Δ.Π.Μ.Σ Μαθηματικά της Αγοράς και της Παραγωγής

Μαθηματικά Υποδείγματα Παραγωγής, Εφοδιαστικής και Υπηρεσιών ΙΙ - Ουρές Αναμονής ΜΑΘΗΜΑ 3ο

Γιάννης Δημητρακόπουλος, PhD in OR
Τμήμα Μαθηματικών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Περιεχόμενα Μαθήματος

1. Μοντέλα Συστημάτων Εξυπηρέτησης
- Τί είναι Σύστημα Εξυπηρέτησης;
- Πού υπεισέρχεται η αβεβαιότητα;
- Η έννοια της καθυστέρησης (αναμονής)
- Στοχαστική Μοντελοποίηση
- Βασικές έννοιες
- Βασικά Μέτρα Απόδοσης

2. Μαρκοβιανές Αλυσίδες Συνεχούς Χρόνου
- Ορισμός και Βασικές Έννοιες
- Ένα ισοδύναμο μοντέλο – Στασιμότητα
- Διαδικασίες Γέννησης - Θανάτου

3. Απλές Μαρκοβιανές Ουρές
- M/M/1
- Τροποποιήσεις της M/M/1
- M/M/s
- M/M/s/k (για s=1)
- Πεπερασμένος Πληθυσμός Πελατών

4. Μοντέλα με Γενικούς Χρόνους Εξυπηρέτησης
- H M/G/1 Ουρά
- Τύπος Pollaczek- Khintchine
- Εφαρμογές

5. Μοντέλα με Προτεραιότητες
- Preemptive και non-Preemptive Μοντέλα

6. Δίκτυα Ουρών
- Ουρές σε Σειρά
- Ανοικτά Δίκτυα Jackson
- Equivalence property και product form – Εξισώσεις Κίνησης

Απλές Μαρκοβιανές Ουρές

A/B/s/k (queue disc)

A **Κατανομή διαδ. αφίξεων**

B **Κατανομή διαδ. Εξυπηρετήσεων**

$\boldsymbol{s =}$ **πλήθος παράλληλων υπηρετών**

$\boldsymbol{k =}$**χωρητικότητα συστήματος**
(in queue $+s$)

Απλές Μαρκοβιανές Ουρές

M/M/s (M=Έκθετικούς Χρόνους)

Διαδικασία Αφίξεων Poisson ρυθμού λ

Χρόνοι εξυπηρετησης i.i.d. $\sim Exp(\mu), E(\mathcal{W}_s) = \frac{1}{\mu}$

s παράλληλοι υπηρέτες - άπειρη χωρητικότητα

Πειθαρχία ουρά FCFS - $\rho = \frac{\lambda}{s\mu} < 1$ (Ευστάθεια)

Η M/M/1 Ουρά

Βασικά Χαρακτηριστικά

Διαδικασία Αφίξεων Poisson ρυθμού λ – Interarrival Times i.i.d. $\sim Exp(\lambda)$

Χρόνοι εξυπηρετησης i.i.d. $\sim Exp(\mu), E(\boldsymbol{w}_s) = \frac{1}{\mu}$

$s = 1$ υπηρέτης

Άπειρη χωρητικότητα ($k = \infty$). Εισέρχονται όλοι στο σύστημα

Πειθαρχία ουρά FCFS - $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ (Ευστάθεια)

Η M/M/1 Ουρά – Ανάλυση Στασιμότητας

Έστω η σ.δ. $N(t) =$ το πλήθος των πελατών στο Σύστημα τη χρονική στιγμή t.

Χώρος καταστάσεων $S = N_0$ και χρόνοι μετάβασης:

Αρχική Κατάσταση	Επόμενη Κατάσταση	Επεξήγηση	Χρόνος Μετάβασης
0	1	νέα άφιξη	$Exp(\lambda)$
$n \geq 1$	$n+1$	νέα άφιξη	$Exp(\lambda)$
$n \geq 1$	$n-1$	αναχώρηση λόγω ολοκλήρωσης εξυπηρέτησης	$Exp(\mu)$

