Δ.Π.Μ.Σ Μαθηματικά της Αγοράς και της Παραγωγής

Μαθηματικά Υποδείγματα Παραγωγής, Εφοδιαστικής και Υπηρεσιών ΙΙ - Ουρές Αναμονής ΜΑΘΗΜΑ 4ο

Γιάννης Δημητρακόπουλος, PhD in OR
Τμήμα Μαθηματικών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Περιεχόμενα Μαθήματος

1. Μοντέλα Συστημάτων Εξυπηρέτησης
- Τί είναι Σύστημα Εξυπηρέτησης;
- Πού υπεισέρχεται η αβεβαιότητα;
- Η έννοια της καθυστέρησης (αναμονής)
- Στοχαστική Μοντελοποίηση
- Βασικές έννοιες
- Βασικά Μέτρα Απόδοσης

2. Μαρκοβιανές Αλυσίδες Συνεχούς Χρόνου
- Ορισμός και Βασικές Έννοιες
- Ένα ισοδύναμο μοντέλο – Στασιμότητα
- Διαδικασίες Γέννησης - Θανάτου

3. Απλές Μαρκοβιανές Ουρές
- M/M/1
- Τροποποιήσεις της M/M/1
- M/M/s
- M/M/s/k (για s=1)
- Πεπερασμένος Πληθυσμός Πελατών

4. Μοντέλα με Γενικούς Χρόνους Εξυπηρέτησης
- Η M/G/1 Ουρά
- Τύπος Pollaczek- Khintchine
- Εφαρμογές

5. Μοντέλα με Προτεραιότητες
- Preemptive και non-Preemptive Μοντέλα

6. Δίκτυα Ουρών
- Ουρές σε Σειρά
- Ανοικτά Δίκτυα Jackson
- Equivalence property και product form – Εξισώσεις Κίνησης

Ουρά Αναμονής

A/B/s/k (queue disc)

A Κατανομή διαδ. αφίξεων

B Κατανομή διαδ. Εξυπηρετήσεων

$s =$ πλήθος παράλληλων υπηρετών

$k =$χωρητικότητα συστήματος (in queue $+s$)

Απλές Μαρκοβιανές Ουρές

M/M/s (M=Έκθετικούς Χρόνους)

Διαδικασία Αφίξεων Poisson ρυθμού λ

Χρόνοι εξυπηρετησης i.i.d. $\sim Exp(\mu), E(\mathcal{W}_s) = \frac{1}{\mu}$

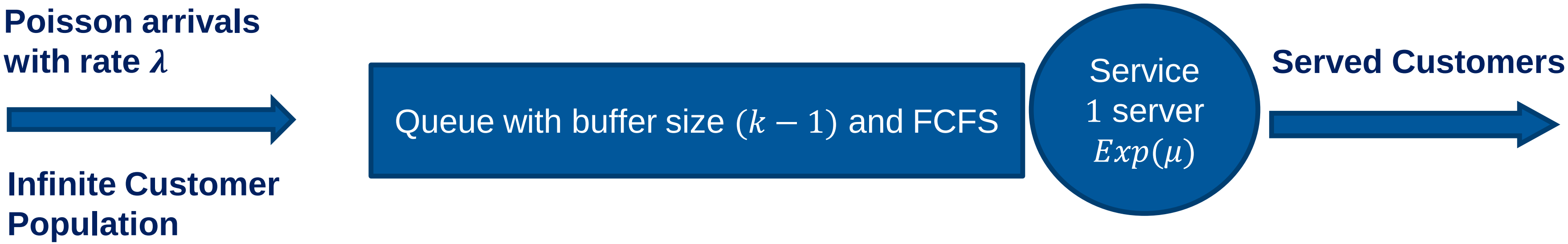
s παράλληλοι υπηρέτες - άπειρη χωρητικότητα

Πειθαρχία ουρά FCFS - $\rho = \frac{\lambda}{s\mu} < 1$ (Ευστάθεια)

