ΜΥΥΠ ΙΙ - 1/7/2021 Lecture 5

Πεπ. Πληθυσμός Πελατών

M/M/s ουρά αλλά το πλήθος των δυνητικών πελατών είναι πεπερασμένο. Άρα και ο χ.κ. της Μ.α. θα είναι επίσης πεπερασμένος ⇒ το σύστημα είναι ευσταθές $\forall \lambda, \mu, s, n$)

∃ πάντα στάσιμη κατανομή.

Πως γίνονται οι αφίξεις; Μία νέα άφιξη αντιστοιχεί στον $U = \min\{T_1, T_2, \dots, T_k\} \sim Exp(k\lambda)$ — Συνολικές αφίξεις

T_i iid $\sim Exp(\lambda)$

Άσκηση: Εταιρεία Ενοικίασης Αυτ/των "Νίκος"
- 5 αυτ/τα διαθέσιμα προς ενοικίαση
- Υπόκεινται σε ανεξάρτητες βλάβες.
- Χρόνος Διάρκειας Λειτουργίας ή "Μεταξύ διαδ. βλαβών" $\sim Exp(2)$

Συνεργείο "MASTROGEORGE"
- 2 μηχανικοί. Κάθε μηχανικός εργάζεται σε ένα αυτ/το
- Χρόνος Επισκευής $\sim Exp(3)$, ανεξάρτητοι

Ν.β. οριακή κατανομή του # αυτ/των στο συνεργείο.

Αν ορ. $N(t)$ = # αυτ/των στο συνεργείο τη στιγμή t

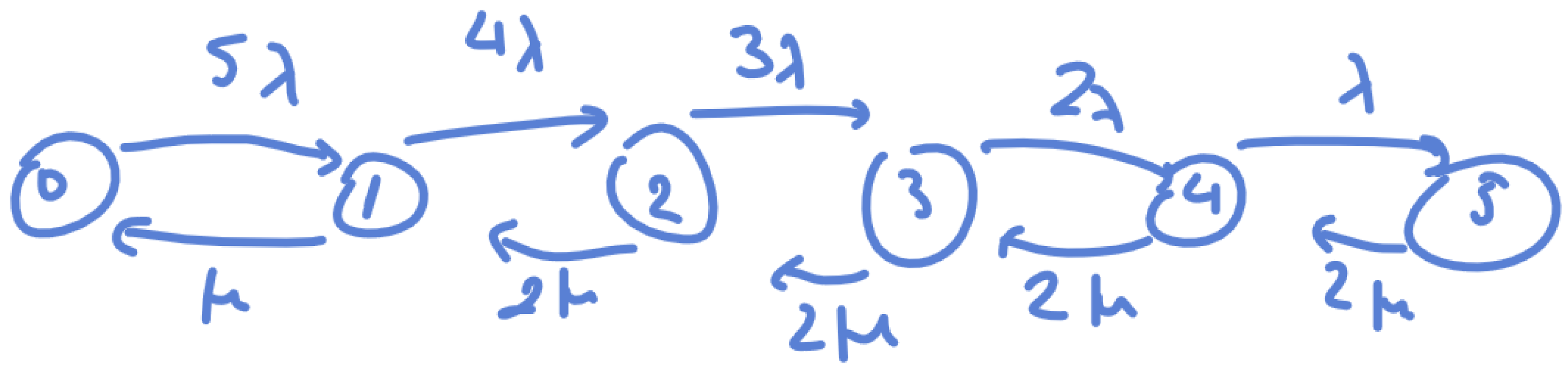
Τότε ο χ.κ. $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Δυνητικοί Πελάτες ≡ Αυτ/τα

