Δ.Π.Μ.Σ Μαθηματικά της Αγοράς και της Παραγωγής

Μαθηματικά Υποδείγματα Παραγωγής, Εφοδιαστικής και Υπηρεσιών ΙΙ - Ουρές Αναμονής ΜΑΘΗΜΑ 2ο

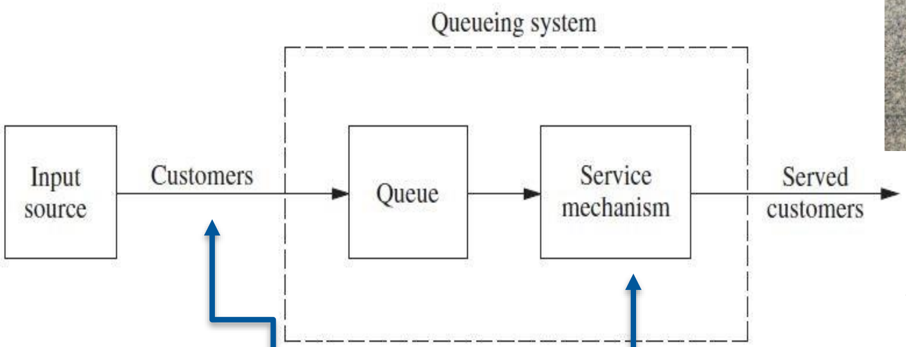
Γιάννης Δημητρακόπουλος, PhD in OR
Τμήμα Μαθηματικών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών


MALAYSIA
AIRPORTS

Ουρά Αναμονής

Σύστημα Εξυπηρέτησης ή Ουρά Αναμονής (queueing system) καλείται κάθε σύστημα εισόδου/εξόδου διακριτών οντοτήτων (μονάδων, πελατών - customers) στο οποίο υπεισέρχεται τυχαιότητα.

FIGURE
The basic queueing process.



Τυχαιότητα σε:

- αφίξεις πελατών στο σύστημα
- Απαιτήσεις - χρόνο ολοκλήρωσης εξυπηρέτησης

Μαθηματική Μοντελοποίηση και Ανάλυση με Στοχαστικά Μοντέλα

Θεωρία Ουρών Αναμονής: Μελέτη του συνωστισμού με στοχαστικά μοντέλα

Περιεχόμενα Μαθήματος

1. Μοντέλα Συστημάτων Εξυπηρέτησης

- Τί είναι Σύστημα Εξυπηρέτησης;
- Πού υπεισέρχεται η αβεβαιότητα;
- Η έννοια της καθυστέρησης (αναμονής)
- Στοχαστική Μοντελοποίηση
- Βασικές έννοιες
- Βασικά Μέτρα Απόδοσης

2. Μαρκοβιανές Αλυσίδες Συνεχούς Χρόνου

- Ορισμός και Βασικές Έννοιες
- Ένα ισοδύναμο μοντέλο – Στασιμότητα
- Διαδικασίες Γέννησης - Θανάτου

3. Απλές Μαρκοβιανές Ουρές

- M/M/1
- M/M/s
- M/M/s/k (για s=1)
- Τροποποιήσεις της M/M/1
- Πεπερασμένος Πληθυσμός Πελατών

4. Μοντέλα με Γενικούς Χρόνους Εξυπηρέτησης

- Η M/G/1 Ουρά
- Τύπος Pollaczek- Khintchine
- Εφαρμογές

5. Μοντέλα με Προτεραιότητες

- Preemptive και non-Preemptive Μοντέλα

6. Δίκτυα Ουρών

- Ουρές σε Σειρά
- Ανοικτά Δίκτυα Jackson
- Equivalence property και product form – Εξισώσεις Κίνησης

Στοχαστικές Διαδικασίες (Ανελίξεις) – Τί είναι;

Στοχαστική Διαδικασία ή Στοχαστική Ανέλιξη καλείται κάθε οικογένεια τυχαίων μεταβλητών με συμβολισμό $\{X(t): t \in T\}$, όπου το t καλείται παράμετρος και το σύνολο T παραμετρικός χώρος.

Παραμετρικός Χώρος Τ:

- Αν Τ αριθμήσιμο ⇒ η $\{X_n: n \in \mathbb{N}_0\}$ καλείται στοχαστική διαδικασία **διακριτού χρόνου**
- Αν Τ υπεραριθμήσιμο ⇒ η $\{X(t): t \geq 0\}$ καλείται στοχ. διαδικασία **συνεχούς χρόνου**

Χώρος Καταστάσεων S: Το σύνολο τιμών των τ.μ. που απαρτίζουν την σ.δ.

