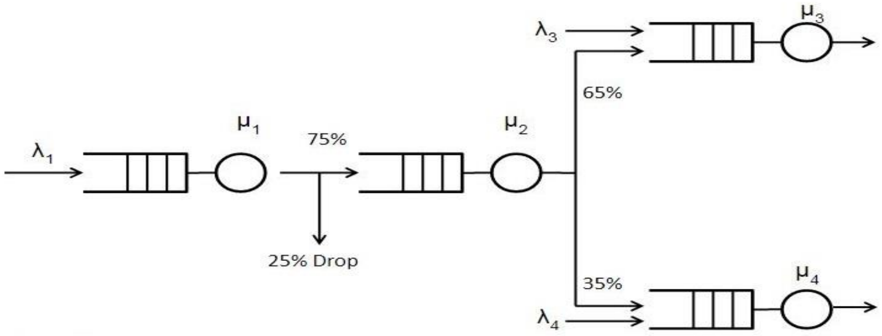
Δ.Π.Μ.Σ Μαθηματικά της Αγοράς και της Παραγωγής

Μαθηματικά Υποδείγματα Παραγωγής, Εφοδιαστικής και Υπηρεσιών ΙΙ - Ουρές Αναμονής ΜΑΘΗΜΑ 6ο

Γιάννης Δημητρακόπουλος, PhD in OR
Τμήμα Μαθηματικών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Δίκτυα Ουρών (Queueing Networks)



A network of queues.

Βασικά Χαρακτηριστικά

- περισσότερα από ένα Συστήματα Εξυπηρέτησης που συνδέονται.
- οι πελάτες πρέπει να περάσουν από κάποιους ή/και όλους τους Σταθμούς για να ολοκληρώσουν μία εξυπηρέτηση και να αναχωρήσουν από το δίκτυο.
- Περιοριζόμαστε σε δίκτυα που ισχύει η μορφή γινομένου (product form) για τη στάσιμη κατανομή των πελατών στο δίκτυο. (Δίκτυα Jackson)

$$P(N_1 = n_1, N_2 = n_2, \dots N_{\mathrm{M}} = n_{\mathrm{M}}) = P(N_1 = n_1)P(N_2 = n_2) \dots P(N_M = n_M),$$

- N_i το μακροπρόθεσμο πλήθος πελατών στο σύστημα i
- $\pi_{n_i} = P(N_i = n_i)$ η στάσιμη κατανομή του πλήθους των πελατών στο σύστημα O_i.

Δίκτυα Jackson

Equivalence Property (Βασική Ιδιότητα για την product form)

Οι στιγμές αναχωρήσεων σε κάθε στάσιμη απλή Μαρκοβιανή ουρά με Poisson αφίξεις ρυθμού λ σχηματίζουν επίσης μία διαδικασία Poisson του ίδιου ρυθμού, δηλ. ρυθμού λ.

Παρατήρηση: Αν οι αναχωρήσεις πελατών από ένα σταθμό, δημιουργούν αφίξεις σε έναν άλλο, τότε αυτές θα γίνονται σύμφωνα με δ. Poisson ρυθμού λ.

Δίκτυα Jackson

Δίκτυα απλών Μαρκοβιανών Ουρών όπου οι μεταβάσεις των πελατών μεταξύ των ουρών του δικτύου γίνονται με τυχαίο τρόπο, σύμφωνα με μία διακριτή κατανομή (p_{ij}), όπου p_{ij} η πιθανότητα μετάβασης πελάτη από την ουρά O_i στην ουρά O_j.

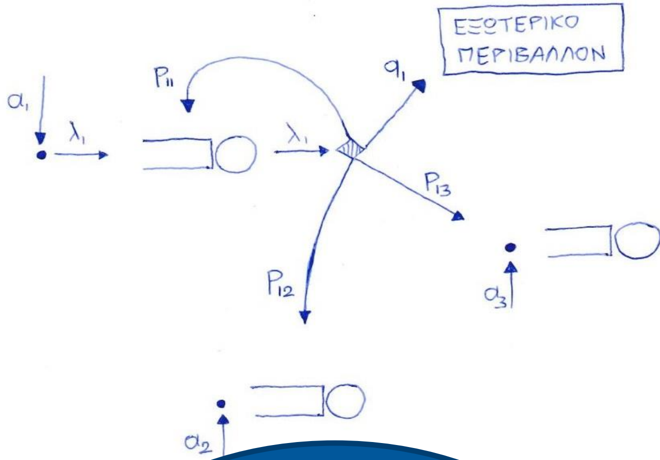
Είδη Jackson Networks:

- Ανοικτά, όταν επιτρέπονται αφίξεις και αναχωρήσεις πελατών από και προς το εξωτερικό περιβάλλον.
- Κλειστά, όταν δεν επιτρέπονται και στο δίκτυο κυκλοφορεί ένας σταθερός αριθμός πελατών.

Ανοικτά Δίκτυα Jackson

Ένα ανοικτό δίκτυο Jackson αποτελείται από:

- M σταθμούς εξυπηρέτησης όπου κάθε σταθμός $i = 1, \dots, M$ έχει:
  - Μία ουρά άπειρης χωρητικότητας
  - Εξωτερικές αφίξεις σύμφωνα με διαδικασία Poisson ρυθμού α_i
  - s_i παράλληλους υπηρέτες που εξυπηρετούν σε χρόνο $\sim Exp(\mu_i)$
- Πελάτης που ολοκληρώνει την εξυπηρέτησή του στην ουρά O_i αναχωρεί και μεταβαίνει στην ουρά O_j με πιθανότητα p_{ij} για j $= 1,2, \dots M$ ή αναχωρεί από το δίκτυο με πιθανότητα $q_i = 1 - \sum_{j \in \{1,2,\dots,M\}} p_{ij}$



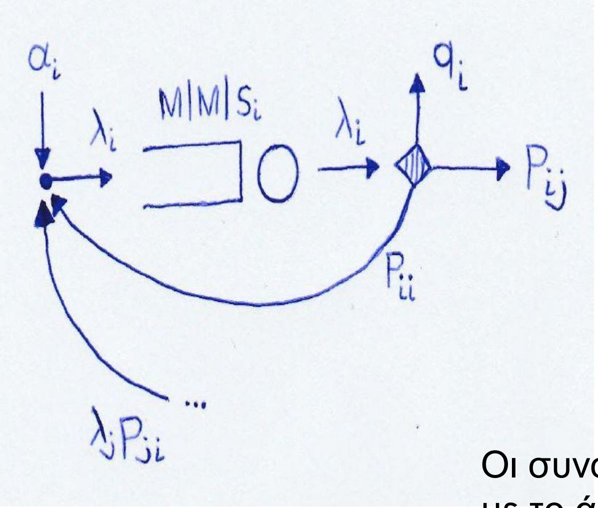
SOS!!! Οι ουρές O_i είναι M/M/s_i, αλλά με τί ρυθμό λ_i γίνονται οι αφίξεις σε κάθε ουρά;

Ανάλυση Στασιμότητας

Ο ρυθμός των αφίξεων στο Σύστημα i **δεν ταυτίζεται** με το ρυθμό εξωτερικών αφίξεων a_i.

Εάν λ_i είναι ο συνολικός (πραγματικός) ρυθμός αφίξεων στο Σύστημα O_i, τότε

Εξισώσεις Κίνησης: $\lambda_i = a_i + \sum_{j\in\{1,2,\ldots,M\}} \lambda_j p_{ji}$.



Εξωτ. Αφίξεις με διαδ. Poisson ρυθμού a_i

- Αναχωρήσεις από O_j με διαδ. Poisson ρυθμού λ_j (equivalence property)
- Πιθανότητα μετάβασης στην O_i με πιθανότητα p_{ji}
- Οι αφίξεις στην O_i από την O_j γίνονται με διαδ. Poisson ρυθμού $\lambda_j p_{ji}$ (από διάσπαση Poisson)

Οι συνολικές αφίξεις στην O_i γίνονται με διαδ. Poisson ρυθμού = με το άθροισμα των ρυθμών που μπαίνουν (από μείξη Poisson)