Σύστημα Εξυπηρέτησης → Συνεργείο

M/M/2

Διάγραμμα Ρυθμών Μετάβασης



Είναι η $N(t)$ B+D process? ΝΑΙ

Εύρεση Στάσιμης Κατανομής: $\lambda = 2$ και $\mu = 3$

Υπολογίζω τα C_n: $C_0 = 1$, $C_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} = \frac{5\lambda}{\mu} = 5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)$, $C_2 = \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2} = 10\cdot\left(\lambda/\mu\right)^2 = 10\left(2/3\right)^2$

$C_3 = \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2}{\mu_1\mu_2\mu_3} = 15\cdot\left(2/3\right)^3$, $C_4 = \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = 15\left(2/3\right)^4$

$C_5 = 15/2\cdot\left(2/3\right)^5$ $\quad C_n = 0$ $n \geq 6$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n = \sum_{n=0}^{5} C_n = 1 + 5\left(\tfrac{2}{3}\right) + 10\left(\tfrac{2}{3}\right)^2 + 15\cdot\left(\tfrac{2}{3}\right)^3 + 15\left(\tfrac{2}{3}\right)^4 + \tfrac{15}{2}\left(\tfrac{2}{3}\right)^5$$

άρα το σύστημα είναι εργοδικό και οι στάσιμες (οριακές) πιθανότητες

$$\pi_0 = \left[\sum_{n=0}^{5} C_n\right]^{-1} \quad \text{και} \quad \pi_1 = C_1\pi_0 = 5\left(\tfrac{2}{3}\right)\pi_0$$

$$\pi_2 = C_2\cdot\pi_0 = 10\cdot\left(\tfrac{2}{3}\right)^2\pi_0$$

$$\pi_3 = C_3\pi_0 = 15\left(\tfrac{2}{3}\right)^3\pi_0$$

$$\pi_4 = C_4\cdot\pi_0 = 15\left(\tfrac{2}{3}\right)^4\pi_0$$

$$\pi_5 = C_5\cdot\pi_0 = \tfrac{15}{2}\left(\tfrac{2}{3}\right)^5\pi_0$$

π_0: είναι το ποσοστό του χρόνου που τα αμάξια επισκευάζονται και δω.

περιμένουν για επισκευή $\longrightarrow P(N \leq 1) = \pi_0 + \pi_1$

M/G/1 Ουρά

Δεν ισχύει η Μαρκοβιανή Ιδιότητα για την σ.δ. $\{N(t): t \geq 0\}$

Δεν διαθέτουμε τις δ.δ. Γέννησης–Θανάτου. Ξεχνάω τους τύπους για στάσιμη κατανομή.

Η στατιστική ανάλυση σε τέτοια μοντέλα είναι δύσκολη να βρεθεί αναλυτικά και συνήθως κάνω προσομοίωση. Γνωρίζω όμως ότι υπάρχει και είναι μοναδική αν

ευσταθές σύστημα $\longleftarrow \rho = \lambda\cdot\left(\frac{1}{\mu}\right) < 1.$ $b = E[W_s]$

$S_1, S_2, \ldots$ χρόνοι εξυπηρέτησης $\sim G$ i.i.d. με $b = E[S]$, $Var(S) = \sigma^2$

Αποτελέσματα $(s=1)$ $\pi_0 = 1-\rho$ πιθανότητα κενού συστήματος

Δεν μπορώ να βρω τις π_n και δεν μπορώ να βρω $L = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n$ (όταν $\rho < 1$ δηλ. σε στασιμότητα)

Τύπος Pollaczek-Khinchine: $L_q = \dfrac{\lambda^2\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)}$

$\sigma^2 = Var(S)$

$\rho = \lambda\cdot 1/\mu = \lambda E[S].$

Για να αναλύσω μια $M|G|1$ ουρά να ξέρω το λ = ρυθμός αφίξεων.

και να ξέρω για το Service Times S: ... $E[S] := \frac{1}{\mu}$

$Var(S) = \sigma^2$

SOS!!! Τα μεγέθη πρέπει να είναι στην ίδια χρονική μονάδα.