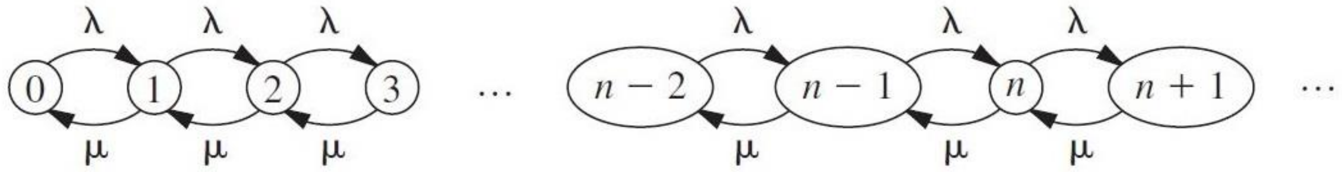
Η M/M/1 Ουρά – Ανάλυση Στασιμότητας

Άρα η σ.δ. $\{N(t): t \geq 0\}$ είναι διαδικασία γέννησης-θανάτου με ρυθμούς:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 0: \lambda_n = \lambda \text{ (γέννησης)}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1: \mu_n = \mu \text{ (θανάτου)}$$

και διάγραμμα ρυθμών μετάβασης:



Η M/M/1 Ουρά – Ανάλυση Στασιμότητας

Έστω οι στάσιμες πιθανότητες $\pi_n, n \in \mathbb{N}_0$. Θεωρούμε την ακολουθία

$$C_n \equiv \frac{\lambda_0\lambda_1 \ldots \lambda_{n-2}\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2 \ldots \mu_{n-1}\mu_n} = \frac{\lambda\cdot\lambda\cdot\cdots\cdot\lambda\cdot\lambda}{\mu\cdot\mu\cdot\cdots\cdot\mu\cdot\mu} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \rho^n, \text{ όπου } \rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Για να υπάρχει γνήσια στάσιμη κατανομή, πρέπει να ισχύει η **Συνθήκη Στασιμότητας**:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n < \infty \Leftrightarrow \rho < 1 \Leftrightarrow \frac{\lambda}{\mu} < 1 \Leftrightarrow \lambda < \mu.$$

Έστω $\lambda < \mu \Leftrightarrow \rho < 1$. Τότε

$$\pi_0 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n\right)^{-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n\right)^{-1} = \left(\frac{1}{1-\rho}\right)^{-1} = 1 - \rho$$

Πιθανότητα κενού συστήματος

Η M/M/1 Ουρά – Στάσιμη Κατανομή

Έστω $\lambda < \mu \Leftrightarrow \rho < 1$. Τότε

$$\pi_0 = 1 - \rho \text{ και } \pi_n = C_n \pi_0 = \rho^n (1 - \rho)$$

Άρα διαπιστώνουμε για την τυχαία μεταβλητή N (οριακή τ.μ. - πλήθος πελατών σε κατάσταση στασιμότητας) ότι

$$N \sim Geom(\rho) \; \sigma\tau o \; \mathbb{N}_0.$$

Αν $\lambda \geq \mu \Leftrightarrow \rho \geq 1$ τότε το Σύστημα δεν είναι ευσταθές και η Ουρά μακροπρόθεσμα απειρίζεται. Σε αυτή την περίπτωση

$$\pi_n = 0 \text{ για κάθε } n \in N_0$$

Η M/M/1 Ουρά – Μέτρα Απόδοσης

Ανάλυση Μέσης Τιμής – Συνολικό Σύστημα

Έστω $\lambda < \mu \Leftrightarrow \rho < 1$ δηλαδή το σύστημα ευσταθές. Τότε $N \sim Geom(\rho)$.

$$L = E(N) = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1-\frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} \qquad W = \frac{L}{\bar{\lambda}} = \frac{L}{\lambda} = \frac{\frac{\lambda}{\mu-\lambda}}{\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

από Νόμο Little

Ανάλυση Μέσης Τιμής – Χώρος Αναμονής

$$L_q = E(N_q) = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\pi_n = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

από Νόμο Little

$$W_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}} = \frac{\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

Αν $\lambda \geq \mu \Leftrightarrow \rho \geq 1$ τότε το Σύστημα **δεν είναι ευσταθές** και η Ουρά **μακροπρόθεσμα απειρίζεται**.

$$\begin{Bmatrix} \forall n \in \mathbb{N}_0 : \pi_n = 0 \\ L = L_q = W = W_q = \infty \end{Bmatrix}$$

Η M/M/1 Ουρά – Άλλα Μέτρα Απόδοσης

Κατανομή Χρόνου Παραμονής $\boldsymbol{w} \sim F(t)$

Βασική Υπόθεση: Πειθαρχία **FCFS**.

