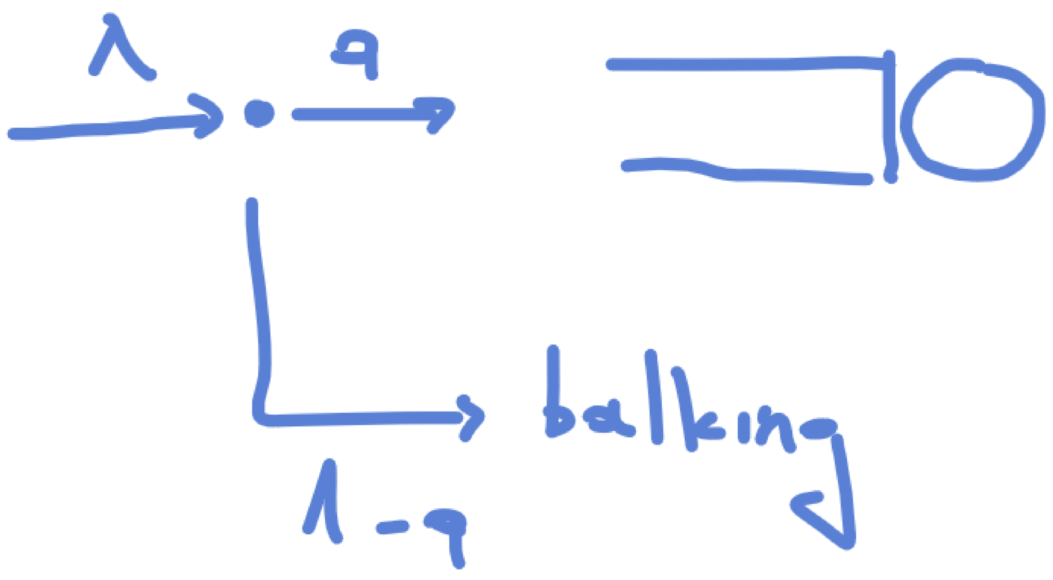
ΜΥΠ ΙΙ Διάλεξη 1η: 16/6/2021
Διάλεξη 2η: 18/6/2021




Διαδ. αφίξεων είναι δ. Poisson με ρυθμό λ.

λ = Δυνητικός ρυθμός αφίξεων.