Η M/M/1 Ουρά

Βασικά Χαρακτηριστικά	Βασικά Αποτελέσματα: Αν $\lambda < \mu$
Διαδικασία Αφίξεων Poisson ρυθμού λ Χρόνοι εξυπηρετησης i.i.d. $\sim Exp(\mu)$, $s = 1$ υπηρέτης Άπειρη χωρητικότητα ($k = \infty$). Εισέρχονται όλοι στο σύστημα Πειθαρχία ουρά FCFS $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ (Ευστάθεια)	Στάσιμη Κατανομή Πελατών $N \sim Geom(\rho)$ στο N_0 $\pi_n = P(N = n) = \rho^n(1-\rho), \rho = \frac{\lambda}{\mu}$ Ποσοστό Χρόνου σύστημα άδειο $\pi_0 = 1 - \rho$ Μέσο Πλήθος Πελατών $L = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$ (σύστημα), $L_q = \frac{\lambda\rho}{\mu-\lambda}$ (αναμονή) Μέσος Χρόνος Παραμονής $W = \frac{1}{\mu-\lambda}$ (σύστημα), $W_q \frac{\rho}{\mu-\lambda}$ (αναμονή) Κατανομή Χρόνου Παραμονής $\boldsymbol{w} \sim Exp\big((1-\rho)\mu\big)$

Η M/M/1/k Ουρά



Βασικά Χαρακτηριστικά

Διαδικασία Αφίξεων Poisson ρυθμού λ – Interarrival Times i.i.d. $\sim Exp(\lambda)$

Χρόνοι εξυπηρετησης i.i.d. $\sim Exp(\mu)$, $E(\mathcal{W}_s) = \frac{1}{\mu}$

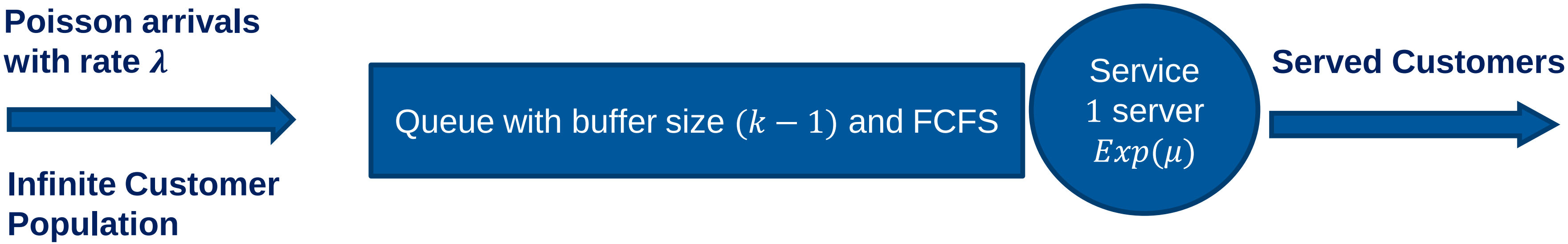
$s = 1$ υπηρέτης

Πεπερασμένη χωρητικότητα $(k < \infty)$. **Δεν** εισέρχονται όλοι στο σύστημα

Εξυπηρέτηση: 1 θέση, Αναμονή: k-1 θέσεις

Πειθαρχία ουρά FCFS - Το σύστημα ευσταθές για κάθε λ, μ

H M/M/1/k Ουρά – Ανάλυση Στασιμότητας



Έστω η σ.δ. $N(t)=$ το πλήθος των πελατών στο Σύστημα τη χρονική στιγμή t.

Χώρος καταστάσεων $S=\{0,1,\ldots,k\}$ και χρόνοι μετάβασης:

Αρχική Κατάσταση	Επόμενη Κατάσταση	Επεξήγηση	Χρόνος Μετάβασης
0	1	νέα άφιξη	$Exp(\lambda)$
$1 \leq n \leq \mathrm{k}-1$	$n+1$	νέα άφιξη	$Exp(\lambda)$
$1 \leq n \leq \mathrm{k}$	$n-1$	αναχώρηση λόγω ολοκλήρωσης εξυπηρέτησης	$Exp(\mu)$

