ΜΥΠ ΙΙ – Lecture 3 23/6/2021.

Η σ.δ. $\{N(t): t \geq 0\}$ ΜΑΣΧ αν ο χ.κ. S αριθμήσιμο $\subseteq \mathbb{N}_0$ και ικανοποιεί την Μαρκοβιανή Ιδιότητα.

$$Pr\big(\underbrace{N(t+s)=j}_{\text{ΜΕΛΛΟΝ}} \mid \underbrace{N(t)=i}_{\text{ΠΑΡΟΝ}}, \underbrace{N(u), u\leq s}_{\text{ΠΑΡΕΛΘΟΝ}}\big) = Pr\left[N(t+s)=j \mid N(s)=i\right]$$

Θεωρώ ΜΑΣΧ που έχουν χρονική ομογένεια:

πιθανότητα μετάβασης από i σε j σε χρόνο t.

$$Pr\left[N(t+s)=j \mid N(s)=i\right] = Pr\left[N(t)=j \mid N(0)=i\right] := p_{ij}(t)$$

συνάρτηση του t.

Μια ΜΑΣΧ ορίζεται πλήρως αν γνωρίζω (i) Αρχ. κατανομή $\mathbb{P}(0)=(p_i(0): i\in S)$

$p_i(0)=P[N(0)=i], i\in S$

(ii) πίνακα πιθ. μεταβ. $\mathbb{P}(t)=(p_{ij}(t))$

Ισοδύναμος ορισμός της ΜΑΣΧ με τους ρυθμούς μετάβασης.

Μαρκοβιανή Ιδιότητα $\Leftrightarrow$ Αμνήμονη Ιδιότητα αν τη δω σε χρόνους παραμονής

T_i = χρόνος παραμονής στην i $\sim Exp(q_i)$

T_{ij} = χρόνος μετάβασης από την i στην j $\sim Exp(q_{ij})$

Ποιά σχέση συνδέει q_i, q_{ij}; "Εκθετικά Ρολόγια"

Δείξαμε ότι $q_i = \sum_{j\neq i} q_{ij}$, $\forall i \in S$

και $p_{ij} = q_{ij}/q_i$ ← πιθανότητα μετάβασης από την i στην j στην ισοδύναμη διακριτή ΜΑΔΧ.

$p_{ii} = 0$

Μία δ.δ. $\{N(t): t \geq 0\}$ είναι ΜΑΣΧ αν χ.κ. $S \subseteq \mathbb{N}_0$ και δείξω ότι οι T_{ij} είναι Exp.

Οι παράμετροι q_{ij} των Exp είναι οι αντίστοιχοι ρυθμοί μετάβασης

$$Q = (q_{ij}) = \begin{pmatrix} -q_0 & q_{01} & q_{02} & \cdots \\ q_{10} & -q_1 & q_{12} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{pmatrix} \stackrel{+}{=} 0$$

Διάγραμμα ρυθμών μετάβασης

$$0 \qquad 1 \qquad 2 \quad \cdots \cdots \; i \xrightarrow{\;q_{ij}\;} j$$

Εργοδικό Θεώρημα

- Αν η αλυσίδα είναι διαχωρίσιμη και πεπερασμένη τότε είναι και θετικά επαναληπτική $\Rightarrow$ η οριακή κατανομή συμπίπτει με την στάσιμη κατανομή.

$$\lim_{t \to \infty} P(N(t) = j) := \pi_j$$

Στάσιμη κατανομή: Είναι η μοναδική λύση των εξισώσεων ισορροπίας

rate out = rate in για κάθε j

$$\pi_j q_j = \sum_{i \neq j} \pi_i q_{ij}$$

+ Εξίσωση κανονικοποίησης $\quad \sum \pi_j = 1.$

Αντίστροφα, αν το παραπάνω σύστημα έχει λύση τότε οι στάσιμες πιθανότ είναι και οι οριακές σε διαχωρίσιμη αλυσίδα

άρα π_j = μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου που η αλυσίδα μένει στην κατάσταση j.

Μεταβατικές καταστάσεις (transient) εάν $\pi_j = 0$

Μηδενικά Επαναληπτικές

Παράδειγμα: 2 μηχανές σε λειτουργία + 1 τεχνικό για επιδιόρθωση βλάβης

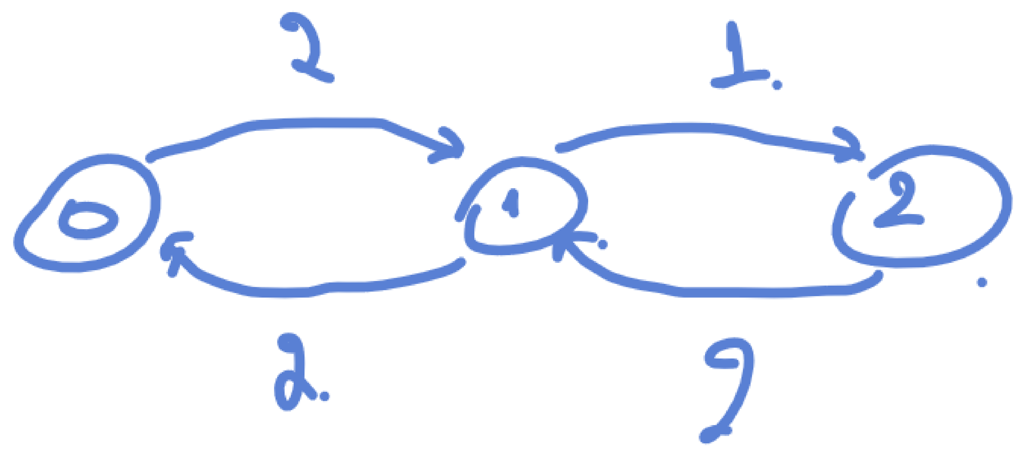
Χρόνο Συνεχούς Λειτουργίας $\sim Exp(1)$

Χρόνος Επιδιόρθωσης $\sim Exp(2)$

Να βρεθεί η στάσιμη κατανομή (αν υπάρχει) της $X(t)$ = # μηχανών που δεν λειτουργούν την t.