- Αν S αριθμήσιμο, τότε **σ.δ. διακριτού χώρου καταστάσεων**
- Αν S υπεραριθμήσιμο (συνεχές διάστημα τιμών), τότε **σ.δ. συνεχούς χώρου καταστάσεων**

T \ S	Αριθμήσιμο	Διάστημα
Αριθμήσιμο	σ.δ. διακριτού χρόνου με διακριτό χ.κ.	σ.δ. διακριτού χρόνου με συνεχή χ.κ.
Διάστημα	σ.δ. συνεχούς χρόνου με διακριτό χ.κ.	σ.δ. συνεχούς χρόνου με συνεχή χ.κ.

Μαρκοβιανές Αλυσίδες Συνεχούς Χρόνου – Τί είναι;

Μαρκοβιανή Ιδιότητα Είναι η ιδιότητα μίας διαδικασίας να μην εξαρτάται η μελλοντική της εξέλιξη από την παρελθούσα ιστορία της, παρά μόνον απ' την παρούσα της κατάσταση.

ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΕΣ ΑΛΥΣΙΔΕΣ

Ορισμός μίας Μ.Α.Σ.Χ.

Μια στοχαστική διαδικασία $\{X(t): t \geq 0\}$ **συνεχούς χρόνου** και **διακριτού χώρου καταστάσεων** S καλείται **Μαρκοβιανή Αλυσίδα Συνεχούς Χρόνου (ΜΑΣΧ)** αν και μόνον αν ικανοποιεί τη **Μαρκοβιανή Ιδιότητα**,

δηλαδή αν και μόνο άν για κάθε $s, t > 0$ και $i, j \in S$ ισχύει ότι

$$P(\underbrace{X(s+t) = j}_{\text{ΜΕΛΛΟΝ}} | \underbrace{X(s) = i, X(u), 0 \leq u < s}_{\text{ΠΑΡΕΛΘΟΝΤΙΚΗ ΙΣΤΟΡΙΑ}}) = P(\underbrace{X(s+t) = j | X(s) = i}_{\text{ΜΕΛΛΟΝ | ΠΑΡΟΝ}})$$

Μαρκοβιανές Αλυσίδες Διακριτού Χρόνου – Τί είναι;

Μαρκοβιανή Ιδιότητα Είναι η ιδιότητα μίας διαδικασίας να μην εξαρτάται η μελλοντική της εξέλιξη από την παρελθούσα ιστορία της, παρά μόνον απ' την παρούσα της κατάσταση.

ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΕΣ ΑΛΥΣΙΔΕΣ

Ορισμός μίας Μ.Α.Δ.Χ. (υπενθύμιση)

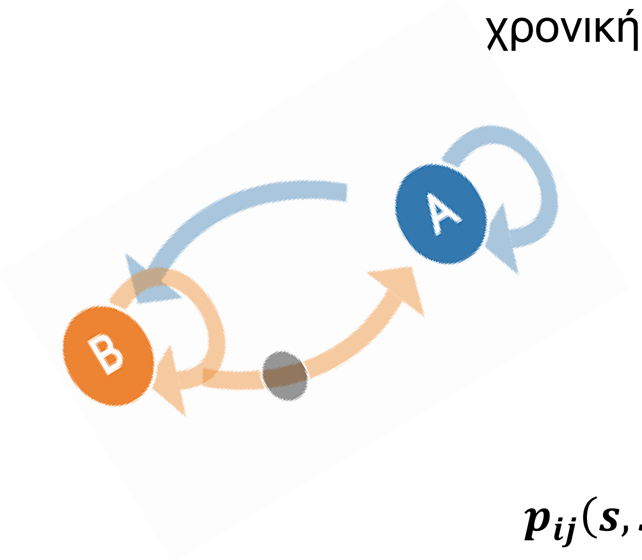
Μια στοχαστική διαδικασία $\{X_n : n \in N\}$ **διακριτού χρόνου** και **διακριτού χώρου καταστάσεων** S καλείται **Μαρκοβιανή Αλυσίδα Διακριτού Χρόνου (ΜΑΔΧ)** αν και μόνον αν ικανοποιεί τη **Μαρκοβιανή Ιδιότητα**,

δηλαδή εάν και μόνον εάν για κάθε $n \in \mathbf{N}$ και $i, j \in S$ ισχύει ότι

$$P(\underbrace{X_{n+1} = j}_{\text{ΜΕΛΛΟΝ}} | \underbrace{X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = i}_{\text{ΠΑΡΕΛΘΟΝΤΙΚΗ ΙΣΤΟΡΙΑ}}) = P(\underbrace{X_{n+1} = j | X_n = i}_{\text{ΜΕΛΛΟΝ | ΠΑΡΟΝ}})$$