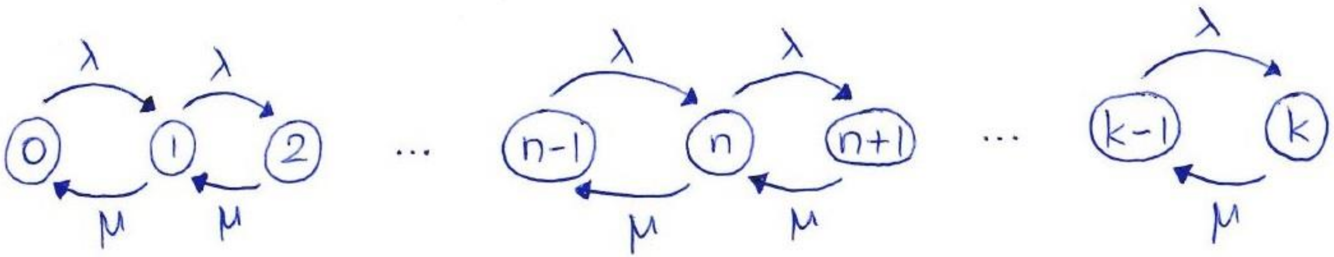
Η M/M/1/k Ουρά – Ανάλυση Στασιμότητας

Άρα η σ.δ. $\{N(t): t \geq 0\}$ είναι διαδικασία γέννησης-θανάτου με ρυθμούς:

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq n \leq \mathrm{k}-1: \lambda_n = \lambda \text{ (γέννησης)}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq \mathrm{k}: \mu_n = \mu \text{ (θανάτου)}$$

και διάγραμμα ρυθμών μετάβασης:



Η M/M/1/k Ουρά – Ανάλυση Στασιμότητας

Έστω οι στάσιμες πιθανότητες $\pi_n, n \in \mathbb{N}_0$. Θεωρούμε την ακολουθία

$$C_n \equiv \frac{\lambda_0\lambda_1 \ldots \lambda_{n-2}\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2 \ldots \mu_{n-1}\mu_n} = \frac{\lambda\cdot\lambda\cdot\cdots\cdot\lambda\cdot\lambda}{\mu\cdot\mu\cdot\cdots\cdot\mu\cdot\mu} = \begin{cases} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n, 0 \le n \le k \\ 0, n \ge k+1 \end{cases} = \begin{cases} \rho^n, 0 \le n \le k \\ 0, n \ge k+1 \end{cases}, \rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n = \sum_{n=0}^{k} C_n + \sum_{n=k+1}^{\infty} C_n = \sum_{n=0}^{k} \rho^n + \sum_{n=k+1}^{\infty} 0 = \begin{cases} \dfrac{1-\rho^{k+1}}{1-\rho}, & \rho \ne 1, \\ k+1, & \rho = 1. \end{cases}$$

Άρα σε κάθε περίπτωση το άθροισμα είναι πεπερασμένο και άρα υπάρχει στάσιιμη κατανομή για κάθε λ, μ.

$$\pi_0 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n\right)^{-1} = \begin{cases} \frac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}}, & \rho \ne 1, \\ \frac{1}{k+1}, & \rho = 1. \end{cases}$$

Ποσοστό χρόνου που το σύστημα είναι άδειο

Η M/M/1/k Ουρά – Στάσιμη Κατανομή

Η στάσιμη κατανομή δίνεται από τις πιθανότητες:

$$\pi_n = \pi_0 C_n = \begin{cases} \rho^n \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}}, & \rho \neq 1, \\ \dfrac{1}{k+1}, & \rho = 1. \end{cases}$$

Παρατήρηση: Επειδή το σύστημα είναι πεπερασμένο, υπάρχει πάντα η στάσιμη κατανομή.

Αλλά ένα ποσοστό πελατών βρίσκει το σύστημα γεμάτο και αναχωρεί χωρίς να εισέρθει σε αυτό (χαμένοι πελάτες).

Ποσοστό των χαμένων πελατών= $1-\pi_k$ και άρα ο **ρυθμός των πραγματικών αφίξεων** είναι

$$\bar{\lambda} = \lambda(1-\pi_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \pi_n = \sum_{n=0}^{k-1} \lambda \pi_n$$

Η M/M/1/k Ουρά – Μέτρα Απόδοσης

Ανάλυση Μέσης Τιμής – Συνολικό Σύστημα Αν $\rho \neq 1$,

από Νόμο Little

$$L = E(N) = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(\mathrm{k}+1)\rho^{\mathrm{k}+1}}{1-\rho^{k+1}} \qquad W = \frac{L}{\bar{\lambda}} = \frac{\dfrac{\rho}{1-\rho} - \dfrac{(\mathrm{k}+1)\rho^{\mathrm{k}+1}}{1-\rho^{k+1}}}{\lambda(1-\pi_k)}$$

Ανάλυση Μέσης Τιμής – Χώρος Αναμονής

$$L_q = \mathrm{L} - (1-\pi_0) = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(\mathrm{k}+1)\rho^{\mathrm{k}+1}}{1-\rho^{k+1}} - 1 + \frac{1-\rho}{1-\rho^{k+1}}$$