Ανάλυση Στασιμότητας

<u>ΒΗΜΑ 1</u>

Λύνουμε το παρακάτω σύστημα γραμμικών εξισώσεων (εξισώσεις κίνησης) ως προς λ_i.

$$\lambda_i = a_i + \sum_{j\in\{1,2,\dots,M\}} \lambda_j p_{ji} \,.$$

<u>ΒΗΜΑ 2</u>

Αναλύουμε κάθε ουρά ως προς τη στάσιμη κατανομή της. Η ουρά O_i είναι ευσταθής εάν και μόνον εάν

$$\rho_i = \frac{\lambda_i}{s_i \mu_i} < 1.$$

Η στάσιμη κατανομή του πλήθους πελατών στο σύστημα O_i, $\pi_{n_i} = P(N_i = n_i)$ δίνεται από τους τύπους της M/M/s_i.

<u>ΒΗΜΑ 3</u>

Η από κοινού στάσιμη κατανομή του πλήθους πελατών στο δίκτυο έχει τη μορφή γινομένου (ανεξαρτησία των $\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2, \dots, \mathrm{N}_\mathrm{M}$)

$$P(N_1 = n_1, N_2 = n_2, \dots, N_M = n_M) = P(N_1 = n_1) P(N_2 = n_2) \dots P(N_M = n_M).$$

Μέτρα Απόδοσης

Έστω $\rho_i = \frac{\lambda_i}{s_i \mu_i} < 1$, ώστε οι ουρές του δικτύου να είναι ευσταθείς.

<u>ΒΗΜΑ 1</u>

Τα μέτρα απόδοσης L_i, W_i, W_{qi}, L_{qi} υπολογίζονται για κάθε σύστημα O_i χωριστά σύμφωνα με τους τύπους της M/M/s_i.

<u>ΒΗΜΑ 2</u>

Τα μέτρα απόδοσης για το δίκτυο είναι:

Μέσος Αριθμός Πελατών στο Δίκτυο $L = L_1 + L_2 + \cdots + L_M$, όπου L_i το μέσο πλήθος πελατών στην O_i.

Μέσος Χρόνος Παραμονής Πελάτη στο Δίκτυο Προσοχή!!! $W \neq W_1 + W_2 + \cdots + W_M$

Ούτε είναι αναγκαστικό ότι ένας πελάτης θα περάσει απ' όλους τους σταθμούς, ούτε είναι αναγκαστικό ότι θα γνωρίζουμε πόσες φορές θα περάσει από κάθε σταθμό ξεχωριστά.

Η ισότητα ισχύει μόνο για ουρές **ΣΕ ΣΕΙΡΑ**.

Γενικά, αντιμετωπίζοντάς το δίκτυο **σαν black-box και εφαρμόζοντας Little**

$$W = \frac{L}{\sum_{i=1}^{M} a_i}.$$

Μέσος Χρόνος Παραμονής Πελάτη στο Δίκτυο

Έστω $\rho_i = \dfrac{\lambda_i}{s_i \mu_i} < 1$, ώστε οι ουρές του δικτύου να είναι ευσταθείς.

Έστω T_i ο μέσος χρόνος παραμονής στο δίκτυο ενός πελάτη που εισέρχεται σε αυτό μπαίνοντας στην ουρά O_i.
Με **first-step analysis**, έχουμε ότι ισχύουν (για κάθε $i \in \{1,2,\ldots,M\}$) οι εξισώσεις

$$T_i = W_i + \sum_{j=1}^{M} p_{ij} T_j \,.$$

Ο χρόνος που θα μείνει στο σύστημα O_i

Ο χρόνος μέχρι να φύγει από το δίκτυο αν η επόμενη μετάβαση είναι στο σύστημα O_j με πιθανότητα p_{ij}