Είναι ΜΑΣΧ με χ.κ. $S=\{0,1,2\}$

και διάγραμμα ρυθμών μετάβασης.



Διαχωρίσιμη αλυσίδα.

Έστω π_0, π_1, π_2 οι στάσιμες πιθανότητες. Τότε

το σύστημα εξισώσεων ισορροπίας:

$\{0\}: \pi_0 \cdot 2 = \pi_1 \cdot 2 \Rightarrow \pi_1 = \pi_0$

$\{1\}: \cancel{\pi_1 \cdot 3 = \pi_0 \cdot 2 + \pi_2 \cdot 2}$

$\{2\}: \pi_2 \cdot 2 = \pi_1 \cdot 1 \Rightarrow \pi_2 = \frac{\pi_1}{2} = \frac{\pi_0}{2}$

↑ γραμμικώς εξαρτημένο

+ εξ. κανονικοποίησης

$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1.$

$\Rightarrow \pi_0 + \pi_0 + \frac{\pi_0}{2} = 1 \Rightarrow \pi_0 = \frac{2}{5}$

άρα $\pi_1 = \frac{2}{5}$ και $\boxed{\pi_2 = \frac{1}{5} = 20\%}$

Να το μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου που δεν λειτουργούν οι μηχανές.

Παράδειγμα 2

Μηχάνημα: Κατάσταση λειτουργίας, Μικρής βλάβης, Καταστροφικής βλάβης

Κατάσταση λειτουργίας → Μικρή βλάβη $Exp(f_1)$

Κατάσταση λειτουργίας → Καταστροφική " $Exp(f_2)$

Μικρής βλάβης → Καταστροφική " $Exp(g)$

Καταστροφικής βλάβης → Επισκευή σε $Exp(r)$

Έστω $X(t)$ = κατάσταση μηχανήματος τη στιγμή t.

τ.ω. $S = \{0, 1, 2\}$ και είναι ΜΑΣΧ με

Διάγραμμα Ρυθμών Μετάβασης

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[rr, bend left, "r"] & 1 \arrow[l, "g"'] & 2 \arrow[l, "f_1"'] \arrow[ll, bend left, "f_2"]
\end{tikzcd}$$

$$Q = \begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & -r & 0 & r \\ 1 & g & -g & 0 \\ 2 & f_2 & f_1 & -(f_1+f_2) \end{array}$$

Έστω π_0, π_1, π_2 οι στάσιμες πιθ.

Εξ. Ισορροπίας

$\{0\}$: $\cancel{\pi_0 \cdot r = \pi_1 g + \pi_2 f_2}$

$\{1\}$: $\pi_1 \cdot g = \pi_2 \cdot f_1$

$\{2\}$: $\pi_2 (f_1+f_2) = \pi_0 \cdot r$

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1.$$

$$\rightarrow \quad \pi_2 = \frac{r}{f_1+f_2}\pi_0 \qquad \pi_1 = \frac{f_1}{g}\cdot\frac{r}{f_1+f_2}\pi_0$$

$$\pi_0 + \frac{f_1}{g}\frac{r}{f_1+f_2}\pi_0 + \frac{r}{f_1+f_2}\pi_0 = 1.$$

$$\pi_0 = \frac{(f_1+f_2)g}{rg + f_1 r + (f_1+f_2)g}, \quad \pi_1 = \frac{f_1 r}{rg + f_1 r + (f_1+f_2)g}$$

$$\pi_2 = \frac{rg}{rg + f_1 r + (f_1+f_2)g}.$$

Διαδικασία Γέννησης - Θανάτου

π.χ. $X(t)$ = # πελατών τη στιγμή t (πλήθος πελατών στο σύστημα εξυπ.)