Little $W_q = \frac{L_q}{\lambda}$ $(\lambda_{eff} = \lambda)$

και πως βρίσκω τα υπόλοιπα μέτρα απόδοσης

$W = W_q + \frac{1}{\mu}$

$(s=1)$

$L = \lambda W$ ή $L = L_q + \rho$

Φυλλάδιο Ασκήσεων

(4) $M/G/1$ ουρά γιατί: Δ.Σ. Αφίξεων Poisson ρυθμός $\lambda = 3$ λογ./ώρα.
Χρόνους Εξυπηρέτησης λογιστών. που δεν
είναι εκθετικοί αλλά εξαρτώνται από το # δηλώσεων
$s=1 \longrightarrow$ 1 υπάλληλος που διεκπεραιώνει τις δηλώσεις

Χρον. Μονάδα = 1 hr.

W_s = Χρόνος Εξυπηρέτησης λογιστή $= 10 \cdot X$ min όπου X = # δηλώσεων που έχει ένας λογιστής $\sim b(10, \frac{1}{10})$

$= \frac{X}{6}$ hr. $\qquad E[X] = np = 1$

$E[W_s] = E[\frac{X}{6}] = \frac{E[X]}{6} = \frac{1}{6}$ hr, $\sigma^2 = Var[W_s] = Var(\frac{X}{6}) = \frac{Var(X)}{36} = \frac{9}{360} = \frac{1}{40}$ $\quad Var[X] = np(1-p) = \frac{9}{10}$

$\rho = \lambda \cdot E[W_s] = 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ το σύστημα ευσταθές δηλ $\exists!\ \pi_n$

$\pi_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ποσοστό χρόνου που ο υπάλληλος "αράζει"

Από P-K $\Rightarrow L_q = \frac{\lambda^2\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{3^2\frac{1}{40} + (\frac{1}{2})^2}{2(1-\frac{1}{2})} = \frac{9}{40} + \frac{1}{4} = \frac{19}{40}$

Από Little $W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{19/40}{3} = \frac{19}{120}$

$W = W_q + E[W_s] = \frac{19}{120} + \frac{1}{6} = \frac{13}{40}$ $\overset{\text{Little}}{\Rightarrow}$ $L = \lambda W = 3 \cdot \frac{13}{40} = \frac{39}{40}$

Άσκηση Μηχανές. Έστω το πλήθος που λειτουργούν και υπόκεινται σε βλάβες σύμφωνα με Δ. Poisson ρυθμού $\lambda = 1/hr$

1 τεχνικό $(s=1)$

Βλάβες:
- σοβαρές με πιθ. 0.1. Χρόνος επισκευής $\sim Exp(1/5)$
- χαλαρές με πιθ. 0.9 " " $\sim Exp(2)$

Μελέτη της $N(t) =$ # μηχανών με βλάβη τη στιγμή t. Θέλω μέτρα απόδοσης σε κατάσταση στασιμότητας

$M/G/1$. γιατί ο χρόνο. εξυπηρέτησης δεν είναι εκθετικός: αλλά μείξη εκθετικών που εξαρτάται από το είδος της βλάβης

Χρον. Μονάδα hr

$\lambda = 1$ βλάβη $/hr.$

W_s = χρόνος εξυπηρέτησης μίας τυχαίας βλάβης $= \begin{cases} Exp(1/5) & \text{αν σοβαρή} \\ Exp(2) & \text{αν χαλαρή} \end{cases}$ $I =$ είδος βλαβ. $\sim Bern(0.1)$

$$E[W_s] \overset{ΘΔΜΤ}{=} E[E[W_s|I]] = P(\text{σοβαρή βλάβη})\, E[W_s \,|\, \overset{I=1}{\text{σοβαρή}}] + P(\text{χαλαρή βλάβη})\, E[W_s \,|\, \overset{I=0}{\text{χαλαρή}}]$$