Μαρκοβιανές Αλυσίδες Συνεχούς Χρόνου – Βασικές Έννοιες

Πιθανότητες Μετάβασης από την i στην j σε χρόνο t αν τη χρονική στιγμή s η διαδικασία βρίσκεται στην i.



$$\boldsymbol{p_{ij}(s,s+t) = P(X(s+t) = j|X(s) = i)}$$

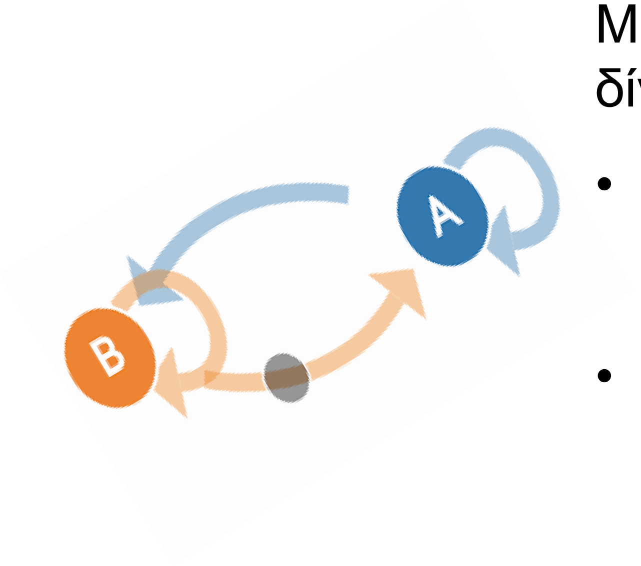
Χρονικά Ομογενής: Όταν η μετάβαση δεν εξαρτάται από την στιγμή s, αλλά από τη διάρκεια t

$$\boldsymbol{p_{ij}(s,s+t) = p_{ij}(0,t) \coloneqq p_{ij}(t) = P(X(t) = j|X(0) = i)}$$

Μηχανισμός

Μια τυχαία χρονική στιγμή παρατηρώ τη $\{X(t): t \geq 0\}$ και διαπιστώνω ότι αυτή βρίσκεται στην κατάσταση i. Στη συνέχεια αυτή θα μεταβεί στην κατάσταση j σε χρόνο t με πιθανότητα $p_{ij}(t)$.

Μαρκοβιανές Αλυσίδες Συνεχούς Χρόνου – Ορισμός



Μια ΜΑΣΧ είναι **καλώς ορισμένη** αν δίνεται:

- η αρχική της κατανομή

$$p_i(0) = P(X(0) = i), i \in S,$$

- ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης

$$\mathbb{P}(t) = \left(p_{ij}(t)\right)_{i,j \in S},$$

ο οποίος είναι **στοχαστικός πίνακας** $\begin{cases} p_{ij}(t) \geq 0 \\ \sum_{j \in S} p_{ij}(t) = 1, \forall i. \end{cases}$

Πιθανότητα Μονοπατιού:

$$P(X(0) = i_0, X(t_1) = i_1, X(t_2) = i_2, \dots, X(t_n) = i_n) = p_{i_0}(0) p_{i_0 i_1}(t_1) p_{i_1 i_2}(t_2 - t_1) \dots p_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1}).$$

Μαρκοβιανές Αλυσίδες Συνεχούς Χρόνου – Ισοδύναμος Ορισμός Ρυθμοί Μετάβασης – Χρόνος Παραμονής

Βασική τυχαία μεταβλητή

T_i ο χρόνος παραμονής στην κατάσταση $i \in S$

Και οι δύο ξεχνάνε το παρελθόν

Μηχανισμός στις ΜΑΣΧ $\{\mathbf{X(t)}\}$
Αν η διαδικασία μπει στην i τη στιγμή s, τότε αυτή θα παραμένει για χρόνο t, αν $\mathrm{X}(\tau) = i$ για $s \leq \tau \leq s + \mathrm{t}$.

Μαρκοβιανή Ιδιότητα - Αμνήμονη Ιδιότητα

$$P(T_i > t + s | T_i > s) = P(T_i > t)$$

Ποια Κατανομή ταιριάζει;

Η Εκθετική κατανομή

$P(T_i > t) = e^{-q_i t}$,
$\frac{1}{q_i}$ = ο μέσος χρόνος παραμονής

Μαρκοβιανές Αλυσίδες Συνεχούς Χρόνου – Ισοδύναμος Ορισμός Ρυθμοί Μετάβασης – Χρόνος Παραμονής

Και οι δύο ξεχνάνε το παρελθόν

Μαρκοβιανή Ιδιότητα ⟺ Αμνήμονη Ιδιότητα

Η Εκθετική κατανομή

Κατασκευή Κατασκευάζουμε μία ΜΑΔΧ $\{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ με:

- χρόνο παραμονής στην κατασταση $i \in S$

$$T_i \sim Exp(q_i)$$

q_i =ο ρυθμός εξόδου από την κατασταση $i \in S$

- στοχαστικό πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης $\mathbb{P} = (p_{ij})_{i,j \in S}, p_{ii} = 0$ και $\sum_{j \neq i} p_{ij} = 1$

- η κατάσταση που επισκέπτεται η διαδικασία μετά την i είναι ανεξάρτητη του χρόνου T_i

Μαρκοβιανές Αλυσίδες Συνεχούς Χρόνου – Ισοδύναμος Ορισμός
Ρυθμοί Μετάβασης – Χρόνος Παραμονής

Πώς συνδέονται; transition intensities

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{από την } i \text{ στη } j\text{:} & q_{ij} := \dfrac{d}{dt} p_{ij}(0) = p'_{ij}(0^+) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{p_{ij}(h)}{h} = q_i p_{ij} \\ \text{έξοδος από την } i\text{:} & q_i := -\dfrac{d}{dt} p_{ii}(0) = -p'_{ii}(0^+) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{1 - p_{ii}(h)}{h} \end{array}\right\},$$

Άρα, μια ΜΑΣΧ ορίζεται καλώς και από τον **πίνακα των ρυθμών μετάβασης**

$$Q = \left(q_{ij}\right)_{i,j \in S} = \begin{pmatrix} -q_0 & q_{01} & q_{02} & \cdots \\ q_{10} & -q_1 & q_{12} & \cdots \\ q_{20} & q_{21} & -q_2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \qquad \forall i \in S: q_i = \sum_{j \in S, j \neq i} q_{ij}\,.$$

Το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής του πίνακα Q ισούται με το μηδέν.

Μαρκοβιανές Αλυσίδες Συνεχούς Χρόνου – Ισοδύναμος Ορισμός Ρυθμοί Μετάβασης – Χρόνος Παραμονής

Ερμηνεία Τα q_i και q_{ij} μπορούμε να τα δούμε ως ρυθμούς μεταβάσεων (transition rates)

q_i αναμενόμενο πλήθος εγκαταλείψεων της i ανά χρονική μονάδα παραμονής στην $i = \frac{1}{\mathrm{E[T_i]}}$

$$\forall i \in S: q_i = \sum_{j \in S, j \neq i} q_{ij} \, .$$

q_{ij} αναμενόμενο πλήθος μεταβάσεων από την i στην j ανά χρονική μονάδα παραμονής στην i και άρα

Μαρκοβιανές Αλυσίδες Συνεχούς Χρόνου – Ισοδύναμος Ορισμός Ρυθμοί Μετάβασης – Χρόνος Παραμονής

Ισοδύναμη Ερμηνεία – Τα εκθετικά ρολόγια

Τα q_i και q_{ij} μπορούμε να τα δούμε και ως ρυθμούς της εκθετικής κατανομής.

T_i ο χρόνος **παραμονής** στην κατάσταση i πριν τη μετάβαση σε μία άλλη κατάσταση $j \neq i$, όπου $T_i \sim Exp(q_i)$

T_{ij} ο χρόνος **μετάβασης** από την κατάσταση i σε μία κατάσταση $j \neq i$, όπου $T_{ij} \sim Exp(q_{ij})$

Πότε θα συμβεί η επόμενη μετάβαση;

$$T_i = \min_{j \in S, j \neq i} T_{ij} \sim Exp\left(\sum_{j \in S, j \neq i} q_{ij}\right) \Rightarrow \quad \forall i \in S: q_i = \sum_{j \in S, j \neq i} q_{ij} \, .$$

και θα μεταβεί στην κατάσταση j με πιθανότητα $p_{ij} = \frac{q_{ij}}{qi}$

Μαρκοβιανές Αλυσίδες Συνεχούς Χρόνου – Ισοδύναμος Ορισμός Ρυθμοί Μετάβασης – Χρόνος Παραμονής

Παράδειγμα Μοντελοποίησης

Έστω 2 όμοιες μηχανές εκτύπωσης που λειτουργούν συνεχώς, παράλληλα, ανεξάρτητα η μία από την άλλη και με εκθετικούς χρόνους $Exp(1)$, δηλαδή με ρυθμό $\mu = 1$, ενώ όταν κάποιος χρόνος λήξει, τότε συμβαίνει βλάβη. Ως χρονική μονάδα θεωρούμε την ημέρα, συνεπώς $\mu = 1$ βλάβη ανά ημέρα.

Έχουμε έναν τεχνικό, ο οποίος μπορεί να επιδιορθώνει μία μηχανή ανά φορά σε χρόνο επιδιόρθωσης $Exp(2)$. Όταν μία μηχανή επιδιορθώνεται, τότε ξαναμπαίνει άμεσα σε λειτουργία, μέχρις ότου να ξαναχαλάσει.

