξεων πελατών, όπως και διαδοχικούς χρόνους εξυπηρέτησης πελατών από έναν απασχολημένο υπηρέτη (π.χ. **M|M|s|k**).

Μία τυχαία μεταβλητή X **ακολουθεί την Εκθετική Κατανομή** με παράμετρο $\lambda > 0$ (συμβ. $X \sim Exp(\lambda)$) αν και μόνον αν η συνάρτηση πυκνότητας της X είναι η

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Σύνολο τιμών είναι το $(0, +\infty)$.

Αθροιστική συνάρτηση κατανομής της X είναι η συνάρτηση F_X με τύπο

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Μοντέλα Εξυπηρέτησης – Εκθετική Κατανομή

Χαρακτηριστικά:

Συνάρτηση επιβίωσης είναι η συνάρτηση S με τύπο

$$S(x) = P(X > x) = \begin{cases} e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 1, & x \leq 0. \end{cases}$$

Βασικές παράμετροι:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}, E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}$$

Ροπογεννήτρια:

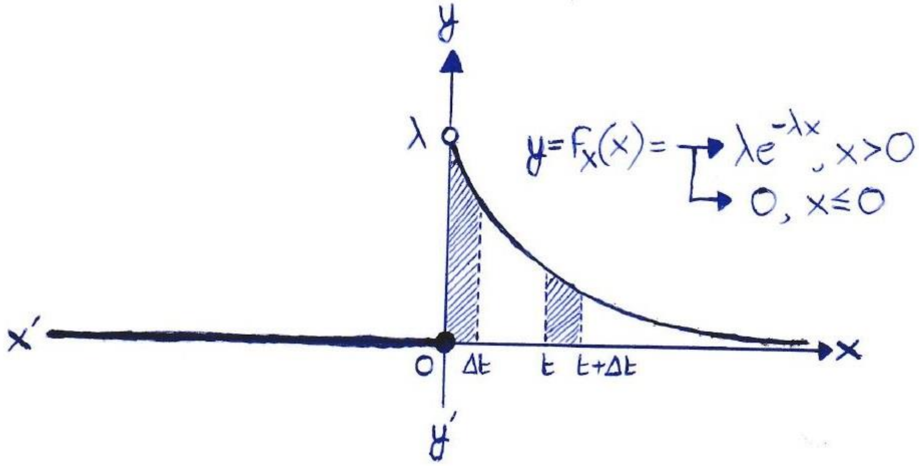
$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{\lambda - t} \displaystyle\int_0^{\infty} (\lambda - t) e^{-(\lambda - t)x} dx = \dfrac{\lambda}{\lambda - t} \cdot 1 = \dfrac{\lambda}{\lambda - t}, & t < \lambda, \\ \lambda \cdot (+\infty) = +\infty, & t \geq \lambda. \end{cases}$$

Μοντέλα Εξυπηρέτησης – Εκθετική Κατανομή

Ιδιότητες:

Στο $(0, +\infty)$ η συνάρτηση f_X είναι γνησίως φθίνουσα $\Leftrightarrow$

$$\forall t > 0: P(0 < X < \Delta t) \geq P(t < X < t + \Delta t)$$



Μοντέλα Εξυπηρέτησης – Εκθετική Κατανομή

Ιδιότητες:

Η Αμνήμονη Ιδιότητα $P(X > x + y|X > x) = P(X > y)$

Σε αφίξεις πελατών: Άν οι ενδιάμενοι χρόνοι μεταξύ διαδ. αφίξεων $X \sim Exp(\lambda)$, τότε ο χρόνος της επόμενης άφιξης δεν επηρεάζεται από τους χρόνους των προηγουμένων αφίξεων.

Σε εξυπηρετήσεις: Έστω ότι οι διαδοχικοί χρόνοι εξυπηρετήσεων $X \sim Exp(\lambda)$, τότε εάν κοιτάξω μία αυθαίρετη χρονική στιγμή τον πελάτη που βρίσκεται στο service, **ο υπολειπόμενος χρόνος** που θα απαιτηθεί μέχρι την ολοκλήρωση της εξυπηρέτησής του συνεχίζει να είναι $Exp(\lambda)$, και άρα **ο υπολειπόμενος χρόνος** αυτός δεν εξαρτάται απ’ την εργασία που έχει ήδη εκτελεσθεί μέχρι και τη χρονική εκείνη στιγμή.