Δεσμεύω στο είδος βλάβης

$$= 0.1 \cdot 5 + 0.9 \cdot \frac{1}{2} = 0.95\, hr = \frac{1}{\mu}$$

$W_s|\text{σοβαρή} = W_s|I=1 \sim Exp(1/5)$

$W_s|\text{χαλαρή} = W_s|I=0 \sim Exp(2)$

$\sigma^2 = Var(W_s) = E[W_s^2] - E[W_s]^2$

$$E[W_s^2] \overset{ΘΔΜΤ}{=} E[E[W_s^2|I]] = P(\text{σοβαρή}) \cdot E[W_s^2 | \text{σοβαρή}] + P(\text{χαλαρή}) E(W_s^2 | \text{χαλαρή})$$

$$= 0.1 \cdot \frac{2}{(1/5)^2} + 0.9 \cdot \frac{2}{2^2} = \frac{109}{20}\, hr^2.$$

$X \sim Exp(\mu)$

$E[X^2] = V(X) + (E[X])^2 = \frac{1}{\mu^2} + \left(\frac{1}{\mu}\right)^2 = \frac{2}{\mu^2}.$

$$\sigma^2 = \frac{109}{20} - (0.95)^2 = \frac{1819}{400}$$

Ευσταθές είναι $\rho = \lambda E[V_s] = \lambda \cdot \frac{1}{\mu} = 1 \cdot 0.95 = 0.95 < 1$ άρα ευσταθής: διότι $\exists! (\text{Th})$

$\pi_0 = 1-\rho = 0.05$ ή 5% ποσοστό χρόνου που το σύστημα άδειο

$$L_q = \frac{\lambda^2 s^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{1^2 \cdot \frac{1819}{400} + 0.95^2}{2 \cdot 0.05} = 54,5 \text{ πελ.}$$ P-K formula.

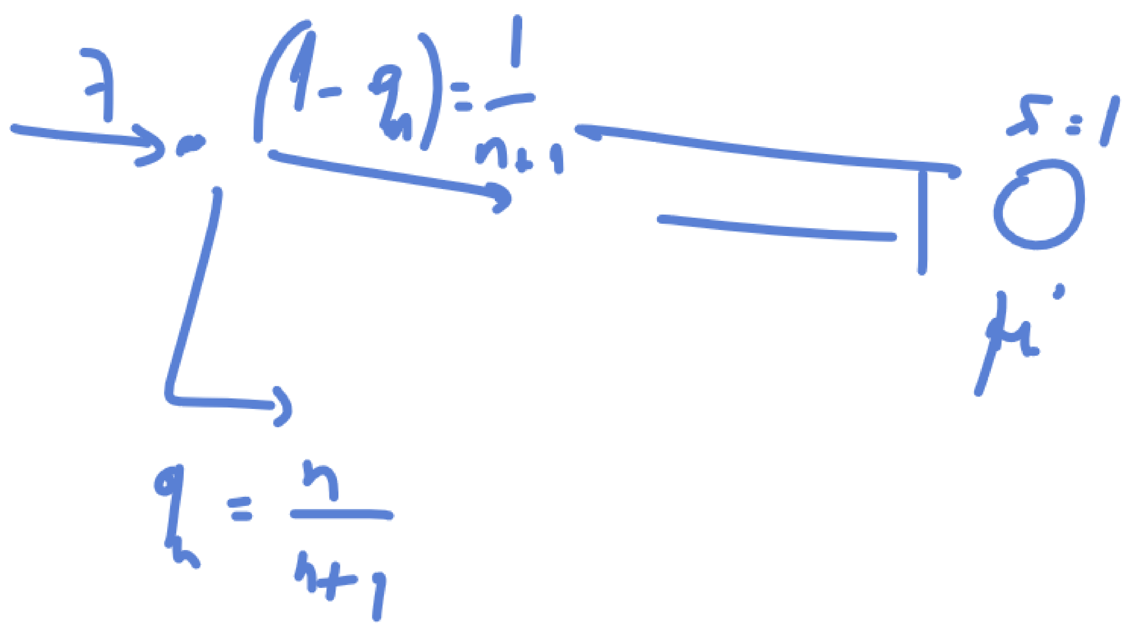
Little $W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{54.5}{1} = 54.5$ hr.