Μηχανισμός: Θεωρώ έναν συγκεκριμένο πελάτη (tagged customer), ο οποίος βρίσκει τη στιγμή που εισέρχεται στο Σύστημα n πελάτες σε αυτό.

Συνεπώς, αυτός είναι ο πελάτης υπ’ αριθμόν $n+1$ και άρα ο χρόνος που θα κάνει μέχρι να φύγει αντιστοιχεί στο άθροισμα $n+1$ εκθετικών χρονών.

$$\boldsymbol{w}|(N=n) = S_{n+1} = T_1 + T_2 + \cdots + T_n + T_{n+1}$$

T_i **iid** τ.μ. $\sim Exp(\mu)$ =ο χρόνος εξυπηρετησης του i –πελάτη . Άρα η

$$S_{n+1} \sim Erlang(n+1, \mu) = Gamma(n+1, \mu).$$

Δεσμεύοντας πάνω στη N αποδεικνύεται ότι $P(\boldsymbol{w} > t) = e^{-(1-\rho)\mu t} \Rightarrow \boldsymbol{w} \sim Exp\big((1-\rho)\mu\big)$

Η M/M/1 Ουρά – Άλλα Μέτρα Απόδοσης

Κατανομή Χρόνου Αναμονής $w_q \sim F(t)$

Βασική Υπόθεση: Πειθαρχία **FCFS**.

Μηχανισμός: Θεωρώ έναν συγκεκριμένο πελάτη (tagged customer), ο οποίος βρίσκει τη στιγμή που εισέρχεται στο Σύστημα n πελάτες σε αυτό.

Συνεπώς, αυτός είναι ο πελάτης υπ' αριθμόν $n+1$ και άρα ο χρόνος που θα κάνει μέχρι να βγει από το χώρο αναμονής αντιστοιχεί στο άθροισμα n εκθετικών χρονών αν $n>0$.

$$\boldsymbol{w}_{\mathbf{q}}|(N=n) = S_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$$

T_i **iid** τ.μ. $\sim Exp(\mu)$ =ο χρόνος εξυπηρετησης του i –πελάτη . Άρα η

$$S_n \sim Erlang(n,\mu) = Gamma(n,\mu).$$

Δεσμεύοντας πάνω στη N αποδεικνύεται ότι $P(\boldsymbol{w}_{\boldsymbol{q}} > t | N > 0) = \rho e^{-(1-\rho)\mu t}$

Δεν είναι Exp

Η M/M/1 Ουρά – Άλλα Μέτρα Απόδοσης

Κατανομή Χρόνου Αναμονής $\boldsymbol{w}_q \sim F(t)$

Τι γίνεται αν $N = 0$; $\boldsymbol{w}_q = 0$ με πιθανότητα $\pi_0 = 1 - \rho$

Αν ακολουθούσε εκθετική κατανομή, τότε θα έπρεπε $P(\boldsymbol{w}_q = 0) = 0$.

Προκύπτει εύκολα μέσω της συνάρτησης επιβίωσης ότι

$$\boldsymbol{w}_q | (\boldsymbol{w}_q > 0) \sim Exp((1-\rho)\mu).$$

Μεικτή
Exp

Μεικτή Εκθετική Κατανομή

- $\boldsymbol{w}_q = 0$ με πιθανότητα π_0
- $\boldsymbol{w}_q > 0$ με πιθανότητα $1 - \pi_0$ και κατανομή $\boldsymbol{w}_q | (\boldsymbol{w}_q > 0) \sim Exp((1-\rho)\mu)$