Την Αμνήμονη Ιδιότητα την έχει επίσης η (**διακριτή**) **Γεωμετρική Κατανομή**.

Μοντέλα Εξυπηρέτησης – Εκθετική Κατανομή

Ιδιότητες:

Έστω **ανεξάρτητες** τ.μ. $X_i \sim Exp(\lambda_i), i \in \{1,2,\dots,s\}$, (πλήθους $s \in \mathbb{N}, s > 0$, με $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n > 0$)
Ορίζουμε την

$$U = \min_{i \in \{1,2,\dots,s\}} X_i \text{ (ελάχιστος από εκθετικούς χρόνους)}$$

και αποδεικνύεται για την τ.μ. U ότι

$$U \sim Exp\left(\sum_{i=1}^{s} \lambda_i\right).$$

Επιπλέον, αν οι X_i είναι **ανεξάρτητες και ισόνομες** με $X_i \sim Exp(\lambda)$, τότε $U \sim Exp(\lambda s)$,

Μοντέλα Εξυπηρέτησης – Εκθετική Κατανομή

<u>Ιδιότητες</u>:

Επίσης, ισχύει για κάθε $j \in \{1,2,\ldots,n\}$:

$$P\big(\text{να λήξει πρώτος ο } X_j\big) = P\big(U = X_j\big) = \frac{\lambda_j}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}.$$

Η τελευταία σχέση μας λέει ότι:

όσο αυξάνεται κάποιος εκ των ρυθμών, τόσο πιθανότερο είναι να λήξει πρώτος ο αντίστοιχος χρόνος.

Αύξηση ρυθμού ισοδυναμεί με αύξηση «ταχύτητας».

Στις ουρές: Αν έχω s παράλληλους servers και οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι $Exp(\lambda)$, τότε η επόμενη ολοκλήρωση εξυπηρέτησης θα συμβεί στο χρόνο

$$\boldsymbol{U = \min_{i\in\{1,2,\ldots,s\}} X_i \sim Exp(\lambda s)}.$$

Το ίδιο ισχύει αν έχω s το πλήθος διαφορετικές κλάσεις πελατών και η διαδ. αφίξεων είναι $Poisson(\lambda)$, τότε η επόμενη άφιξη θα γίνει σε χρόνο $\boldsymbol{Exp(\lambda s)}$.

Μοντέλα Εξυπηρέτησης – Εκθετική Κατανομή

<u>Ιδιότητες</u>: Σύνδεση με την διαδικασία Poisson

Έστω $\{N(t): t \geq 0\}$ (**απαριθμήτρια**) διαδικασία Poisson με ρυθμό λ
$N(t)$ = πλήθος των γεγονότων στο χρονικό διάστημα $(0, t]$

Άρα για κάθε $t \geq 0$ ισχύει ότι

$$N(t) \sim Poisson(\lambda t) \Leftrightarrow P(N(t) = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, n \in \mathrm{N}_0$$

(ανάλογη του μήκους του διαστήματος) με **ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις.**

Επίσης,

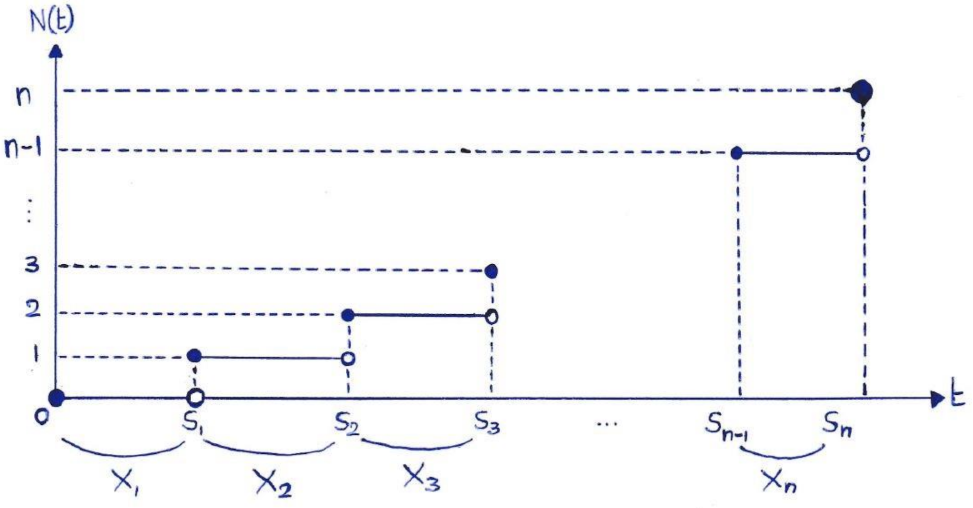
$$E\big(N(t)\big) = Var\big(N(t)\big) = \lambda t$$

Ισοδύναμα, αν X_i είναι οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών γεγονότων, τότε αυτοί είναι **ανεξάρτητοι και ισόνομοι** με $X_i \sim Exp(\lambda)$.