από Νόμο Little

$$W_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}}$$

Όταν $s = 1$,

$$L_q = L - (1-\pi_0) = L - \rho$$

Proof

$L_q = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\pi_n = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi_n - \sum_{n=1}^{\infty}\pi_n = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n - (1-\pi_0) = \mathrm{L} - (1-\pi_0) = \mathrm{L} - \rho$

Η M/M/s Ουρά

Βασικά Χαρακτηριστικά

Διαδικασία Αφίξεων Poisson ρυθμού λ

Χρόνοι εξυπηρετησης i.i.d. $\sim Exp(\mu)$,

s παράλληλοι υπηρέτες

Άπειρη χωρητικότητα ($k = \infty$).

Εισέρχονται όλοι στο σύστημα

Πειθαρχία ουρά FCFS

$\rho = \frac{\lambda}{s\mu} < 1$ (Ευστάθεια)

Βασικά Αποτελέσματα: Αν $\lambda < s\mu$

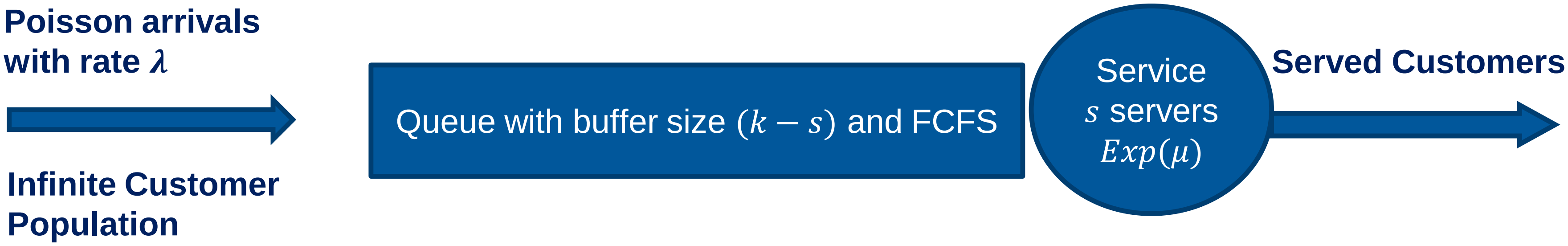
Στάσιμη Κατανομή Πελατών

$\pi_n = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!}\pi_0, 0 \leq n \leq s-1$ και $\pi_n = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{s!s^{n-s}}\pi_0, n \geq s$

Ποσοστό Χρόνου σύστημα άδειο $\pi_0 = \left(\sum_{n=0}^{s-1}\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!(1-p)}\right)^{-1}$

- $L_q = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s}{s!}\pi_0\frac{\rho}{(1-\rho)^2}$, $W_q = \frac{L_q}{\lambda}$ (από Little)
- $W = W_q + \frac{1}{\mu}, \mathrm{L} = \lambda\mathrm{W} = \lambda\left(W_q + \frac{1}{\mu}\right) = \mathrm{L_q} + \frac{\lambda}{\mu}$

Η M/M/s/k Ουρά



Βασικά Χαρακτηριστικά

Διαδικασία Αφίξεων Poisson ρυθμού λ – Interarrival Times i.i.d. $\sim Exp(\lambda)$

Χρόνοι εξυπηρετησης i.i.d. $\sim Exp(\mu)$, $E(\boldsymbol{w}_s) = \frac{1}{\mu}$