Η Μ/Μ/1 Ουρά – Άλλα Μέτρα Απόδοσης

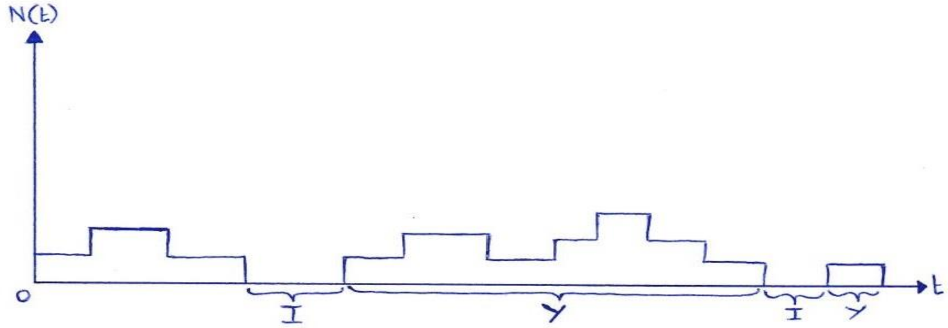
Περίοδος Αργίας – Περίοδος Λειτουργίας – Κύκλος Απασχόλησης

Ορίζουμε τις παρακάτω τ.μ.:

$\boldsymbol{I}$: περίοδος αργίας - από τη στιγμή **αναχώρησης ενός πελάτη** που αφήνει το Σύστημα κενό ως την **επόμενη στιγμή άφιξης.**

$\boldsymbol{Y}$:περίοδος συνεχούς λειτουργίας - από τη στιγμή **άφιξης** που βρίσκει το Σύστημα κενό ως την **αναχώρησης** του πελάτη που αφήνει το Σύστημα κενό.

$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{Y}$: κύκλος απασχόλησης.



Η M/M/1 Ουρά – Άλλα Μέτρα Απόδοσης

Περίοδος Αργίας – Περίοδος Λειτουργίας – Κύκλος Απασχόλησης

<u>Η **M|M|1|1** ουρά</u>: Δεν υπάρχει χώρος αναμονής.

$I \sim Exp(\lambda) \Rightarrow E(I) = \frac{1}{\lambda}$ (Η περίοδος αργίας ταυτίζεται με το χρόνο μίας άφιξης)

$Y \sim Exp(\mu) \Rightarrow E(Y) = \frac{1}{\mu}$ (Η περίοδος λειτουργίας ταυτίζεται με service)

$E(Z) = E(I+Y) = E(I) + E(Y) = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}$

<u>Η **M|M|1** ουρά</u>: Για την αργία I δεν αλλάζει κάτι σε σχέση με τη **M|M|1|1** ουρά.

$$\pi_0 = \text{μακροπρόθεσμο ποσοστό χρόνου κενού Συστήματος Εξυπηρέτησης} = \frac{E(I)}{E(Z)} \Leftrightarrow$$

$$\pi_0 = 1 - \rho = \frac{\frac{1}{\lambda}}{E(Z)} \Leftrightarrow E(Z) = \frac{1}{\lambda(1-\rho)}$$

$$E(Y) = E(Z) - E(I) = \frac{1}{\lambda(1-\rho)} - \frac{1}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}$$

Παρατήρηση: Εδώ $E(Y) = W = E(\mathcal{W})$, **δεν ισχύει γενικά.**

Η M/M/1 Ουρά – Τροποποιήσεις

Η M/M/1 με αποθαρρυνόμενους πελάτες

Έστω q_n (για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$) η πιθανότητα να αποχωρήσει άμεσα χωρίς να εισέλθει στο Σύστημα Εξυπηρέτησης ένας πελάτης που φθάνοντας παρατηρεί n πελάτες σε αυτό.
Η q_n είναι αύξουσα συνάρτηση του $n \in \mathbb{N}_0$ (όσο περισσότερους πελάτες παρατηρεί, τόσο πιθανότερο είναι να αποχωρήσει).

Ένας πελάτης που θα παρατηρήσει n πελάτες στο Σύστημα Εξυπηρέτησης κατά την άφιξή του θα εισέλθει σε αυτό με πιθανότητα $1 - q_n$.
Ρυθμοί αφίξεων: $\forall n \in \mathbb{N}_0: \lambda_n = \lambda(1 - q_n)$.
Ρυθμοί εξυπηρετήσεων: $\forall n \in \mathbb{N}: \mu_n = \mu$

Να βρεθούν η στάσιμη κατανομή και τα Μέτρα Απόδοσης για τις πιθανότητες

$$\forall n \in \mathbb{N}_0: q_n = \frac{n}{n+1}.$$

Η Μ/Μ/1 Ουρά – Τροποποιήσεις

Η Μ/Μ/1 με μεταβλητή ταχύτητα εξυπηρέτησης

Στην περίπτωση αυτή, ο υπηρέτης αυξάνει την ταχύτητά του καθώς αυξάνεται ο συνωστισμός.