Μοντέλα Εξυπηρέτησης – Εκθετική Κατανομή

Ιδιότητες της διαδικασίας Poisson

Ισοδύναμα, αν X_i είναι οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών γεγονότων, τότε αυτοί είναι **ανεξάρτητοι και ισόνομοι** με $X_i \sim Exp(\lambda)$.

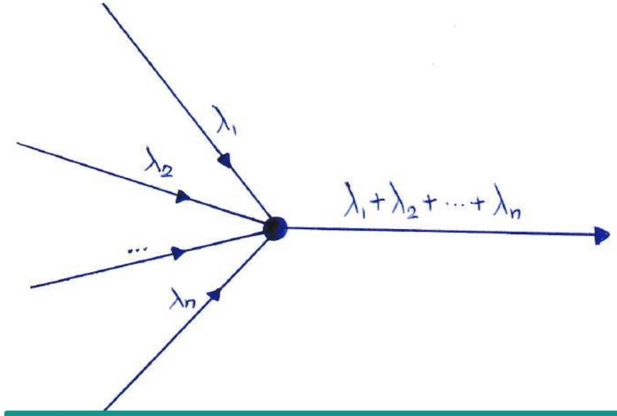


Τη διαδικασία $\{S_i : i \in \{1,2,\dots\}\}$ την καλούμε **σημειακή**.

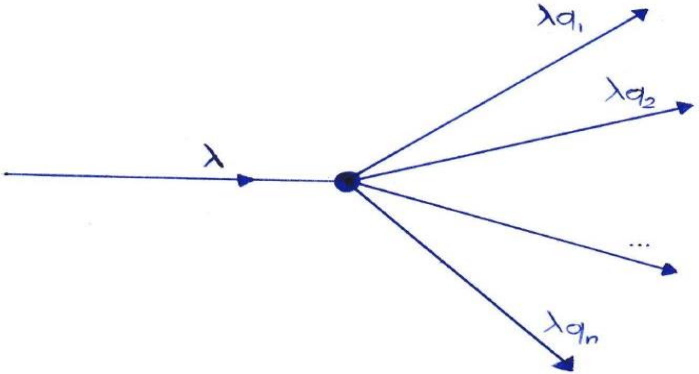
Μοντέλα Εξυπηρέτησης – Εκθετική Κατανομή

Ιδιότητες της διαδικασίας Poisson

<u>Μείξη:</u> Η μείξη διαδ. Poisson με ρυθμούς $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n > 0$ είναι επίσης διαδ. Poisson ρυθμού $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n > 0$.



<u>Διάσπαση:</u> Έστω q_i η πιθανότητα η εισερχόμενη ροή γεγονότων (διαδ. Poisson ρυθμού $\lambda > 0$) να ακολουθήσει τον κλάδο i. Τότε τα γεγονότα που αντιστοιχούν στο κλάδο i προκύπτουν από διαδ. Poisson ρυθμού $\lambda q_i > 0$.



Η εκθετική κατανομή δεν επηρεάζεται από τη μείξη ή τη διάσπαση της διαδ. Poisson

Μοντέλα Εξυπηρέτησης – Ενδεικτική Βιβλιογραφία

- **Hillier and Lieberman, "Introduction to Operations Research", 8th edition**
  Chapter 17 Queueing Theory, par. 1 – 4, p.p. 765-780.

- **Δ. Φακίνος, "Ουρές Αναμονής", Εκδόσεις Συμμετρία 2003**
  Κεφάλαιο 1, παρ. 1-2 σελ. 11-23, Κεφ. 2, παρ. 1-6, σελ. 99-117.

- **Α. Οικονόμου, "Θεωρία Ουρών Αναμονής", Πανεπιστημιακές Σημειώσεις, Τμήμα Μαθηματικών ΕΚΠΑ**
  Κεφάλαιο 1,2 και 3, σελ. 1-20.