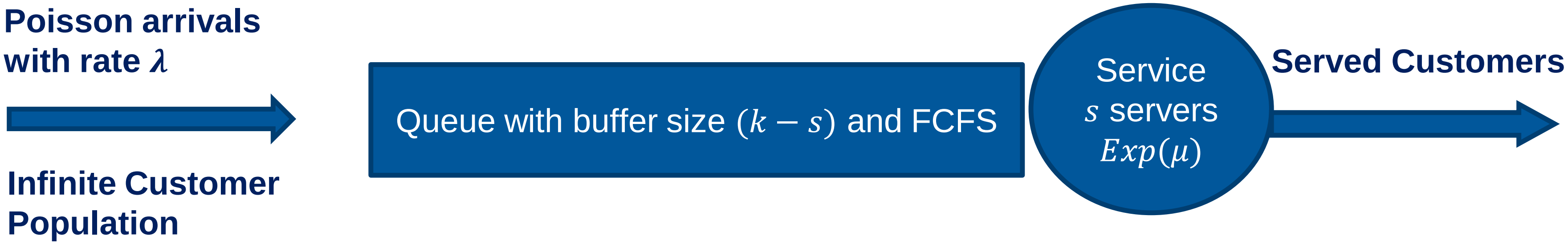
s παράλληλοι υπηρέτης

Πεπερασμένη χωρητικότητα $(k < \infty)$. **Δεν** εισέρχονται όλοι στο σύστημα

Εξυπηρέτηση: s θέσεις, Αναμονή: $k - s$ θέσεις

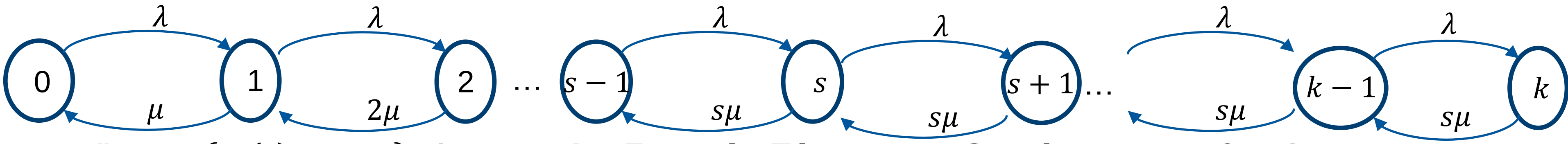
Πειθαρχία ουρά FCFS - Το σύστημα ευσταθές για κάθε λ, μ

Η M/M/s/k Ουρά – Ανάλυση Στασιμότητας



Έστω η σ.δ. $N(t)$ = το πλήθος των πελατών στο Σύστημα τη χρονική στιγμή t.

Χώρος καταστάσεων $S = \{0,1,2,\dots,k\}$ και διάγραμμα ρυθμών μετάβασης:



Άρα η $\{N(t): t \geq 0\}$ είναι μια **Διαδικασία Γέννησης–Θανάτου** με ρυθμούς

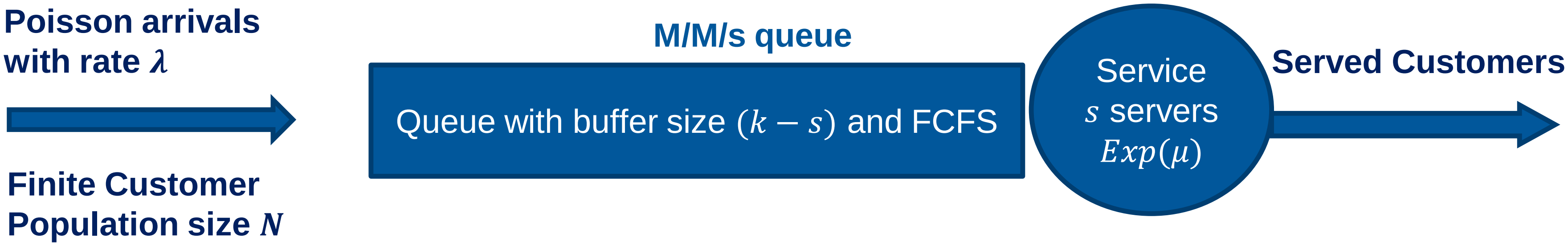
$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_n = \lambda, 0 \leq n \leq k-1 \\ \mu_n = \begin{cases} n\mu, & 0 \leq n \leq s-1, k > s \\ s\mu, & s \leq n \leq k \end{cases} \end{array}\right\}$$

Πεπερασμένη Χωρητικότητα

$\exists$ στάσιμη κατανομή $\forall\ \lambda, \mu$

Στους ρυθμούς εξυπηρέτησης λάβαμε υπόψιν ότι τρέχουν παράλληλοι εκθετικοί χρόνοι.