Αν u_n είναι η ταχύτητα με την οποία εργάζεται ο υπηρέτης όταν υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα, ενώ η απαίτηση προς εξυπηρέτηση εκφράζεται από την τυχαία μεταβλητή $X \sim Exp(\mu)$, τότε $S|(N = n) = \frac{X}{u_n} \sim Exp(\mu u_n)$. ($S$ είναι το service time)

- Ρυθμοί αφίξεων: $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 0: \lambda_n = \lambda$.
- Ρυθμοί εξυπηρετήσεων: $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1: \mu_n = \mu u_n$.

Να βρεθούν η στάσιμη κατανομή και τα Μέτρα Απόδοσης για ταχύτητα εξυπηρέτησης

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1: u_n = n.$$

Η M/M/s Ουρά

Βασικά Χαρακτηριστικά

Διαδικασία Αφίξεων Poisson ρυθμού λ – Interarrival Times i.i.d. $\sim Exp(\lambda)$

Χρόνοι εξυπηρετησης i.i.d. $\sim Exp(\mu)$, $E(\boldsymbol{w}_s) = \frac{1}{\mu}$

s παράλληλοι υπηρέτες

Άπειρη χωρητικότητα ($k = \infty$). Εισέρχονται όλοι στο σύστημα

Πειθαρχία ουρά FCFS - $\rho = \frac{\lambda}{s\mu} < 1$ (Ευστάθεια)

Η M/M/s Ουρά – Ανάλυση Στασιμότητας

Έστω η σ.δ. $N(t) =$ το πλήθος των πελατών στο Σύστημα τη χρονική στιγμή t.

Χώρος καταστάσεων $S = N_0$ και χρόνοι μετάβασης:

Αρχική Κατάσταση	Επόμενη Κατάσταση	Επεξήγηση	Χρόνος Μετάβασης
0	**1**	νέα άφιξη	$Exp(\lambda)$
$\boldsymbol{n} \geq 1$	$\mathbf{n+1}$	νέα άφιξη	$Exp(\lambda)$
$1 \leq \mathbf{n} \leq \mathrm{s}$ $\boldsymbol{n} > s$	$\mathbf{n-1}$	αναχώρηση λόγω εξυπηρέτησης (n (s) απασχ. υπ.)	$Exp(\mathrm{n}\mu)$ $Exp(s\mu)$

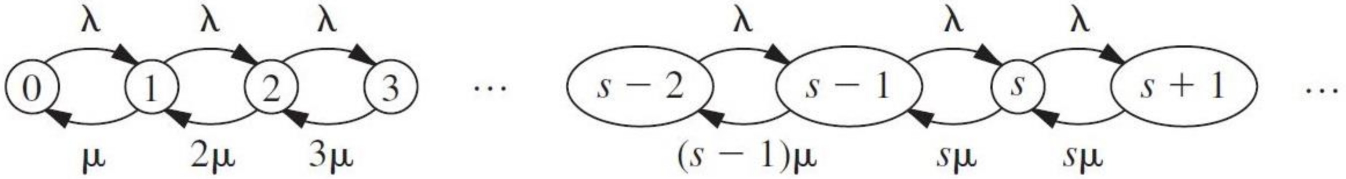
Η M/M/s Ουρά – Ανάλυση Στασιμότητας

Άρα η σ.δ. $\{N(t): t \geq 0\}$ είναι διαδικασία γέννησης-θανάτου με ρυθμούς:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 0: \lambda_n = \lambda \text{ (γέννησης)}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1: \mu_n = \begin{cases} n\mu, n \leq s \\ s\mu, \mathrm{n} > s \end{cases} \text{ (θανάτου)}$$

και διάγραμμα ρυθμών μετάβασης:



Η M/M/s Ουρά – Ανάλυση Στασιμότητας

Έστω οι στάσιμες πιθανότητες $\pi_n, n \in \mathbb{N}_0$. Θεωρούμε την ακολουθία

$$C_n \equiv \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-2} \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{n-1} \mu_n} = \begin{cases} \dfrac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!}, & 0 \leq n \leq s-1, \\ \dfrac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{s!\, s^{n-s}}, & n \geq s. \end{cases}$$

Για να υπάρχει γνήσια στάσιμη κατανομή, πρέπει να ισχύει η **Συνθήκη Στασιμότητας**:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{s-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^n < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^n < \infty \Leftrightarrow \rho = \frac{\lambda}{s\mu} < 1.$$

Η M/M/s Ουρά – Στάσιμη Κατανομή

Έστω $\lambda < s\mu \Leftrightarrow \rho < 1$. Τότε

$$\pi_0 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n\right)^{-1} = \left(\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!} \sum_{n=0}^{\infty} p^n\right)^{-1} = \left(\sum_{n=0}^{s-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!\,(1-p)}\right)^{-1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \colon \pi_n = C_n \pi_0 = \begin{cases} \dfrac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!}\pi_0, & 0 \le n \le s-1, \\[2ex] \dfrac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{s!\, s^{n-s}}\pi_0, & n \ge s. \end{cases}$$

Αν $\lambda \ge s\mu \Leftrightarrow \rho \ge 1$ τότε το Σύστημα δεν είναι ευσταθές και η Ουρά μακροπρόθεσμα απειρίζεται. Σε αυτή την περίπτωση $\pi_n = 0$ για κάθε $n \in N_0$

Η M/M/s Ουρά – Μέτρα Απόδοσης

- $\rho = \frac{\lambda}{s\mu} < 1 \Rightarrow N \sim \pi_n$
- Δύσκολος ο απευθείας υπολογισμός $L = E(N) = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n$ λόγω της μορφής της π_n

- Υπολογίζω την

$$L_q = E(N_q) = \sum_{n=s}^{\infty} (n-s)\pi_n = \sum_{n=s}^{\infty} (n-s) \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{s!\, s^{n-s}} \pi_0 = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!} \pi_0 \sum_{n=s}^{\infty} (n-s) \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{n-s}$$

$$= \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!} \pi_0 \sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!} \pi_0 \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

Η M/M/s Ουρά – Μέτρα Απόδοσης

- $\rho = \frac{\lambda}{s\mu} < 1 \Rightarrow N \sim \pi_n$
- Εφαρμόζουμε Νόμο Little στο χώρο αναμονής

$$W_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}} = \frac{\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!}\pi_0 \frac{\rho}{(1-\rho)^2}}{\lambda} = \frac{\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!}\pi_0 \frac{\frac{\lambda}{s\mu}}{(1-\rho)^2}}{\lambda} = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!}\pi_0 \frac{1}{s\mu(1-\rho)^2}$$

- Από τη σχέση των χρόνων παραμονής-αναμονής

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!}\pi_0 \frac{1}{s\mu(1-\rho)^2} + \frac{1}{\mu}$$

- Little στο συνολικό σύστημα

$$L = \lambda W = \lambda\left(W_q + \frac{1}{\mu}\right) = \lambda W_q + \frac{\lambda}{\mu} = \mathrm{L_q} + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!}\pi_0 \frac{\rho}{(1-\rho)^2} + \frac{\lambda}{\mu}$$

Απλές Μαρκοβιανές Ουρές – Ενδεικτική Βιβλιογραφία

- **Hillier and Lieberman, "Introduction to Operations Research", 8th edition**
  Chapter 17 Queueing Theory, par. 5-6, p.p. 780-791.

- **Δ. Φακίνος, "Ουρές Αναμονής", Εκδόσεις Συμμετρία 2003**
  Κεφάλαιο 3, παρ. 1-5 σελ. 124-154, Κεφ. 2, παρ. 1-6, σελ. 99-117.

- **Α. Οικονόμου, "Θεωρία Ουρών Αναμονής", Πανεπιστημιακές Σημειώσεις, Τμήμα Μαθηματικών ΕΚΠΑ**
  Κεφάλαιο 5 σελ. 30-42.