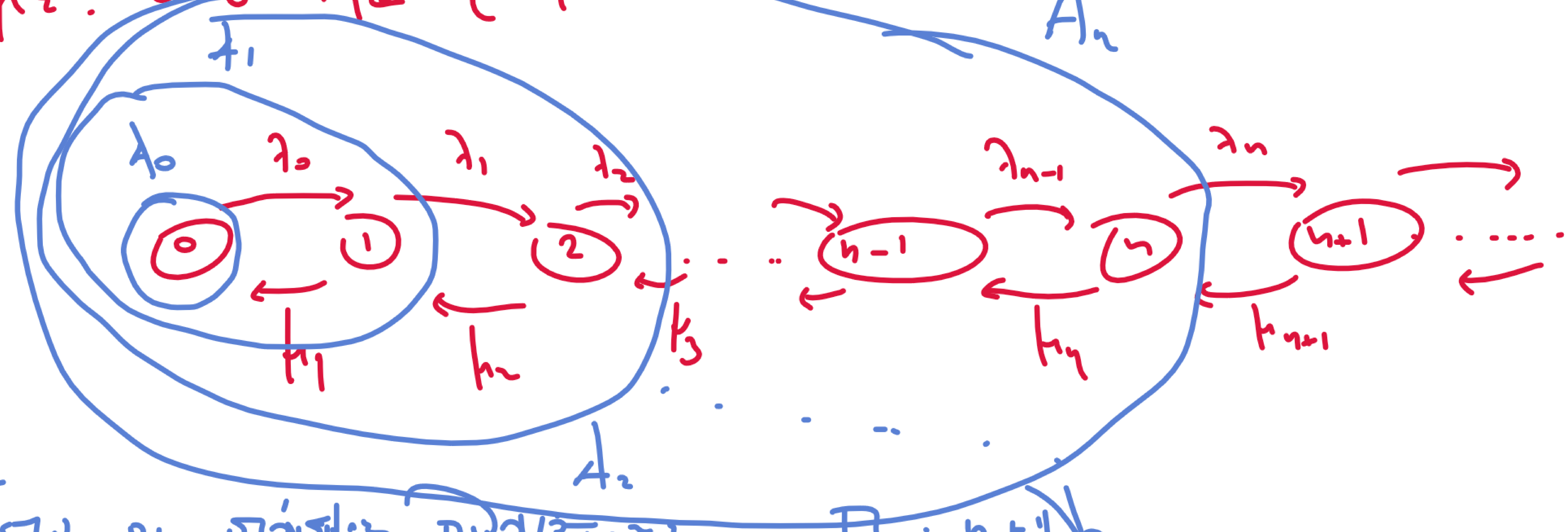
$S = \mathbb{N}_0$

Μπορούμε μόνο στις γειτονικές καταστάσεις

	κατάσταση	Επόμ. κατ.	Χρόνος μέχρι κ.λ.
γέννηση	0	1	$Exp(\lambda_0)$
θάνατος	1	0	$Exp(\mu_1)$
γέννηση		2	$Exp(\lambda_1)$
	⋮		
$n \geq 1$,	n	$n-1$	$Exp(\mu_n)$
		$n+1$	$Exp(\lambda_n)$

$\Longrightarrow$ ΜΑΣΧ.

με. Διάγραμμα ρυθμών μετάβασης



Έστω οι στάσιμες πιθανότητες $\pi_n : n \in \mathbb{N}_0$.

Εξ. Ισορροπίας

$\{0\}$: $\pi_0 \lambda_0 = \pi_1 \mu_1$

$\{1\}$: $\pi_1(\lambda_1 + \mu_1) = \pi_0 \lambda_0 + \pi_2 \mu_2$

$n \geq 1: \{n\}$ $\pi_n(\lambda_n + \mu_n) = \pi_{n-1}\lambda_{n-1} + \pi_{n+1}\mu_{n+1}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = 1.$$

Εξ. Τερ. Ισορροπίας

$A_0 = \{0\}$ τότε $\pi_0 \lambda_0 = \pi_1 \mu_1$

$A_1 = \{0, 1\}$ τότε $\pi_1 \lambda_1 = \pi_2 \mu_2$

$A_2 = \{0, 1, 2\}$ τότε $\pi_2 \lambda_2 = \pi_3 \mu_3$

⋮

$n \geq 1$ $A_n = \{0, 1, \dots, n\}$ τότε $\pi_n \lambda_n = \pi_{n+1} \mu_{n+1}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = 1$$

↓

αλληλοδιάζουν

$$\pi_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n}\pi_{n-1} = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}}{\mu_n \cdot \mu_{n-1}}\pi_{n-2} = \cdots\cdots = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_1\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_2\mu_1}\pi_0.$$

Εξ. κανονικοποίησης

$$\sum_{n=0}^{\infty}\pi_n = 1 \iff \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_1}\pi_0 = 1$$

$$\iff \pi_0 \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_1} = 1.$$

Υπάρχει πάντα στάσιμη κατανομή; ΟΧΙ

Υπάρχει ανν. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_1} < \infty.$

Έστω τα $C_n = \dfrac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_1}$, $n \geq 1$, $C_0 = 1$

Υπάρχει η στάσιμη ανν. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} C_n < \infty$

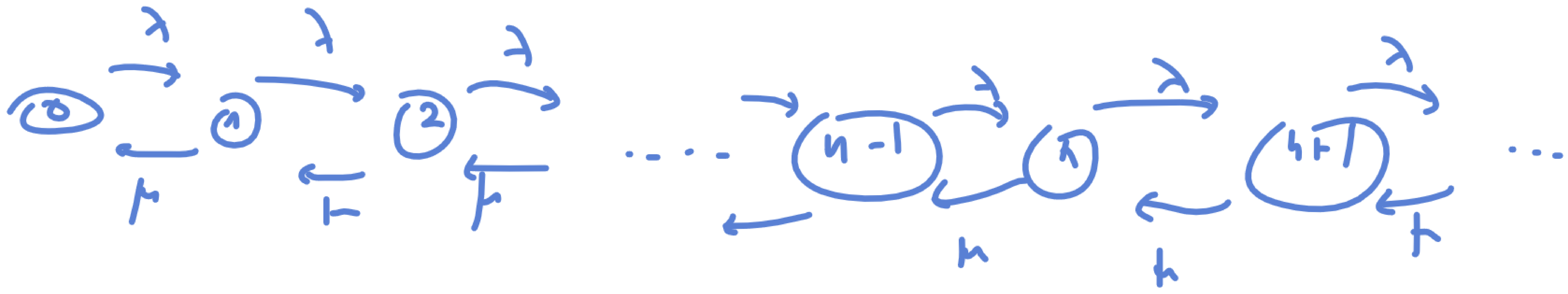
και τότε $\pi_0 = \left[\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} C_n\right]^{-1}$ και $\pi_n = C_n \cdot \pi_0$, $n \geq 1$.