Πεπερασμένος Πληθυσμός Πελατών



Βασικά Χαρακτηριστικά

Πεπερασμένος Πληθυσμός Πελατών (Πηγή) μεγέθους N

Διαδικασία Αφίξεων Poisson ρυθμού λ – Interarrival Times i.i.d. $\sim Exp(\lambda)$

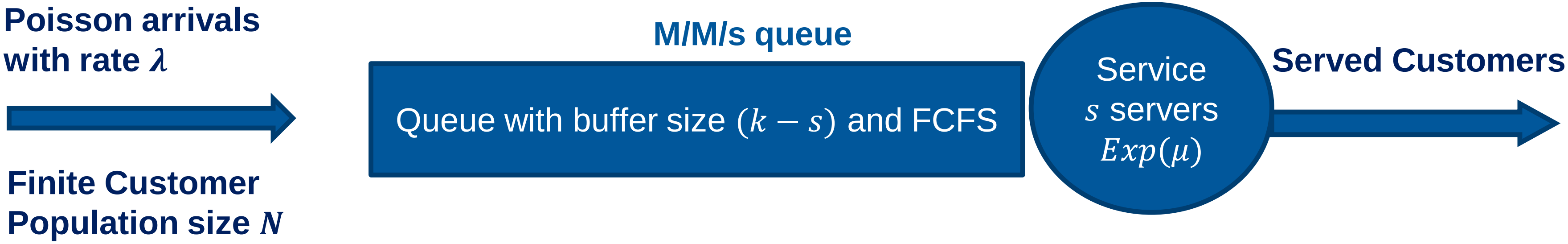
Χρόνοι εξυπηρέτησης i.i.d. $\sim Exp(\mu)$, $E(\boldsymbol{w_s}) = \frac{1}{\mu}$

s παράλληλοι υπηρέτες. Άπειρη χωρητικότητα $(k < \infty)$.

Πειθαρχία ουρά FCFS - Το σύστημα ευσταθές για κάθε λ, μ

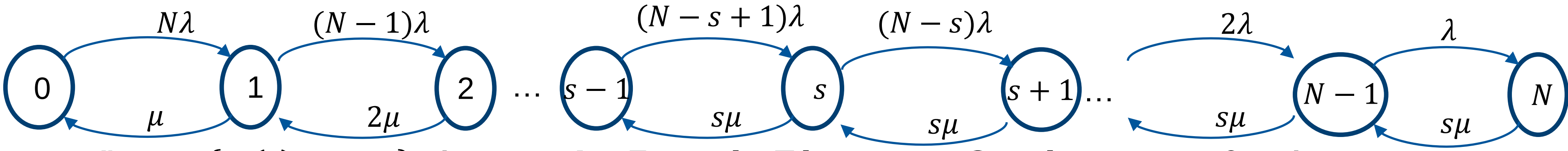
Εισέρχονται όλοι στο σύστημα, αλλά είναι πεπερασμένοι σε πλήθος.

Πεπ. Πληθυσμός Πελατων– Ανάλυση Στασιμότητας



Έστω η σ.δ. $N(t)$ = το πλήθος των πελατών στο Σύστημα τη χρονική στιγμή t.

Χώρος καταστάσεων $S = \{0,1,2,\dots,N\}$ και διάγραμμα ρυθμών μετάβασης:



Άρα η $\{N(t): t \geq 0\}$ είναι μια **Διαδικασία Γέννησης–Θανάτου** με ρυθμούς

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_n = (N-n)\lambda, 0 \leq n \leq N-1 \\ \mu_n = \begin{cases} n\mu, & 0 \leq n \leq s-1 \\ s\mu, & s \leq n \leq k \end{cases} \quad ,k > s \end{array}\right\}$$

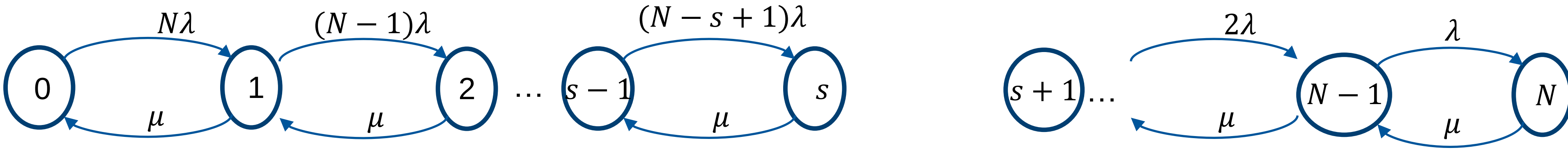
Πεπερασμένες Καταστάσεις

∃ στάσιμη κατανομή ∀ λ, μ

Σε αφίξεις και αναχωρήσεις λάβαμε υπόψιν ότι τρέχουν παράλληλοι εκθετικοί χρόνοι.