Πελάτης που φθάνει στο σύστημα αποφασίζει αν θα μπει με πιθανότητα q

Ποιός είναι ο ρυθμός αφίξεων στο σύστημα; $\lambda_n = \lambda q$

Διάσπαση Poisson


δ.δ. Poisson με ρυθμούς $\lambda q_i$, $\sum q_i = 1$


1 υπηρέτης

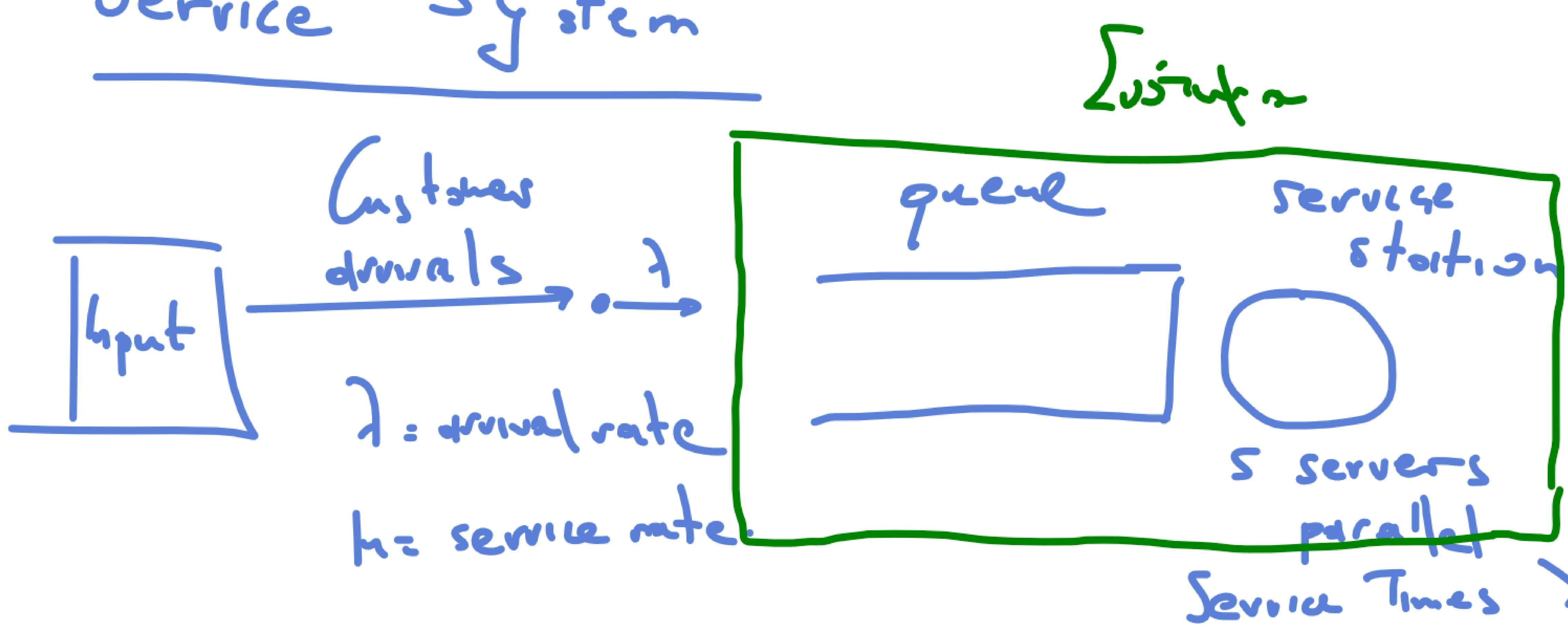
Αν $n \geq 5$ τότε ο υπηρέτης δουλεύει με διπλάσια ταχύτητα.

$X_1, X_2, X_3, \ldots \sim Exp(\mu)$

$$\mu_n = \begin{cases} \mu, & n < 5 \\ 2\mu, & n \geq 5 \end{cases}$$

Υπενθυμίσεις 1ης Διάλεξης.

Service System




Service Times $X_1, X_2, \ldots$ iid $\sim G$ με $b = E[X]$ " $1/\mu$

Η διαδικασία αφίξεων διαμορφώνεται ως εξής: $T_1, T_2, \ldots$ iid $\sim F$ με $1/\lambda = E[T]$

interarrival times

Συνήθως η διαδικασία αφίξεων είναι Poisson ρυθμού $\lambda$. Αυτό σημαίνει

ότι $T_1, T_2, T_3, \ldots \sim Exp(\lambda)$ → $M/M/s$

Συνήθως οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι $Exp(\mu)$

Παράδειγμα συμβολισμού: $D/G/2/10$. (SIKO).

- Διαδ. αφίξεων έχει interarrival times iid $\sim G$ με σταθερό μέσο $1/\lambda$.
- Διαδ. χρόνοι εξυπηρέτησης $X_1, X_2, \ldots \sim G$ με σταθ. μέσο $1/\mu = E[X]$
- 2 παράλληλοι υπηρέτες
- 10 χωρητικότητα συστήματος (θέσεις στο χώρο αναμονής)

Η δ.δ. $N(t)$ = πλήθος πελατών στο σύστημα τη στιγμή $t$. $=n$

Εξαρτάται — Τυχαίος μηχανισμός για αφίξεις πελατών
— " " για την εξυπηρέτηση

$\lambda_n$ = ρυθμός αφίξεων όταν η κατάσταση του συστήματος είναι $n$

$\mu_n$ = ρυθμός εξυπηρέτησης " " " " ".

Ρυθμός συνωστισμού $\rho = \dfrac{\lambda}{s\mu}$

Σύστημα ευσταθές αν $\rho < 1 \iff \lambda < s\mu$ τότε $\exists$ οριακή κατανομή

$$\pi_n = Pr[N = n]$$

Αν $\rho \geq 1$ τότε το σύστημα δεν είναι ευσταθές και η ουρά μακροπρόθεσμα απειρίζεται. Σε αυτή την περίπτωση θέτω $\pi_n = 0$.