M/M/1 Ουρά

- Διαδ. Αφίξεων Poisson ρυθμού λ
- Χρόν. Εξυπηρέτησης iid $\sim Exp(\mu)$
- 1 υπηρέτης
- άπειρη χωρητικότητα, πειθαρχία FCFS

$N(t)$ = # πελατών στο σύστημα τη στιγμή t ΜΑΕΧ με χ.κ. $S = \mathbb{N}_0$

και συγκεκριμένα B+D process με $\lambda_n = \lambda,\ n \geq 0$
$\mu_n = \mu,\ n \geq 1$



Έστω $(\pi_n : n \geq 0)$ η στάσιμη κατανομή. Τότε

$$C_n = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_1} = \frac{\lambda^n}{\mu^n} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n,\ n \geq 1$$

$$C_0 = 1.$$

Υπάρχει στάσιμη κατανομή ανν $\sum_{n=0}^{\infty} C_n < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda/\mu)^n < \infty$

$$\overset{\rho = \lambda/\mu}{\Leftrightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n < \infty \Leftrightarrow \rho < 1 \Leftrightarrow \lambda < \mu$$

αλλιώς συνωστεύεται για $s \geq 1$ — γεωμετρική σειρά.

Έστω $\rho = \lambda/\mu < 1$. Τότε η σειρά είναι συγκλίνουσα $\sum_n$, υπάρχει στάσιμη κατανομή με $\pi_0 = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n\right]^{-1} = \left[\frac{1}{1-\rho}\right]^{-1} = 1-\rho$

και $\pi_n = C_n \cdot \pi_0 = (\lambda/\mu)^n \cdot (1-\rho) = \rho^n(1-\rho),\ n \geq 1$

Από τη μορφή του π_n έχω ότι για $\lambda < \mu$ $(\rho < 1)$ η οριακή κ.τ. N (# πελατών στο $t \to \infty$) $\sim Geom(\rho)$ στο $\mathbb{N}_0$

Lecture 4 - 30/6/2021 ΜΥΠ ΙΙ

B+D process

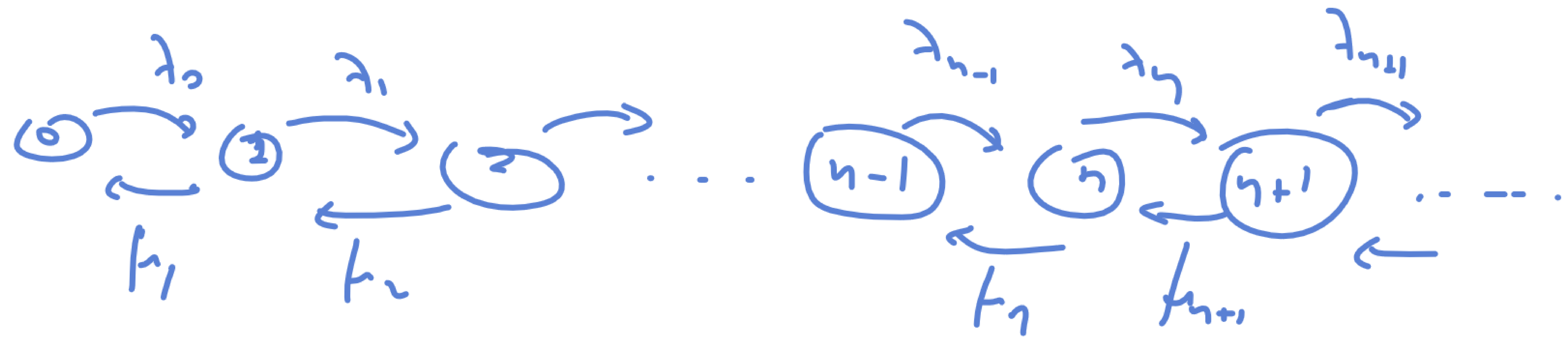
Η σ.δ. $\{N(t) : t \geq 0\}$ είναι B+D αν ο χ.κ. S είναι αριθμήσιμος και έχω μεταβάσεις μόνο σε γειτονικές καταστάσεις ως εξής:

$$n \longrightarrow n+1 \quad \text{σε χρόνο } Exp(\lambda_n) \quad n \geq 0$$

$$n \longrightarrow n-1 \quad \text{σε χρόνο } Exp(\mu_n) \quad n \geq 1.$$

και οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ τους ανεξάρτητοι.

Διάγραμμα ρυθμών μετάβασης



Μέθοδος Εύρεσης Στάσιμης Κατανομής

Ορίζω
$$C_n = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_1\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_2\mu_1}, \quad n \geq 1. \qquad C_0 = 1.$$

Κριτήριο Ύπαρξης Στάσιμης Κατανομής $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} C_n < \infty$ (Συνθήκη Στασιμότητας)

Αν ισχύει η παραπάνω τότε η στάσιμη κατανομή

$$\pi_0 = \left[\sum_{n=0}^{\infty} C_n\right]^{-1}, \quad \pi_n = C_n \pi_0, \; n \geq 1$$

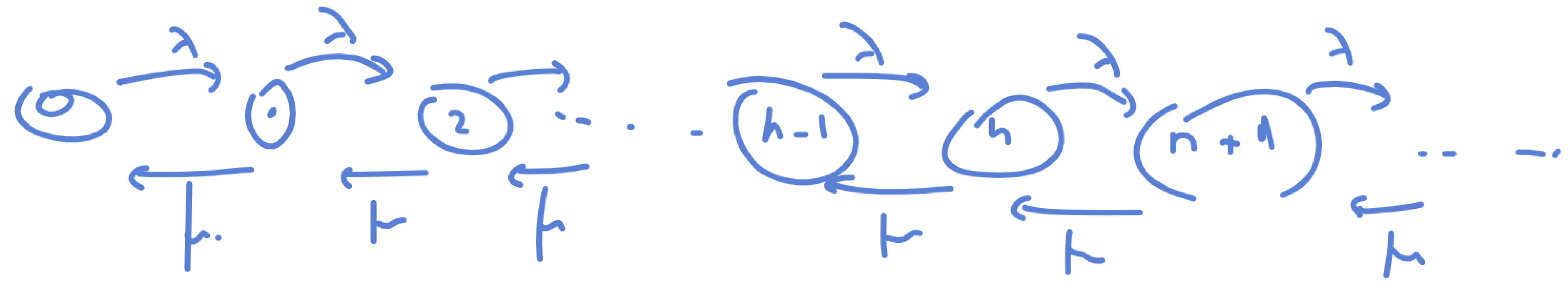
Αν $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} C_n = \infty$ τότε $\pi_n = 0, \; \forall n$.