Να μοντελοποιηθεί η στοχαστική διαδικασία $\{X(t): t \geq 0\}$, όπου για κάθε $t \geq 0$ ορίζουμε ως $X(t)$ το πλήθος των μηχανών που **δε λειτουργούν** κατά τη χρονική στιγμή t.

Μαρκοβιανές Αλυσίδες Συνεχούς – Chapman - Kolmogorov

Μία ΜΑΣΧ $\{X(t): t \geq 0\}$ με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης $\mathbb{P}(t) = \left(p_{ij}(t)\right)_{i,j \in S}$,

αρχική κατανομή

$$p_i(0) = P(X(0) = i), i \in S$$

και πίνακα ρυθμών μετάβασης

$$Q = \left(q_{ij}\right)_{i,j \in S},$$

όπου q_{ij} ο ρυθμός μετάβασης από την κατάσταση i στην κατάσταση $j \neq i$ και

$$q_i := q_{ii} = -\sum_{j \in S, j \neq i} q_{ij}\,.$$

<u>ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ CHAPMAN–KOLMOGOROV</u>

Οι πιθανότητες μετάβασης $p_{ij}(t)$ ικανοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις (οι οποίες μπορούν ν' αποδειχθούν με βάση το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας):

$$p_{ij}(t) = \sum_{k \in S} p_{ik}(s) p_{kj}(t-s)\,.$$

Μαρκοβιανές Αλυσίδες Συνεχούς – Επικοινωνία

Η κατάσταση i είναι **προσιτή από** την κατάσταση j ($i \rightarrow j$) αν και μόνο αν $\exists t > 0 : p_{ij}(t) > 0$.

Η κατάσταση i **επικοινωνεί με** την κατάσταση j ($i \leftrightarrow j$) αν και μόνο αν

$$\begin{Bmatrix} i \rightarrow j \\ j \rightarrow i \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \exists t_1 > 0 : p_{ij}(t_1) > 0 \\ \exists t_2 > 0 : p_{ji}(t_2) > 0 \end{Bmatrix}.$$

Η παραπάνω ιδιότητα (επικοινωνία) είναι μία **σχέση ισοδυναμίας** και άρα ο χ. κ. S διαμερίζεται σε **κλάσεις επικοινωνίας** (ανοιχτά και κλειστά σύνολα **με βάση την επικοινωνία)**.

Ένα σύνολο καταστάσεων καλείται **κλειστό** αν και μόνο αν όλες οι καταστάσεις επικοινωνούν μεταξύ τους και δεν υπάρχει θετική πιθανότητα διαφυγής από αυτό. Διαφορετικά, καλείται **ανοιχτό.**

Η κατάσταση i ενός **κλειστού μονοσυνόλου** $\{i\}$ καλείται **κατάσταση απορρόφησης**.

Αν το σύνολο S αποτελεί **μία κλειστή κλάση επικοινωνίας**, δηλαδή εάν όλες οι καταστάσεις επικοινωνούν μεταξύ τους, τότε η ΜΑΣΧ καλείται **αδιαχώριστη.**

Μαρκοβιανές Αλυσίδες Συνεχούς – Επαναληπτικότητα, Εργοδικότητα

Εάν η ΜΑΣΧ είναι **αδιαχώριστη** και το S **πεπερασμένο**, τότε

- κάθε κατάσταση καλείται **θετικά επαναληπτική**,
- οι **οριακές πιθανότητες** $\pi_j = \lim_{t\to\infty} p_j(t) = \lim_{t\to\infty} P(X(t) = j) > 0$ υπάρχουν και είναι γνήσιες.

Η π_j είναι το μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου κατά το οποίο η στοχαστική διαδικασία βρίσκεται στην κατάσταση $j \in S$.

<u>ΕΡΓΟΔΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ</u>: Η οριακή κατανομή συμπίπτει με τη στάσιμη κατανομή, ενώ οι πιθανότητες π_j καλούνται **στάσιμες πιθανότητες (stationary probabilities)**.