Προσοχή!!! Αν το σύστημα έχει πεπ. χωρητικότητα τότε ευσταθές $\forall \lambda, \mu$ και $\forall \rho$.

Έστω ότι $N \sim \pi_n$ (δηλ. $\rho < 1$, ή άπειρη χωρητικότητα)

Τότε μέτρα απόδοσης:

Συνολικοί Πελάτες

$$L = E[N] = \sum_{n=0}^{\infty} n \pi_n$$

Χώρος Αναμονής

$$L_q = E[N_q] = \sum_{n=s}^{\infty} n \Pr[N \geq s] = \sum_{n=s}^{\infty} n \pi_n.$$

<u>Little</u>

$$W = \frac{L}{\bar{\lambda}}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}}.$$

$$\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \pi_n.$$

## Χώρος Εξυπηρέτησης

Έστω $\mu_n = \mu$ τότε $W_s = E\left[\begin{smallmatrix}\text{service}\\ \text{times}\end{smallmatrix}\right] = E(X) = \frac{1}{\mu}$

Τότε Little στο χώρο εξυπηρέτησης τότε $L_s = \lambda W_s = \frac{\lambda}{\mu} = \rho$. $\left(\begin{smallmatrix}s=1\\ \text{υπηρέτης}\end{smallmatrix}\right)$

και από άλλη $L_s = E[N_s] = 0 \cdot P_r[N=0] + 1 \cdot P_r[N \geq 1]$

$$\rho = P_r[N \geq 1] = 1 - \pi_0 \Rightarrow \underline{\underline{\pi_0 = 1 - \rho}}$$

## SoS!!

$$L = L_q + L_s \Rightarrow L = L_q + \rho$$
$$W = W_q + W_s \Rightarrow W = W_q + \frac{1}{\mu}$$
$\left[\begin{matrix}\mu_n = \mu, & \lambda_n = \lambda \\ s = 1\end{matrix}\right]$

## Εκθετική κατανομή

$X \sim Exp(\lambda) \Rightarrow f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \; x > 0 \quad (\lambda > 0)$

$$F_X(x) = P[X \leq x] = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0 & \text{διαφ.} \end{cases}$$

$$\bar{F}(x) = P[X > x] = e^{-\lambda x}, \; x > 0$$

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \int_0^\infty e^{tx} f(x)\,dx = \int_0^\infty e^{tx} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda - t)x}\,dx =$$
$$= \frac{\lambda}{\lambda - t} \int_0^\infty \cancel{(\lambda - t)} e^{-(\lambda - t)x}\,dx = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \quad \lambda - t > 0, \; t < \lambda.$$

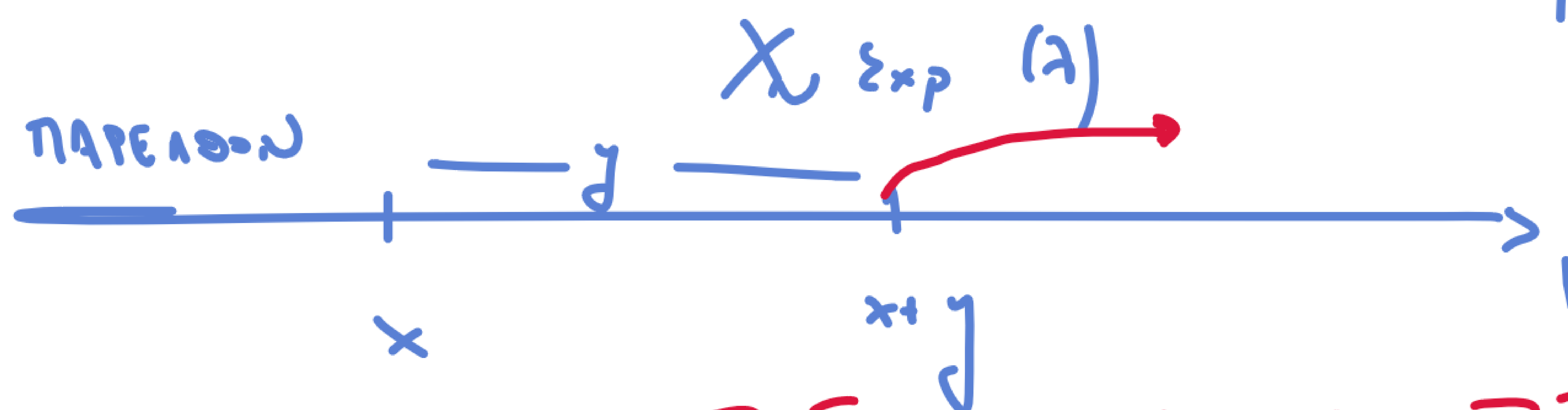
και διαφορετικά $M_X(t) = \infty$ αν $t \geq \lambda$.