M|M|1 Ουρά

- Δ.Σ. Αφίξεων Poisson ρυθμού λ δηλ. Interarrival Times iid $\sim Exp(\lambda)$
- Χρόνοι Εξυπηρέτησης $\sim Exp(\mu)$ iid
- 1 υπηρέτης
- Άπειρη χωρητικότητα
- Πειθαρχία FCFS

1. Στάσιμη κατανομή του πλήθους πελατών

$N(t) = \#$ πελατών τη στιγμή t $\Rightarrow$ B+D με $\lambda_n = \lambda$, $\mu_n = \mu$. και χ.κ. $S = \mathbb{N}_0$



ρυθμός συνωστισμού

$$C_n = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_1\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_2\mu_1} = \frac{\lambda^n}{\mu^n} = \left(\lambda/\mu\right)^n \overset{\rho=\lambda/\mu}{=} \rho^n, \quad C_0 = 1.$$

Συνθήκη σταθερότητας $\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n < \infty \iff \rho < 1 \iff \underline{\lambda < \mu}$

Δηλ. για $\lambda<\mu$ η ουρά είναι ευσταθής.

Για $\lambda < \mu$ τότε $\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = \frac{1}{1-\rho}$ άρα $\pi_0 = \left[\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\right]^{-1} = 1-\rho$

$\pi_n = C_n \pi_0 = \rho^n (1-\rho), \ n \geq 1$

Άρα $\pi_n = (1-\rho)\rho^n$, $n \geq 0$ $\Rightarrow N \sim Geom(\rho)$ στο $\mathbb{N}_0$

Αν $\lambda \geq \mu \iff (\rho \geq 1)$ τότε η ουρά μακροπρόθεσμα απειρίζεται και $\pi_n = 0, \forall n$

2. Μέτρα Απόδοσης

Έστω $\lambda < \mu$ και αφού η τ.μ. $N =$ πλήθος πελατών $\sim Geom(\rho)$ στο N όταν το σύστημα είναι σε ισορροπία, σταθ.

Συνολικό Σύστημα:

$L =$ Μέσο Πλήθος Πελατών στο σύστημα $= E[N] = \sum_{n=0}^{\infty} n \pi_n = \dfrac{\rho}{1-\rho} = \dfrac{\lambda}{\mu - \lambda}$

$W =$ Μέσος Χρόνος Παραμονής Πελάτη $= E[W] \overset{\text{Little}}{=} \dfrac{L}{\lambda} = \dfrac{L}{\lambda} = \dfrac{1}{\mu - \lambda} = \dfrac{1}{\mu(1-\rho)}$

Χώρος Αναμονής

$L_q =$ Μέσο Πλήθος Πελατών σε Αναμονή $= \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)\pi_n = \dots = L - \rho$

$= \dfrac{\rho}{1-\rho} - \rho = \dfrac{\rho^2}{1-\rho} = \dfrac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$

$$L_q = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi_n - \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n - (1-\pi_0) = L - \rho \iff \underline{L = L_q + \rho}$$

$W_q = E[W_q] =$ Μέσος Χρόνος Αναμονής πελάτη $\overset{\text{Little}}{=} \dfrac{L_q}{\lambda} = \dfrac{L_q}{\lambda} = \dfrac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$

$= \dfrac{\rho}{\mu(1-\rho)}$.

Προφανώς $W = W_q + \dfrac{1}{\mu}$ → Μέσος Χρόνος Εξυπηρέτησης

3.4 Κατανομή του Χρόνου Παραμονής $W \sim F(t)$

Βασική Υπόθεση FCFS και $N \sim P(N=n) = \rho^n (1-\rho)$, $n \geq 0$, $\lambda < \mu$

Θέλω να υπολογίσω την $P(W > t)$

Ας θεωρήσω ένα συγκεκριμένο πελάτη που μπαίνει και βρίσκει n πελάτες μπροστά του. Πόσο χρόνο θα κάνει μέχρι να φύγει;

$$W \mid N=n = S_{n+1} = T_1 + T_2 + \dots + T_{n+1}, \quad T_i \sim \text{iid } Exp(\mu)$$

$$\Rightarrow W \mid N=n \sim Gamma(n+1, \mu)$$

Άρα $P(W>t) \overset{\text{ΘΟΠ}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n) P(W>t \mid N=n) =$

δεσμεύω στο N

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (1-\rho)\rho^n \int_t^{\infty} \frac{\mu^{n+1}}{\Gamma(n+1)} x^n e^{-\mu x} \, dx$$

$$= \int_t^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (1-\rho)\rho^n \frac{\mu^{n+1}}{n!} x^n e^{-\mu x} \, dx \qquad \Gamma(n+1) = n!$$

$$= \int_t^{\infty} (1-\rho)\mu e^{-\mu x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\rho\mu x)^n}{n!} \, dx \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{\lambda}$$

$$= \int_t^{\infty} (1-\rho)\mu \, e^{-\mu x} \cdot e^{\rho\mu x} \, dx = \int_t^{\infty} (1-\rho)\mu e^{-\mu(1-\rho)x} \, dx$$