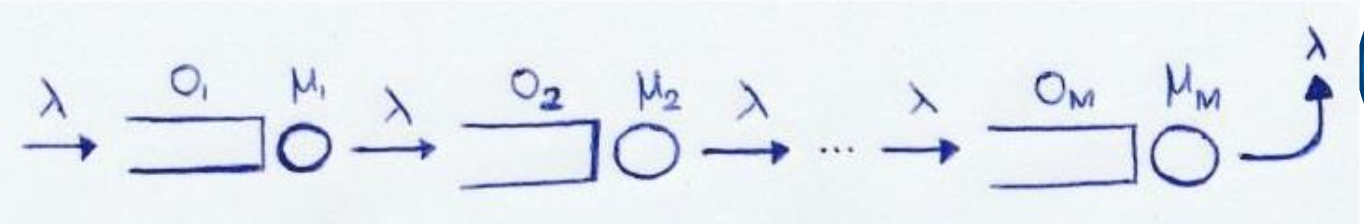
Ουρές σε Σειρά (queues in tandem)

Ένα (ανοικτό) δίκτυο ουρών σε σειρά είναι ένα ανοικτό Jackson και αποτελείται από:

- M σταθμούς εξυπηρέτησης όπου κάθε σταθμός

$i = 1, \ldots, M$ έχει:

  - Μία ουρά άπειρης χωρητικότητας
  - Εξωτερικές αφίξεις γίνονται μόνο στην ουρά O_1 σύμφωνα με διαδικασία Poisson ρυθμού λ και αναχωρήσεις προς το εξωτερικό περιβάλλον μόνο από την O_M.
  - s_i παράλληλους υπηρέτες που εξυπηρετούν σε χρόνο $\sim Exp(\mu_i)$
- Πελάτης που ολοκληρώνει την εξυπηρέτησή του στην ουρά O_i μεταβαίνει με πιθανότητα 1 στην επόμενη ουρά O_{i+1} ($p_{ii+1} = 1$) για $i = 1,2, \ldots M - 1$



SOS!!! Οι ουρές O_i είναι M/M/s_i, και οι αφίξεις σε κάθε ουρά γίνονται με ρυθμό λ (equivalence property)

Ανάλυση Στασιμότητας και Μέτρα Απόδοσης

<u>ΒΗΜΑ 1</u>

Εδώ αρκεί να αναλύσουμε κάθε ουρά ως προς τη στάσιμη κατανομή της με βάση το τύπο της M/M/s_i. Η ουρά O_i είναι ευσταθής εάν και μόνον εάν

$$\rho_i = \frac{\lambda}{s_i \mu_i} < 1.$$

Η στάσιμη κατανομή του πλήθους πελατών στο σύστημα O_i, $\pi_{n_i} = P(N_i = n_i)$ και δίνεται από τους τύπους της M/M/s_i.

<u>ΒΗΜΑ 2</u>

Η από κοινού στάσιμη κατανομή του πλήθους πελατών στο δίκτυο έχει τη μορφή γινομένου (ανεξαρτησία των $\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2, \dots, \mathrm{N}_\mathrm{M}$)

$$P(N_1 = n_1, N_2 = n_2, \dots, N_M = n_M) = P(N_1 = n_1)P(N_2 = n_2) \dots P(N_M = n_M).$$

<u>ΒΗΜΑ 3</u>

Έστω $\rho_i = \frac{\lambda_i}{s_i \mu_i} < 1$, ώστε οι ουρές του δικτύου να είναι ευσταθείς. Τα μέτρα απόδοσης L_i, W_i, W_{qi}, L_{qi} υπολογίζονται για κάθε σύστημα O_i χωριστά σύμφωνα με τους τύπους της M/M/s_i.

Μέτρα Απόδοσης Δικτύου

Έστω $\rho_i = \frac{\lambda}{s_i \mu_i} < 1$, ώστε οι ουρές του δικτύου να είναι ευσταθείς. Τα μέτρα απόδοσης για το δίκτυο είναι:

Μέσος Αριθμός Πελατών στο Δίκτυο

$$L = L_1 + L_2 + \cdots + L_M,$$

όπου L_i το μέσο πλήθος πελατών στην O_i.

Μέσος Χρόνος Παραμονής Πελάτη στο Δίκτυο

$$W = W_1 + W_2 + \cdots + W_M,$$

όπου W_i ο μέσος χρόνος παραμονής πελάτη στην O_i.

ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ ΣΧΟΛΙΟ:

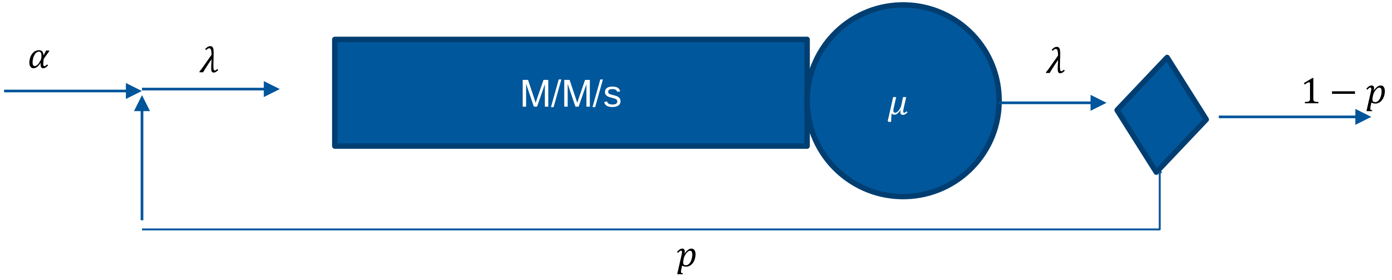
Τα παραπάνω θεωρητικά αποτελέσματα **δεν ισχύουν** εάν **έστω και μία** ουρά του δικτύου είναι **πεπερασμένης** χωρητικότητας λόγω του φαινομένου του **blocking**.

Βασική εφαρμογή: Imperfect Service

Έστω ένα σύστημα εξυπηρέτησης M/M/s με τα παρακάτω χαρακτηριστικά

- Οι πελάτες φθάνουν στο σύστημα σύμφωνα με διαδ. Poisson ρυθμού α και εισέρχονται σε αυτό.
- Οι πελάτες εξυπηρετούνται με ρυθμό εξυπηρέτησης μ.
- Κάθε πελάτης που ολοκληρώνει την εξυπηρέτηση του, δε μένει ικανοποιημένος με πιθανότητα p και επανέρχεται στο σύστημα.
- Με πιθανότητα $1-p$ αναχωρεί οριστικά από το σύστημα.
- Έστω λ ο πραγματικός ρυθμός εισόδου στην ουρά.

SOS!!! Πρόκειται για μία ουρά M/M/s αλλά αντιμετωπίζεται ως ανοικτό δίκτυο Jackson



Ανάλυση Στασιμότητας και Μέτρα Απόδοσης

<u>ΒΗΜΑ 1</u>

Λύνουμε το παρακάτω σύστημα γραμμικών εξισώσεων (εξισώσεις κίνησης) ως προς λ_i.

$$\lambda = \alpha + \lambda p \Rightarrow \lambda = \frac{\alpha}{1-p}.$$

<u>ΒΗΜΑ 2</u>

Η ουρά είναι ευσταθής εάν και μόνον εάν

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu} = \frac{\alpha}{s\mu(1-p)} < 1 \Leftrightarrow \mu > \frac{\alpha}{s(1-p)}.$$

Ευσταθές για μικρά μ, καθώς το αριστερό μέλος είναι αύξουσα συνάρτηση του p.

<u>ΒΗΜΑ 3</u>

Η στάσιμη κατανομή του πλήθους πελατών στο σύστημα προκύπτει από τους τύπους για M/M/s με

$$\lambda = \frac{\alpha}{1-p},$$

όπως και τα μέτρα απόδοσης αν $\mu > \frac{\alpha}{s(1-p)}$.

Ουρές με Προτεραιότητες – Δίκτυα Ουρών
Ενδεικτική Βιβλιογραφία

- **Hillier and Lieberman, "Introduction to Operations Research", 8th edition**
  Chapter 17 Queueing Theory, par. 9, p.p. 809-813.

- **Δ. Φακίνος, "Ουρές Αναμονής", Εκδόσεις Συμμετρία 2003**
  Κεφάλαιο 5, παρ. 1-3 σελ. 177-189,

- **Α. Οικονόμου, "Θεωρία Ουρών Αναμονής", Πανεπιστημιακές Σημειώσεις, Τμήμα Μαθηματικών ΕΚΠΑ**
  Κεφάλαιο 9 σελ. 77-82.