$X_1, X_2, \ldots X_k$ ανεξάρτητες $\sim Exp(\lambda) \Rightarrow S = \sum_{i=1}^{k} X_i \sim E_k \equiv Gamma(k, \lambda)$

$$f_S(x) = \lambda^k / \Gamma(k) \, x^{k-1} e^{-\lambda x}, \; x > 0. \quad E[S] = \frac{k}{\lambda} \quad V(S) = \frac{k}{\lambda^2}$$

## Αμνήμονη Ιδιότητα

$$P_r[X > x + y \mid X > x] = P_r[X > y]$$




Ans. $P_r[X > x+y \mid X > x] = \dfrac{P_r[X > x+y, X > x]}{P_r[X > x]} = \dfrac{P_r[X > x+y]}{P_r[X > x]} = \dfrac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda x}} = e^{-\lambda y}$

$= \Pr[X>y]$.

**Επίσης**, αν $T_1, T_2, \dots T_n \sim Exp(\lambda_i)$ ανεξάρτητα $\Rightarrow U = \min T_i \sim Exp\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$

**Απόδ.** $\Pr[U>t] = \Pr[\min T_i > t] = P[T_1>t, T_2>t, \dots T_n>t] \overset{\text{ανεξ}}{=} \prod_{i=1}^{n} \Pr[T_i>t]$

$$= \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i t} = e^{-\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)t} \rightarrow U \sim Exp\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)$$

Η σ.δ. $N(t)$ Poisson ρυθμού $\lambda$ αν $S_1, S_2 \dots$ ενδιάμεσοι χρόνοι $\sim Exp(\lambda)$

$$\Leftrightarrow \quad \Pr[N(t)=n] = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \quad n=0,1,2\dots$$

**ΜΑΣΧ** $N(t)$ σ.δ. με αριθμήσιμο χ.κ. $S$ όπου ισχύει η Μαρκοβιανή ιδιότητα.

Περιοριζόμαστε σε χρονικά ομογενείς αλυσίδες

$$\dots \dots\; i \xrightarrow[\text{σε χρόνο } t]{P_{ij}(t)} j \qquad P_{ij}(t) = \Pr[N(s+t)=j \mid N(s)=i] = \Pr[N(t)=j \mid N(0)=i]$$

για να είναι η ΜΑΣΧ $N(t)$ πλήρως ορισμένη θα πρέπει να γνωρίζουμε

αρχική κατανομή $P(0) = P[N(0)=n]$.

πίνακας πιθ. μετάβασης
$$P(t) = (P_{ij}(t)) = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & \dots \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \end{matrix} & \begin{pmatrix} P_{00}(t) & P_{01}(t) & P_{02}(t) & \dots \\ P_{10}(t) & P_{11}(t) & P_{12}(t) & \dots \\ \vdots & & & \end{pmatrix} \end{array}$$

στοχαστικός πίνακας $P_{ij}(t) \geq 0$.

$\forall t, \forall i$ γραμμές αθροίζουν στο 1: $\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t) = 1$.