σππ της $Exp(\mu(1-\rho))$

$$\Rightarrow W \sim Exp(\mu(1-\rho))$$

3 β. Κατανομή Χρόνου Αναμονής Πελάτη στο σύστημα

ΒΑΣΙΚΟ FCFS

Χρόνος Αναμονής όταν $N>0$

Θεωρώ ενός συγκεκριμένο πελάτη που φτάνει και βρίσκει $n>0$ πελάτες στο σύστημα. Πόσο χρόνο θα περιμένει στην ουρά.

$$W_q|_{N=n} = S_n = T_1+T_2+\dots+T_n \sim Gamma(n,\mu)$$

όπου T_i i.i.d $\sim Exp(\mu)$

$$P(W_q>t) \overset{\text{ΘΟΠ}}{\underset{\text{Δεσμεύω στο } N}{=}} \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n)\,P(W_q>t\,|\,N=n)$$

$$= P(N=0)\,\cancel{P(W_q>t\,|\,N=0)}^{\,0} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n(1-\rho)\,P(S_n>t)$$

$$\overset{n\to n+1}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{n+1}(1-\rho)\,P(S_{n+1}>t) = \rho \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n(1-\rho)\,P(S_{n+1}>t)$$

$$=\rho\,P(W>t)$$

$$\Longrightarrow W_q = \begin{cases} 0 & \text{με πιθ. } 1-\rho=P(N=0) \\ Exp(\mu(1-\rho)) & \text{με πιθανότητα } \rho=P(N>0) \end{cases}$$

ΜΙΚΤΗ ΕΚΘΕΤΙΚΗ

$$W_q = E[W_q] \overset{\text{ΘΟΜΤ}}{\underset{N}{=}} E\big[E[W_q|N]\big] = P(N=0)\,\cancel{E[W_q|N=0]}^{\,0} + P(N>0)\,E[W_q|N>0]$$

$$= \rho \cdot E\left[\text{Exp}\left(\mu(1-\rho)\right)\right] = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

4. Περίοδος Αεργίας – Συνεχούς Λειτουργίας – Κύκλος Απασχόλησης

$E[Z] = E[I] + E[Y]$ και $\pi_0 = \frac{E[I]}{E[Z]}$ = μακρ. ποσοστό χρόνου που το σύστημα άδειο.

$I \sim \text{Exp}(\lambda)$ (περίοδος αεργίας ≜ χρόνος μέχρι άφιξης) $\Rightarrow E[I] = \frac{1}{\lambda}$

$$\pi_0 = \frac{E[I]}{E[Z]} \iff 1-\rho = \frac{1/\lambda}{E[Z]} \iff E[Z] = \frac{1}{\lambda(1-\rho)}.$$

και $E[Y] = E[Z] - E[I] = \frac{1}{\lambda(1-\rho)} - \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\rho}{1-\rho} = \frac{L}{\lambda} = W.$

1ο Μοντέλο M/M/1 με αποθαρρυνόμενους πελάτες.

B+D $\quad \lambda_n = \lambda(1-q_n) = \lambda\left(1-\frac{n}{n+1}\right) = \frac{\lambda}{n+1}, \quad n \geq 0.$

$\mu_n = \mu$

2ο Μοντέλο M/M/1 με μεταβλητή ταχύτητα εξυπηρέτησης

B+D process με $\lambda_n = \lambda$, $n \geq 0$, $\mu_n = \mu a_n = \mu \cdot n$, $n \geq 1$

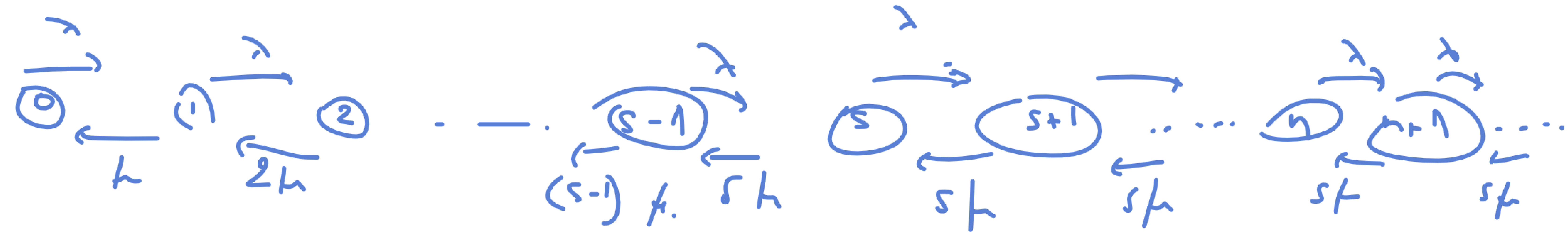
M/M/s Ουρά

$N(t)$ = # πελατών στο σύστημα τη στιγμή t.

$\therefore$ $N(t)$ είναι B+D με χ.κ. $S = \mathbb{N}_0$ και ρυθμούς

$$\lambda_n = \lambda,\ n \geq 0 \qquad \mu_n = \begin{cases} n\mu, & 1 \leq n \leq s \\ s\mu, & n > s \end{cases}$$

Διάγραμμα Ρυθμών Μετάβασης



1. Εύρεση Στάσιμης Κατανομής

$$C_n = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_1\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_1} = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{\mu(2\mu)\cdots(n\mu)} = \dfrac{(\lambda/\mu)^n}{n!}, & n \leq s \\[2ex] \dfrac{\lambda^n}{\underbrace{\mu(2\mu)(3\mu)\cdots(s\mu)}_{s}\underbrace{(s\mu)\cdots(s\mu)}_{n-s}} = \dfrac{(\lambda/\mu)^n}{s!\, s^{n-s}}, & n > s \end{cases}$$

$$C_0 = 1$$

Συνθήκη Σταθερότητας

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n = \sum_{n=0}^{s-1} C_n + \sum_{n=s}^{\infty} C_n$$

$$= \sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \sum_{n=s}^{\infty} \frac{(\lambda/\mu)^n}{s!\, s^{n-s}}$$

$$= \sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \sum_{n=s}^{\infty} \frac{(\lambda/\mu)^{n-s}}{s^{n-s}}$$

$$= \sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^n < \infty$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\lambda/s\mu\right)^n<\infty \Leftrightarrow \lambda/s\mu<1 \Leftrightarrow \underline{\lambda<s\mu}$$

$\to \rho$ ρόλος συνωστισμού.