$W = W_q + \frac{1}{\mu} = 54.5 + 0.95 = 55.45$ hr.

$L = \lambda \cdot W = 1 \cdot 55,45 = 55.45$ πελάτες.

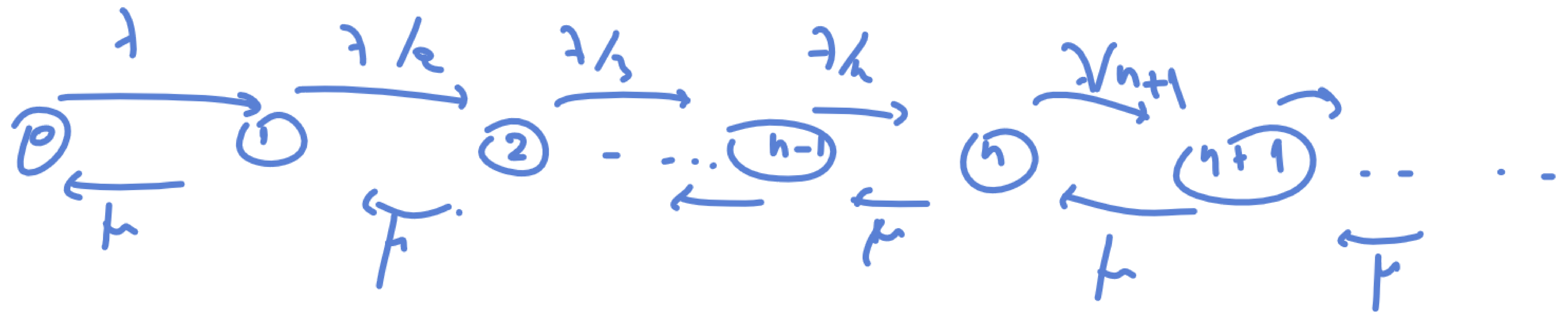
Ασκ. 1 / φυλ. 5.

M|M|1 με ρυθμό εξυπηρέτησης μ και ρυθμός αφίξεων $\lambda \cdot \frac{1}{n+1}$



Από διάσπαση Poisson έχω πολ. δ. Poisson με ρυθμό $\lambda_n = \frac{\lambda}{n+1}$

δ.σ. $N(t) = \#$ πελατών τη στιγμή t. Έχω χ.κ. $S = \mathbb{N}_0$ και διάγραμμα ρ/θ.



Είναι η $N(t)$ B+D.? ναι

Εύρεση στάσιμης (οριακής) κατανομής

$C_0 = 1$, $C_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} = \frac{\lambda \cdot \lambda/2 \cdots \lambda/n}{\mu \cdot \mu \cdots \mu} = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}$

θέτω $\rho = \lambda/\mu$. Τότε $C_n = \frac{\rho^n}{n!}$ $n = 0, 1, \ldots$

Συνθήκη Ευστάθειας $\sum_{n=0}^{\infty} C_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} = e^{\rho} < \infty$ $\forall \rho$ ή $\forall \lambda, \mu$.

Άρα η σειρά είναι συγκλίνουσα $\forall \lambda, \mu$.