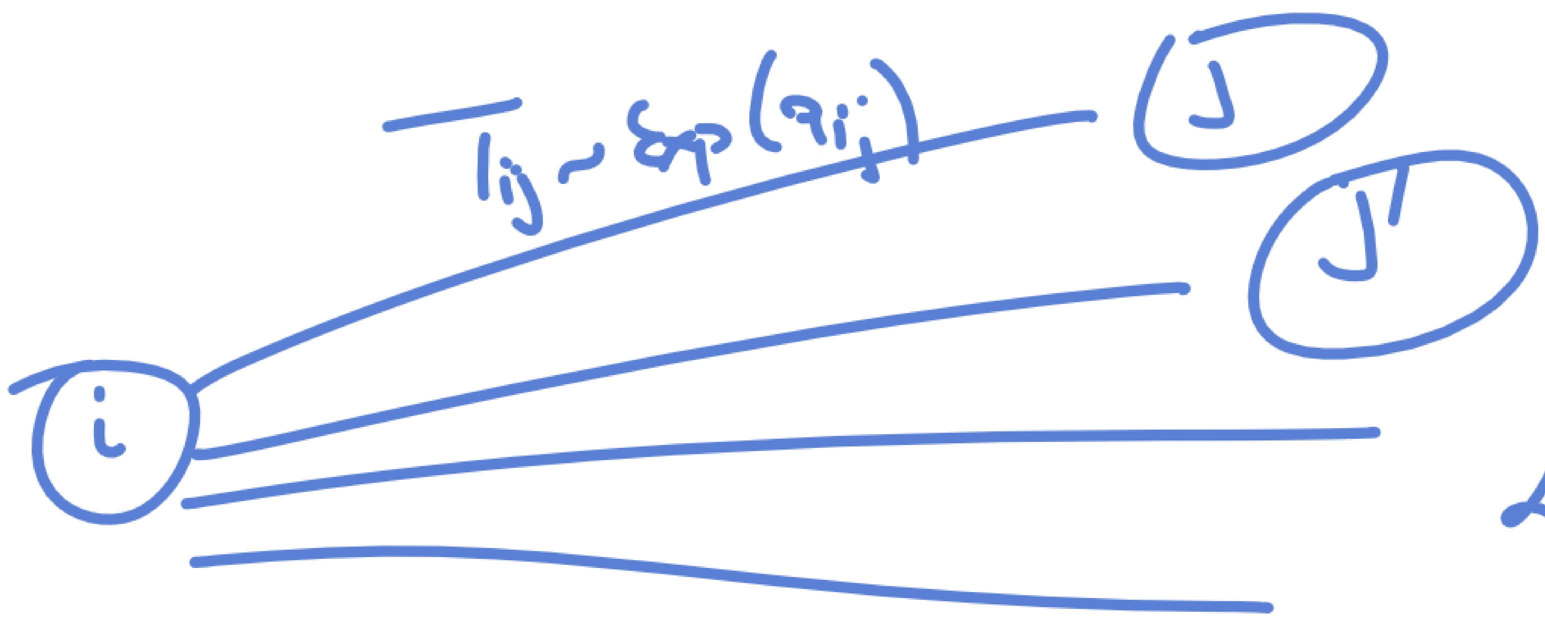
Ορίζω $T_i$ = χρόνος παραμονής στην $i$. για να ισχύει η Μαρκοβ. ιδιότητα $T_i \sim Exp(q_i)$

$T_{ij}$: χρόνος μετάβασης από την $i$ στην $j$. $T_{ij} \sim Exp(q_{ij})$

και $q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij}$

Μνημονικός: Πως μπορώ να σκεφτώ την εξέλιξη της διαδικασίας;

Έστω κάποια στιγμή παραμένω στη κατάσταση $i$.




Πότε θα γίνει η επόμενη μετάβαση.