Άρα αν $\rho=\lambda/s\mu<1 \Rightarrow$ σειρά συγκλίνει και υπάρχει η στάσιμη κατανομή του πλήθους πελατών.

$$\pi_0=\left[\sum_{n=0}^{\infty}C_n\right]^{-1}=\left[\sum_{n=0}^{s-1}\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}+\frac{(\lambda/\mu)^s}{s!}\cdot\frac{1}{1-\frac{\lambda}{s\mu}}\right]^{-1}$$

$$\pi_n=C_n\pi_0=\begin{cases}\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}\cdot\pi_0, & 1\le n\le s\\ \frac{(\lambda/\mu)^n}{s!\,s^{n-s}}\pi_0, & n>s\end{cases}$$

Αν $\rho=\frac{\lambda}{s\mu}\geq 1 \Rightarrow$ η σειρά [illegible] αποκλίνει και

$$\pi_n=0,\ \forall n\in\mathbb{N}_0$$

Υπενθύμιση για τον υπολογισμό του L_q :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n=\frac{1}{1-\rho}\overset{d/d\rho}{\Longleftrightarrow}\sum_{n=1}^{\infty}n\rho^{n-1}=\frac{d}{d\rho}\frac{1}{1-\rho}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}n\rho^{n-1}=\frac{1}{(1-\rho)^2}\overset{\times\rho}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}n\rho^n=\frac{\rho}{(1-\rho)^2}\Leftrightarrow\sum_{n=0}^{\infty}n\rho^n=\frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

Άρα $L_q=\frac{(\lambda/\mu)^s\pi_0}{s!}\frac{\rho}{(1-\rho)^2}$ και μπορώ τα υπόλοιπα μεγέθη απο Little στο χώρο αναμονής $W_q=\frac{L_q}{\lambda}\overset{\lambda_q=\lambda}{=}\frac{L_q}{\lambda}=\frac{(\lambda/\mu)^s\pi_0\rho}{\lambda\, s!\,(1-\rho)^2}$

Μετά: $W = W_q + \frac{1}{\mu}$ δηλ. οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι $Exp(\mu)$ $\Rightarrow E[W_s] = \frac{1}{\mu}$.

$$\Rightarrow W = \frac{(\lambda/\mu)^s \pi_0}{s!\,\mu(1-\rho)^2} + \frac{1}{\mu}.$$

Τύπος Little στο συνολ. σύστημα και προκύπτει

$$L = \bar{\lambda} W = \lambda W = \lambda\left[\frac{(\lambda/\mu)^s \pi_0}{s!\,\mu(1-\rho)^2} + \frac{1}{\mu}\right].$$

4 M/M/1/k ουρά

Η $N(t)$ B,D με $\lambda_n = \lambda \quad 0 \le n \le k-1$

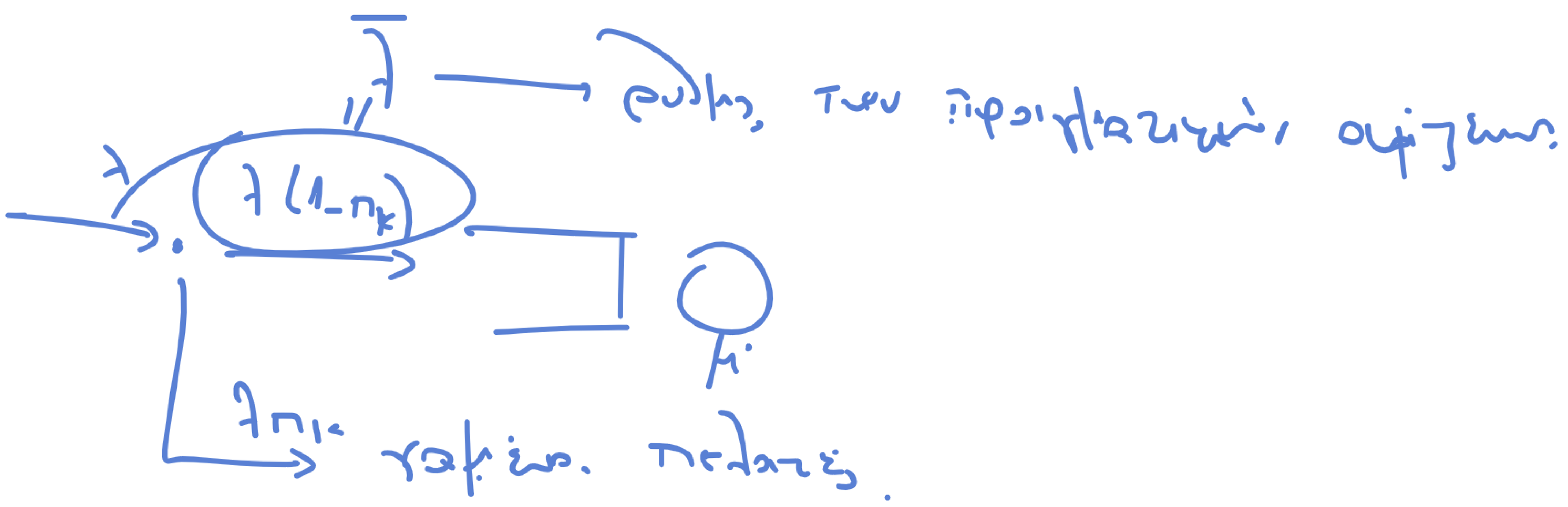
$\mu_n = \mu \quad 1 \le n \le k$

π_n, $n = 0, \ldots k$. στάσιμες πιθανότητες

Αν $N = k$ τότε νέος πελάτης δεν μπαίνει στο σύστημα

με πιθανότητα $P(N \ge k) = P(N = k) = \pi_k$

Άρα η πιθανότητα μπει νέος πελάτης, είναι $1 - \pi_k = P(N < k)$



Πεπερασμένος Πληθυσμός Πελατών

Τυπική Εφαρμογή

N μηχανές που λειτουργούν παράλληλα και ανεξάρτητα με χρόνους ζωής $\sim Exp(\lambda)$