Πεπ. Πληθυσμός Πελατων για $s = 1$

Διάγραμμα Ρυθμών Μετάβασης



Ανάλυση Στασιμότητας

Έστω οι στάσιμες πιθανότητες $\pi_n, n \in \mathbb{N}_0$. Θεωρούμε την ακολουθία

$$C_n \equiv \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-2} \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{n-1} \mu_n} = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \mathrm{N!}}{(\mathrm{N-n})!}, 0 \leq n \leq N$$

Πεπ. Πληθυσμός Πελατων για $s = 1$

Στάσιμη Κατανομή

$$\pi_0 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n\right)^{-1} = \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \mathrm{N}!}{(\mathrm{N}-\mathrm{n})!}\right)^{-1}$$

$$\pi_n = C_n \pi_0 = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \mathrm{N}!}{(\mathrm{N}-\mathrm{n})!} \pi_0, 1 \leq n \leq N$$

Πεπ. Πληθυσμός Πελατων για $s = 1$

Μέτρα Απόδοσης

- Little με $\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{N} \lambda_n \pi_n = \lambda(\mathrm{N} - L)$ για W και W_q
- Δύσκολος ο απευθείας υπολογισμός $L = E(N) = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n$ λόγω της μορφής της π_n
- Υπολογίζω την

$$L_q = E(N_q) = \sum_{n=1}^{N} (n-1)\pi_n = N - \frac{\mu}{\lambda}(1 - \pi_0)$$

$$L = L_q + \rho = N - \frac{\mu}{\lambda}(1 - \pi_0) + \frac{\mu}{\lambda} = \mathrm{N} + \frac{\mu}{\lambda}\pi_0 = \mathrm{N} + \frac{\mu}{\lambda}\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \mathrm{N}!}{(\mathrm{N}-\mathrm{n})!}\right)^{-1}$$

$$W = L/\bar{\lambda} \text{ και } W_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}}$$

Η M/G/1 Ουρά – Non Markovian Model

Βασικά Χαρακτηριστικά

Διαδικασία Αφίξεων Poisson ρυθμού λ – Interarrival Times i.i.d. $\sim Exp(\lambda)$

Χρόνοι εξυπηρετησης i.i.d. $\sim \mathrm{G}$, $E(\mathcal{W}_s) = b = \frac{1}{\mu}$ (από οποιαδήποτε κατανομή)

$s = 1$ υπηρέτης

Άπειρη χωρητικότητα ($k = \infty$). Εισέρχονται όλοι στο σύστημα

Πειθαρχία ουρά FCFS - $\rho = \lambda b = \lambda \cdot \frac{1}{\mu} < 1$ (Ευστάθεια)

Η M/G/1 Ουρά – Non Markovian Model

Βασικά Αποτελέσματα:

- Η σ.δ. $\{N(t): t \geq 0\}$ έχει στάσιμη κατανομή π_n ανν $\rho = \lambda \cdot \frac{1}{\mu} = \lambda E(S) < 1 \Leftrightarrow \lambda < \mu$.
- $\pi_0 = 1 - \rho$ πιθανότητα κενού συστήματος

Τύπος Pollaczek–Khinchine για $\boldsymbol{L_q}$:

$$L_q = \frac{\lambda^2\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)}.$$

- Συνεχίζει να ισχύει ο Νόμος του Little και τα γενικά αποτελέσματα για τα μέτρα:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}, W = W_q + \frac{1}{\mu}, L = \lambda W, L = L_q + \rho$$

Η M/G/1 Ουρά – Non Markovian Model

1η Εφαρμογή: Η M/M/1 Ουρά – Service Times $S_1, S_2, \ldots \sim Exp(\mu)\ iid$

- Η σ.δ. $\{N(t): t \geq 0\}$ έχει στάσιμη κατανομή π_n ανν $\rho = \lambda E(S) = \lambda \cdot \frac{1}{\mu} < 1 \Leftrightarrow \lambda < \mu$.
- $\pi_0 = 1 - \rho$ πιθανότητα κενού συστήματος

Τύπος Pollaczek–Khinchine για $\boldsymbol{L_q}$: Για την εφαρμογή $\sigma^2 = \mathrm{Var(S)} = \frac{1}{\mu^2}$

$$L_q = \frac{\lambda^2\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{\lambda^2 \frac{1}{\mu^2} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{2\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)} = \frac{2\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{2\left(\frac{\mu-\lambda}{\mu}\right)} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}.$$