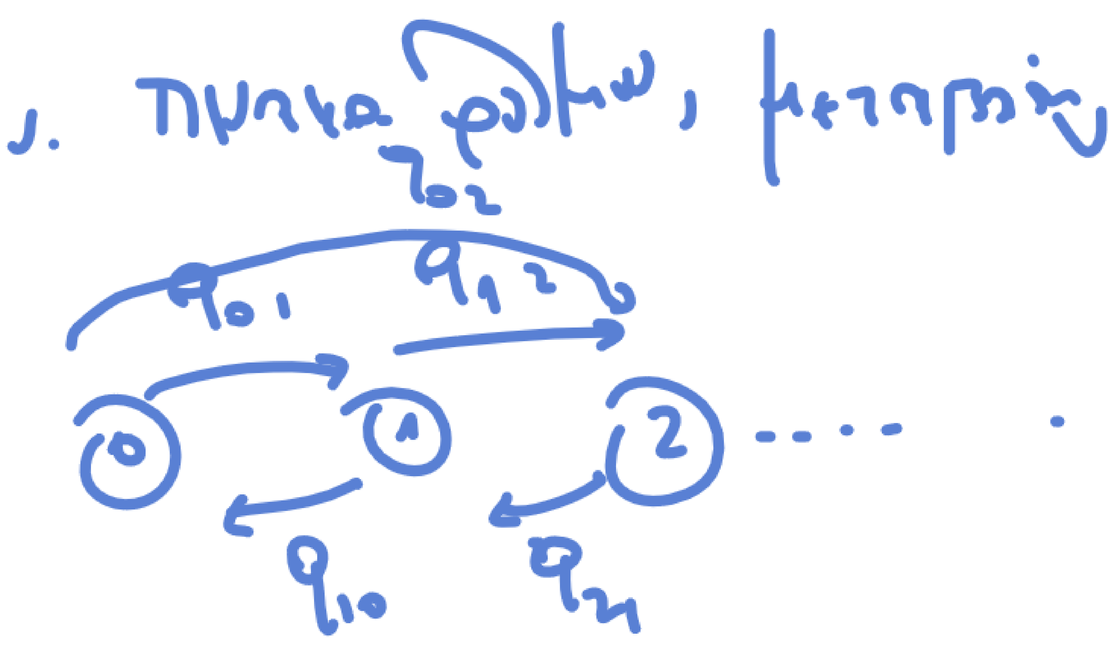
Σε χρόνο $T_i = \min_j T_{ij} \sim Exp\left(\sum_{j \neq i} q_{ij}\right)$, $Exp(q_i)$

$\Rightarrow q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij}$

και $P_r[T_i = T_{ij}$ για δεδομένο $j] = q_{ij}/q_i = P_{ij}$ ← ΜΑΔΧ

Μπορώ να ορίσω μία ΜΑΣχ $N(t)$ από τον πίνακα ρυθμών μετάβασης

$$Q = (q_{ij}) = \begin{pmatrix} -q_0 & q_{01} & q_{02} & \dots \\ q_{10} & -q_1 & q_{12} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \stackrel{+}{=} 0 \iff$$




Πως εξετάζω αν μία αλυσίδα είναι ΜΑΣΧ;

1) χ.κ. $S$ αριθμήσιμο

2) Οι χρόνοι μετάβασης από την κατάσταση $i$ στην $j$ είναι Exp.

## Εφαρμογή

2 μηχανές λειτουργούν παράλληλα. Χρόνος λειτουργίας $\sim Exp(1)$

1 τεχνικός για επισκευή. Ασχολείται σε μία μηχανή.

Χρόνος επισκευής $\sim Exp(2)$

Να μοντελοποιηθεί η σ.δ. $X(t)=$ # μηχανών εκτός λειτουργίας τη στιγμή $t$.

Ο χ.κ. $S=\{0,1,2\}$. (σύνολο τιμών της $X(t)$)