Συνεργείο με s μηχανικούς. Κάθε μηχανικός χρειάζεται σε μία μηχανή και ο χρόνος επισκευής $\sim Exp(\mu)$ και αυτοί είναι ανεξάρτητοι

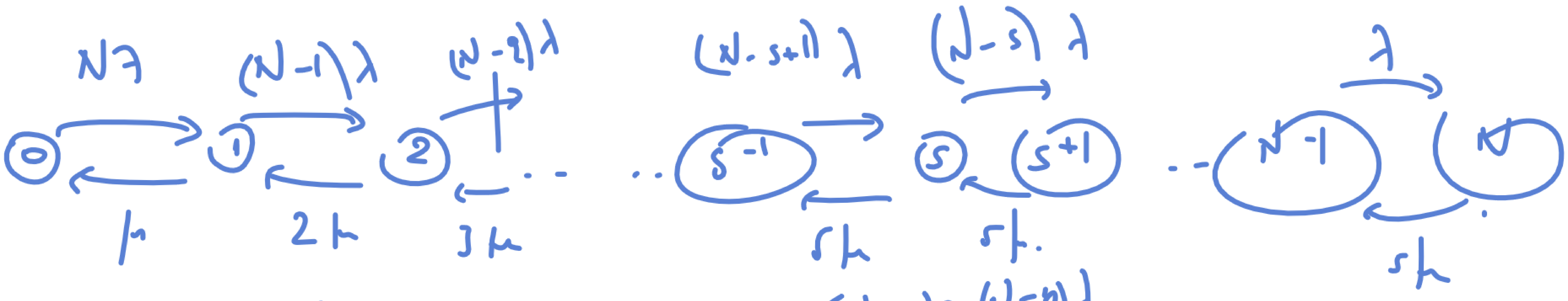
Θεωρώ ως σύστημα εξυπηρέτησης το Συνεργείο με τους s μηχανικούς

$N(t) =$ # μηχανών που βρίσκονται σε επισκευή στο συνεργείο τη στιγμή t

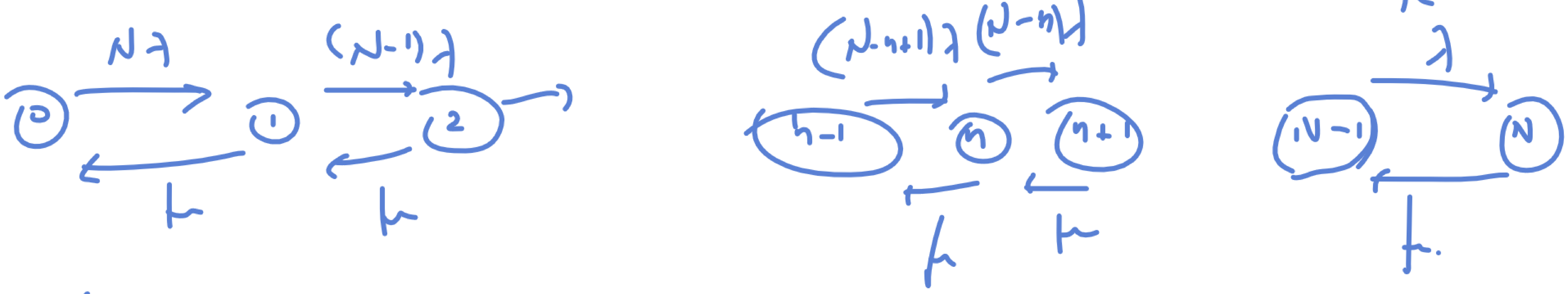
Για το συνεργείο
- κατάσταση n = # μηχανών σε επισκευή.
- άφιξη = μία μηχανή που χαλάει. Δηλ. που έληξε ο χρόνος λειτουργίας της.

Πεπ. Πληθυσμός Πελατών που είναι οι μηχανές.

// $N(t)$ Σ.Χ. Χ.Κ. $S = \{0, 1, 2, \dots, N\}$ και διάγραμμα ρυθμών μετάβασης.



$s = 1$:



B+D με $\mu_n = \mu,\ 1 \le n \le N$ και $\lambda_n = (N-n)\lambda \quad 0 \le n \le N-1$

$$C_n = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_1\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_1} = \frac{(N-n+1)\lambda\cdot(N-n+2)\lambda\cdots N\lambda}{\mu^n} = \frac{N!}{(N-n)!}\left(\lambda/\mu\right)^n \quad 1\le n\le N, \quad C_0 = 1$$

Η σειρά συγκλίνει $\forall \lambda, \mu$ καθώς η αλυσίδα έχει πεπ. καταστάσεις

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n = \sum_{n=0}^{N} C_n = \sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{(N-n)!}\left(\lambda/\mu\right)^n$$

$$\Rightarrow \pi_0 = \left[\sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{(N-n)!}\left(\lambda/\mu\right)^n\right]^{-1}$$

$$\pi_n = C_n \cdot \pi_0 \quad 1 \le n \le N.$$