Σε μια **αδιαχώριστη** ΜΑΣΧ, ξεκινώντας από μία κατάσταση θα επιστρέψω με βεβαιότητα σε αυτή **εάν και μόνον εάν** το παρακάτω σύστημα έχει λύση:

$$\left\{\begin{array}{ll} \forall j \in S: \pi_j q_j = \sum_{i\in S, i\neq j} \pi_i q_{ij} & (\text{Εξισώσεις Ισορροπίας}) \\ \sum_{i\in S} \pi_i = 1 & (\text{Εξίσωση Κανονικοποίησης}) \end{array}\right\}$$

Μαρκοβιανές Αλυσίδες Συνεχούς – Στάσιμη Κατανομή

Αν το παρακάτω σύστημα έχει λύση,

$$\begin{Bmatrix} \forall j \in S: \pi_j q_j = \sum_{i \in S, i \neq j} \pi_i q_{ij} & \text{(Εξισώσεις Ισορροπίας)} \\ \sum_{i \in S} \pi_i = 1 & \text{(Εξίσωση Κανονικοποίησης)} \end{Bmatrix}$$

τότε αυτή είναι μοναδική και η στάσιμη κατανομή είναι γνήσια, δηλ $\forall j \in S: \pi_j > 0$.
Αντιθέτως, εάν δεν έχει λύση, τότε θεωρούμε ότι $\forall j \in S: \pi_j = 0$.

Οι Εξισώσεις Ισορροπίας σε κάθε κατάσταση $j \in S$ εξισώνουν

- το συνολικό ρυθμό που βγαίνει από μία κατάσταση j (**rate out**)
- με το συνολικό ρυθμό που μπαίνει στη συγκεκριμένη κατάσταση j (**rate in**) από κάθε άλλη κατάσταση $i \in S, i \neq j$.

Μαρκοβιανές Αλυσίδες Συνεχούς – Στάσιμη Κατανομή

$$\begin{cases} \forall j \in S: \pi_j q_j = \sum_{i \in S, i \neq j} \pi_i q_{ij} & \text{(Εξισώσεις Ισορροπίας)} \\ \sum_{i \in S} \pi_i = 1 & \text{(Εξίσωση Κανονικοποίησης)} \end{cases}$$

Προσοχή!!! Μπορώ να διαγράψω μία από τις εξισώσεις ισορροπίας καθώς το σύστημα είναι γραμμικώς εξαρτημένο.

Ερμηνεία

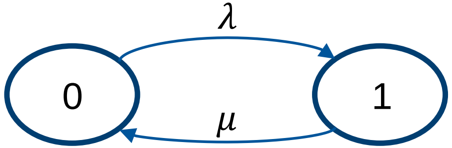
- το συνολικό ρυθμό που βγαίνει από μία κατάσταση j (**rate out**)
- με το συνολικό ρυθμό που μπαίνει στη συγκεκριμένη κατάσταση j (**rate in**) από κάθε άλλη κατάσταση $i \in S, i \neq j$.

Μαρκοβιανές Αλυσίδες Συνεχούς Χρόνου – Στάσιμη Κατανομή

Παράδειγμα: Η M/M/1/1 Ουρά

- Οι αφίξεις ακολουθούν διαδικασία Poisson ρυθμού $\lambda > 0$.
- Οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι **i.i.d.** και ακολουθούν $Exp(\mu), \mu > 0$.
- Στο Σύστημα Εξυπηρέτησης υπάρχει 1 υπηρέτης.
- Η χωρητικότητα του Συστήματος Εξυπηρέτησης ισούται με τη μονάδα, συνεπώς **δεν υπάρχει χώρος αναμονής**.
- Εάν ένας πελάτης που καταφθάνει στο Σύστημα Εξυπηρέτησης το βρει κενό, τότε εισέρχεται απευθείας στο Χώρο Εξυπηρέτησης, ειδάλλως αποχωρεί και χάνεται.
- $N(t) =$ Πλήθος πελατών στο σύστημα τη στιγμή t.

Η Στοχαστική Διαδικασία $\{N(t): t \geq 0\}$ είναι ΜΑΣΧ με χ.κ. $S = \{0,1\}$ και διάγραμμα ρυθμών μετάβασης

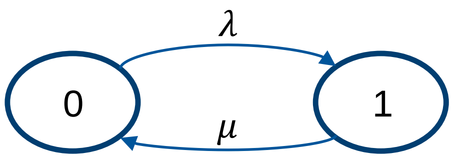


Μαρκοβιανές Αλυσίδες Συνεχούς Χρόνου – Στάσιμη Κατανομή

Παράδειγμα: Η Μ/Μ/1/1 Ουρά – Εύρεση Στάσιμης Κατανομής

Έστω οι στάσιμες πιθανότητες π_0, π_1.
Αυτές ικανοποιούν τις Εξισώσεις Ισορροπίας **(Rate Out = Rate In)**

$$\pi_0 \cdot \lambda = \pi_1 \cdot \mu$$
$$\pi_1 \cdot \mu = \pi_0 \cdot \lambda$$



και την εξίσωση της Κανονικοποίησης:

$$\pi_0 + \pi_1 = 1$$

Λύνουμε το σύστημα και προκύπτει ότι:

$$\pi_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \text{το μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου κατά το οποίο το Σύστημα Εξυπηρέτησης είναι κενό}$$

$$\pi_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = \text{το μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου κατά το οποίο το Σύστημα Εξυπηρέτησης είναι κατειλημμένο}$$