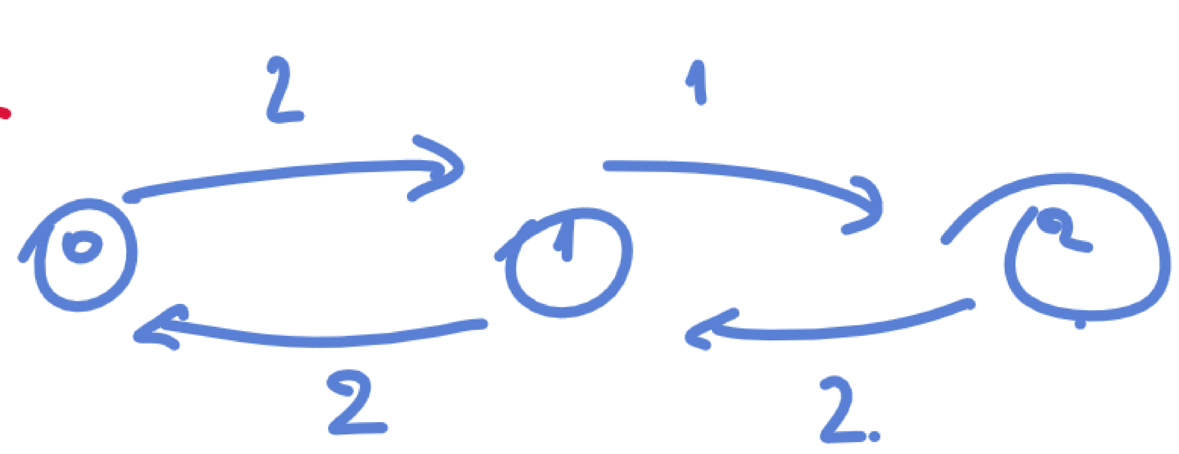
Θέλουμε να χαρακτηρίσουμε τους χρόνους μετάβασης

| Κατάσταση | Επομ. κατάσταση | Χρόνος |
|---|---|---|
| 0 | 1 | $\min\{Exp(1), Exp(1)\} = Exp(1+1)$ |
| 1 | 2 | $Exp(1)$ |
| 1 | 0 | $Exp(2)$ |
| 2 | 1 | $Exp(2)$ |