- Συνεχίζει να ισχύει ο Νόμος του Little και τα γενικά αποτελέσματα για τα μέτρα:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu-\lambda} \Rightarrow L = \lambda W = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

Η M/G/1 Ουρά – Non Markovian Model

2^{η} Εφαρμογή: Η $M/D/1$ Ουρά–Service Times $S_1, S_2, \ldots = \frac{1}{\mu}$ $(\sigma\tau\alpha\theta.)$

- Η σ.δ. $\{N(t): t \geq 0\}$ έχει στάσιμη κατανομή π_n ανν $\rho = \lambda E(S) = \lambda \cdot \frac{1}{\mu} < 1 \Leftrightarrow \lambda < \mu$.
- $\pi_0 = 1 - \rho$ πιθανότητα κενού συστήματος

Τύπος Pollaczek–Khinchine για $\boldsymbol{L_q}$: Για την εφαρμογή $\sigma^2 = \mathrm{Var(S)} = 0$ ($\nexists$τυχαιότητα)

$$L_q = \frac{\lambda^2\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{\lambda^2 0 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{2\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)} = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{2\left(\frac{\mu - \lambda}{\mu}\right)} = \frac{\lambda^2}{2\mu(\mu - \lambda)}.$$

- Συνεχίζει να ισχύει ο Νόμος του Little και τα γενικά αποτελέσματα για τα μέτρα:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\lambda}{2\mu(\mu - \lambda)}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{2\mu(\mu - \lambda)} + \frac{1}{\mu} = \frac{2\mu - \lambda}{2\mu(\mu - \lambda)} \Rightarrow L = \lambda W = \frac{\lambda(2\mu - \lambda)}{2\mu(\mu - \lambda)}$$

Η M/G/1 Ουρά – Non Markovian Model

3η Εφαρμογή: Η M/E$_k$/1 Ουρά–Service Times $S_1, S_2, \ldots \sim Erlang(k,\mu)$

- Για τους υπολογισμούς θα χρειαστούμε $E(S) = \frac{k}{\mu}$ και $Var(S) = \frac{k}{\mu^2}$
- Η σ.δ. $\{N(t): t \geq 0\}$ έχει στάσιμη κατανομή π_n ανν $\rho = \lambda E(S) = \lambda \cdot \frac{k}{\mu} < 1 \Leftrightarrow \lambda < \frac{\mu}{k}$.
- $\pi_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{\lambda k}{\mu}$ πιθανότητα κενού συστήματος

Τύπος Pollaczek–Khinchine για $\boldsymbol{L_q}$: $L_q = \frac{\lambda^2\sigma^2+\rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{\frac{\lambda^2 k}{\mu^2}+\left(\frac{\lambda k}{\mu}\right)^2}{2\left(1-\frac{\lambda k}{\mu}\right)} = \frac{k\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2(k+1)}{2\left(\frac{\mu-\lambda k}{\mu}\right)} = \frac{\lambda^2 k(k+1)}{2\mu(\mu-\lambda k)}$.

- Συνεχίζει να ισχύει ο Νόμος του Little και τα γενικά αποτελέσματα για τα μέτρα:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\lambda k(k+1)}{2\mu(\mu-\lambda k)}$$

$$W = W_q + \frac{k}{\mu} = \frac{\lambda k(k+1)}{2\mu(\mu-\lambda k)} + \frac{k}{\mu} \Rightarrow L = \lambda W = \frac{\lambda^2 k(k+1)}{2\mu(\mu-\lambda k)} + \rho = L_q + \rho$$

Απλές Μαρκοβιανές Ουρές – Ενδεικτική Βιβλιογραφία

- **Hillier and Lieberman, “Introduction to Operations Research”, 8th edition**
  Chapter 17 Queueing Theory, par. 5-6, p.p. 780-791.

- **Δ. Φακίνος, “Ουρές Αναμονής”, Εκδόσεις Συμμετρία 2003**
  Κεφάλαιο 3, παρ. 1-5 σελ. 124-154, Κεφ. 2, παρ. 1-6, σελ. 99-117.

- **Α. Οικονόμου, “Θεωρία Ουρών Αναμονής”, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις, Τμήμα Μαθηματικών ΕΚΠΑ**
  Κεφάλαιο 5 σελ. 30-42.