Μαρκοβιανές Αλυσίδες Συνεχούς Χρόνου – Στάσιμη Κατανομή

Παράδειγμα: Η M/M/1/1 Ουρά – Ανάλυση Μέσης Τιμής

Έστω το οριακό (στάσιμο) πλήθος πελατών $N \sim \pi_n$ (μακροπρόθεσμο πλήθος πελατών στο σύστημα).

$$\mathrm{P}(\mathrm{N}=0)=\pi_0=\frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

$$P(N=1)=\pi_1=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

Μέτρα Απόδοσης

$$L = \text{μέσο πλήθος πελατών στο Σύστημα} = E(N)=\sum_{n=0}^{1} n\pi_n = 0\cdot\pi_0 + 1\cdot\pi_1 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

$$W = \text{μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο Σύστημα} = \frac{L}{\bar{\lambda}} = \frac{L}{\lambda} = \frac{\frac{\lambda}{\lambda+\mu}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda+\mu}$$

Νόμος Little

Μαρκοβιανές Αλυσίδες Συνεχούς – Εξισώσεις Γενικευμένης Ισορροπίας

Για την εύρεση της στάσιμης κατανομής $(\pi_j, j \in S)$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις γενικευμένης ισορροπίας αντί για τις εξισώσεις ισορροπίας.

Έστω σύνολο καταστάσεων $A \subseteq S$. Τότε ισχύει ότι

$$\sum_{j \in A} \sum_{i \in A^c} \pi_j q_{ji} = \sum_{i \in A^c} \sum_{j \in A} \pi_i q_{ij}$$

(**συνολικός ρυθμός εξόδου** απ' το A = **συνολικός ρυθμός εισόδου** στο A).

Ποια είναι η διαφορά τους;

- Αναφέρονται σε σύνολα καταστάσεων και όχι σε μεμονωμένες καταστάσεις.

Λύνουμε μαζί με την εξίσωση κανονικοποίησης

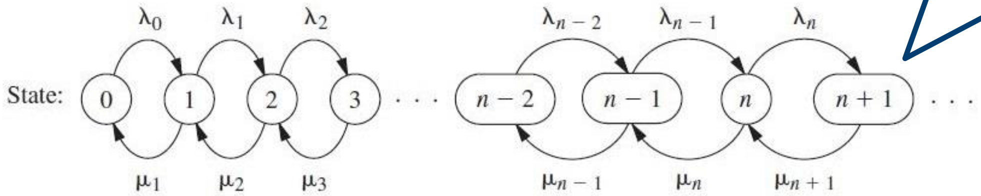
Μαρκοβιανές Αλυσίδες Συνεχούς Χρόνου – Ειδική Περίπτωση

Οι διαδικασίες γέννησης - θανάτου (birth and death processes)

- Κατάλληλο στοχαστικό μοντέλο για την μελέτη του πλήθους πελατών σε Μαρκοβιανά Συστήματα τύπου $\mathrm{M}/\ \mathrm{M}/s$.
- Απαριθμήτρια σ.δ. $N(t)$ Πλήθος γεγονότων τη στιγμή t, όπου σε κάθε απειροστό χρονικό διάστημα η κατάσταση μπορεί να μεταβληθεί μόνον κατά μία μονάδα.
- Αν $N(t) = n$, τότε
  - η κατάσταση είτε αυξάνεται κατά 1 (**γέννηση**) με εκθετικό ρυθμό $\lambda_n > 0$,
  - είτε μειώνεται κατά 1 (**θάνατος**) με εκθετικό ρυθμό $\mu_n > 0$, και
  - οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών γεγονότων είναι **ανεξάρτητοι**.
- Το διάγραμμα ρυθμών μετάβασης έχει ως εξής:

επιτρέπονται μεταβάσεις μόνο μεταξύ **γειτονικών** καταστάσεων

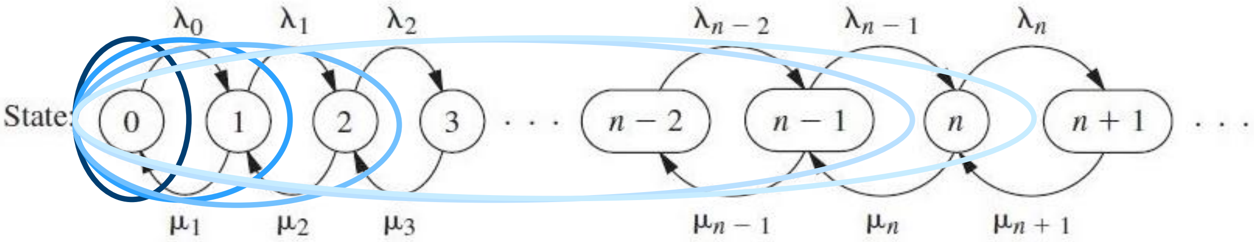
Αδιαχώριστη και **μη πεπερασμένη.**



Μαρκοβιανές Αλυσίδες Συνεχούς Χρόνου – B&D Processes

Οι διαδικασίες γέννησης - θανάτου – Εύρεση Στάσιμης Κατανομής

- Για να βρω τις στάσιμες πιθανότητες $(\pi_j : j \in S)$, χρησιμοποιώ τις εξισώσεις γενικευμένης ισορροπίας



$$
\begin{array}{lr}
\mathbf{A_0 = \{0\}}: & \lambda_0 \pi_0 = \mu_1 \pi_1 \\
\mathbf{A_1 = \{0, 1\}}: & \lambda_1 \pi_1 = \mu_2 \pi_2 \\
\mathbf{A_2 = \{0, 1, 2\}}: & \lambda_2 \pi_2 = \mu_3 \pi_3 \\
\dots & \dots \\
\mathbf{A_{n-1} = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}}: & \lambda_{n-1} \pi_{n-1} = \mu_n \pi_n \\
\dots & \dots
\end{array}
$$

Λύνουμε αναδρομικά $\forall n \in \mathbb{N}, n > 0: \pi_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} \pi_{n-1} = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}}{\mu_n \mu_{n-1}} \pi_{n-2} = \cdots = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2} \dots \lambda_1 \lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1} \dots \mu_2 \mu_1} \pi_0$

Μαρκοβιανές Αλυσίδες Συνεχούς Χρόνου – B&D Processes

Οι διαδικασίες γέννησης - θανάτου – Εύρεση Στάσιμης Κατανομής

Λύνουμε αναδρομικά $\forall n \in \mathbb{N}, n > 0: \pi_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n}\pi_{n-1} = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}}{\mu_n\mu_{n-1}}\pi_{n-2} = \cdots = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\ldots\lambda_1\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\ldots\mu_2\mu_1}\pi_0$

Θέτω για κάθε $n \in \mathbb{N}, n > 0$:

$$C_n \equiv \frac{\lambda_0\lambda_1 \ldots \lambda_{n-2}\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2 \ldots \mu_{n-1}\mu_n}$$

και θεωρώ $C_0 = 1$.

Συμπεραίνουμε έτσι ότι $\text{για καθε } n \in \mathbb{N}_0: \pi_n = C_n\pi_0$. Τέλος, από Εξίσωση Κανονικοποίησης

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = 1 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} C_n\pi_0 = 1 \Leftrightarrow \pi_0 \sum_{n=0}^{\infty} C_n = 1.$$

Άρα για να υπάρχει γνήσια στάσιμη κατανομή, πρέπει να ισχύει:

$\sum_{n=0}^{\infty} C_n < \infty$ (**Συνθήκη Στασιμότητας**)

Μαρκοβιανές Αλυσίδες Συνεχούς Χρόνου – B&D Processes

Οι διαδικασίες γέννησης - θανάτου – Εύρεση Στάσιμης Κατανομής

Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}, n > 0$:

$$C_n \equiv \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-2} \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{n-1} \mu_n}, C_0 = 1 \text{ με } \sum_{n=0}^{\infty} C_n < \infty$$

θα έχω

$$\pi_0 \sum_{n=0}^{\infty} C_n = 1 \Leftrightarrow \pi_0 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n \right)^{-1}$$

και συνεπώς

$$\pi_n = C_n \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n \right)^{-1}, n = 1,2, \dots .$$

Διαφορετικά, αν $\sum_{n=0}^{\infty} C_n = \infty$ τότε θεωρούμε τη στάσιμη κατανομή $\pi_n = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$

Μοντέλα Εξυπηρέτησης – Ενδεικτική Βιβλιογραφία

- **Hillier and Lieberman, “Introduction to Operations Research”, 8th edition**
  Chapter 16 Markov Chains, par. 8, p.p. 755-759.
  Chapter 17 Queueing Theory, par. 5, p.p. 780-784.

- **Δ. Φακίνος, “Ουρές Αναμονής”, Εκδόσεις Συμμετρία 2003**
  Κεφάλαιο 1, παρ. 5-6 σελ. 39-73, Κεφ. 3, παρ. 1, σελ. 124-125.

- **Α. Οικονόμου, “Θεωρία Ουρών Αναμονής”, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις, Τμήμα Μαθηματικών ΕΚΠΑ**
  Κεφάλαιο 4,5, σελ. 22-32.