αν είχα 2 τεχνικούς → τότε θα είχα $\min\{Exp(2), Exp(2)\} = Exp(4)$

Άρα η $X(t)$ είναι ΜΑΣΧ με διάγραμμα ρυθμών μετάβασης

αδιαχώριστη

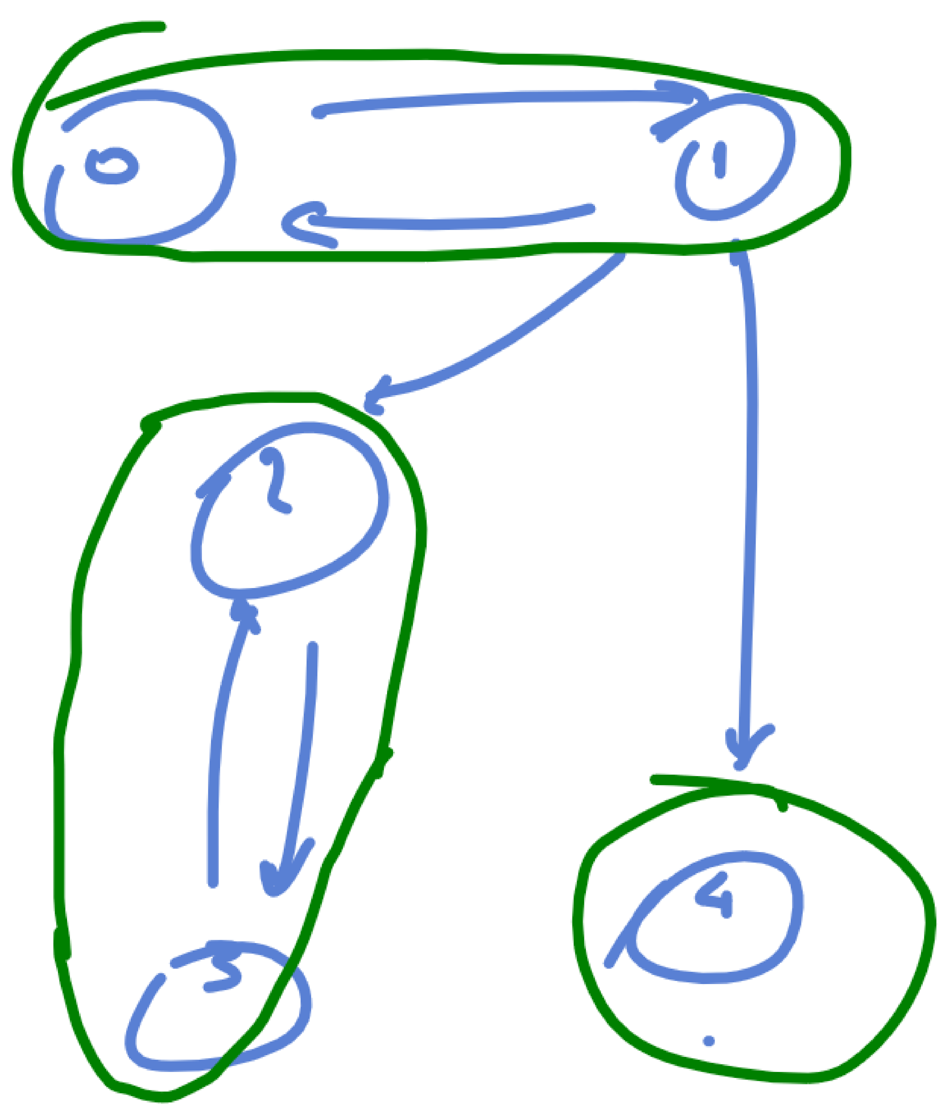


και π.ρ.μ.

$$Q = \begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \end{array}$$

### Χαρακτηρισμός ως προς την επικοινωνία.

Διάγραμμα ρυθμών μετάβασης



$k_1=\{0,1\}$ ανοικτό.

$k_2=\{2,3\}$ κλειστό

$k_3=\{4\}$ , άρα απορροφητική.

# M/M/1/1

→ Διαδ. Αφίξεων Poisson ρυθμού $\lambda$ $\Leftrightarrow$ Inter-Arrival times iid $\sim Exp(\lambda)$

→ Χρόνο. Εξυπηρέτησης $\sim Exp(\mu)$

→ 1 υπηρέτης

→ Χωρητικότητα 1. Χωρίς χώρο αναμονής. Πελάτες που βρίσκουν το σύστημα κατειλημμένο αποχωρούν.

Ο.Σ. $N(t) = \#$ πελατών στο σύστημα $t$.

π.χ. $S = \{0,1\}$ $\quad N(t) \sim$ ΑΜΣΧ με διάγραμμα ρ.μ.:

| Καταστ. | Επόμενη κατ. | Χρόνος |
|---|---|---|
| 0 | 1 | $Exp(\lambda)$ |
| 1 | 0 | $Exp(\mu)$ |

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 1 \arrow[l, bend left, "\mu"] \end{tikzcd}$$

Αδιαχώριστη + Πεπερασμένη Αλυσ. Θετικά επαναληπτική άρα $\exists\ \pi_j,\ j=0,1$ στάσιμη κατανομή που συμπίπτει με την οριακή.

Βρίσκω τη στάσιμη κατανομή του πλήθους πελατών.

Εξισώσεις Ισορροπίας

$j=0$ : $\cancel{\pi_0 \cdot \lambda = \pi_1 \mu}$

$j=1$ : $\pi_1 \mu = \pi_0 \lambda$

Εξ. κανονικοποίησης $\pi_0 + \pi_1 = 1.$

$\Rightarrow \pi_1 = \frac{\lambda}{\mu}\pi_0$

$\pi_0 + \frac{\lambda}{\mu}\pi_0 = 1 \Rightarrow$

$\pi_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}, \quad \pi_1 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}.$

Μέσα. Απόδοσης : $N \sim \pi_n$ $\quad L = E[N] = \sum_{n=0}^{1} n\pi_n = 0\pi_0 + 1\pi_1 = \lambda/(\lambda+\mu).$

$\bar{\lambda} = \lambda$ $\quad$ Little $\quad W = \frac{L}{\lambda} = \frac{\lambda/(\lambda+\mu)}{\lambda} = \frac{1}{\lambda+\mu} \neq 1/\mu = W_s$

γιατί υπολογίσαμε με arrival rate $\lambda$ που περιλαμβάνει και τους χαμένους πελάτες ενώ αυτό που εξυπηρετούνται πραγματικά είναι $\lambda \cdot \pi_0 = \lambda \cdot \mu/(\lambda+\mu) \Rightarrow W_{eff} = L/\lambda\pi_0 = 1/\mu.$