Με πιθανότητα κατάστασης $\pi_0 = \left[\sum C_n\right]^{-1} = e^{-\rho}$

$$\pi_n = C_n \pi_0 = e^{-\rho} \cdot \frac{\rho^n}{n!}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Άρα παρατηρώ ότι N (αριθμός πελατών) $\sim$ Poisson (ρ)

$L = E[N] = \rho$. Από Little $W = \frac{L}{\bar{\lambda}}$

όπου $\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \pi_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda}{n+1} e^{-\rho} \frac{\rho^n}{n!} = \frac{\lambda}{\rho} e^{-\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^{n+1}}{(n+1)!}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} = e^{\rho}$$

$$= \frac{\lambda}{\rho} e^{-\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!}$$

$\lambda / \rho = \lambda / \lambda / \mu = \mu$

$$= \frac{\lambda}{\rho} e^{-\rho} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} - 1 \right) = \frac{\lambda}{\rho} e^{-\rho}\left(e^{\rho} - 1\right)$$

Άρα $\bar{\lambda} = \mu(1 - e^{-\rho})$

$$W = \frac{L}{\bar{\lambda}} = \frac{\rho}{\mu(1 - e^{-\rho})} = \frac{\lambda}{\mu^2(1 - e^{-\rho})}$$

$W = W_q + 1/\mu \Rightarrow W_q = \frac{\lambda}{\mu^2(1 - e^{-\rho})} - \frac{1}{\mu} = \ldots$

Little για $L_q = \bar{\lambda} W_q = \ldots$

Ασκ. 2 $\boxed{s = 3}$ Τεχνικοί.. Χρον. Μονάδα = 1 hr.

Αφίξεις οι κλήσεις Poisson με $\boxed{\lambda = 6 \text{ κλ} / \text{ώρα}}$

Χρόνοι Εξυπηρέτησης $\sim Exp(\mu)$ $E[ws] = 10$ min $= 1/6$ hr. και τότε $\boxed{\mu = 6 \text{ κλ} / \text{ώρα}}$

$N \geq 3$ θα μπει σε αναμονή

Στόχοι: $P(N < 3) \geq 0.9 \Rightarrow P(N \leq 2) \geq 0.9$

$W_q \leq 1/2$ min $= \frac{1}{120}$ hr. Το σύστημα είναι M/M/3

Είναι εργοδικό; $\rho = \frac{\lambda}{s\mu} = \frac{6}{3\cdot 6} = \frac{1}{3} < 1$ άρα εργοδικό

$s = 3$

άρα υπάρχει στάσιμη κατανομή.

$\lambda/\mu = 6/6 = 1.$

$\rho = 1/3$

$$\pi_n = \begin{cases} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}\pi_0 & n = 1, \dots, s-1 \\ \frac{(\lambda/\mu)^n}{s!\, s^{n-s}}\pi_0, & n = s, \dots \end{cases}$$

$$\pi_0 = \left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!\,(1-\rho)} \right]^{-1}$$

$$\pi_0 = \left[\frac{1^0}{0!} + \frac{1^1}{1!} + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!\,\frac{2}{3}} \right]^{-1} = \frac{4}{11}$$

$$P(N \le 2) = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = \frac{4}{11} + \frac{4}{11} + \frac{2}{11} = \frac{10}{11} > \frac{9}{10}$$

$9 = 9/10$

$$\pi_1 = \frac{(\lambda/\mu)^1}{1!}\pi_0 = \frac{4}{11} \qquad \pi_2 = \frac{(\lambda/\mu)^2}{2!}\pi_0 = \frac{2}{11}$$

άρα ok

Για το δεύτερο στοιχείο; $W_q = \frac{L_q}{\lambda}$ από Little

$$L_q = \sum_{n=3}^{\infty} (n-3)\pi_n = \sum_{n=3}^{\infty} (n-3) \frac{(\lambda/\mu)^3}{3!\, 3^{n-3}} \cdot \frac{4}{11} = \frac{4}{6\cdot 11} \sum_{n=3}^{\infty} (n-3)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-3}$$

$$= \frac{4}{6\cdot 11} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{4}{6\cdot 11} \cdot \frac{1/3}{\left(1 - 1/3\right)^2} = \frac{4/3}{6\cdot 11\cdot \frac{4}{9}} = \frac{1}{22}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

$\rho = 1/3$

και $W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{1/22}{6} = \frac{1}{132} < \frac{1}{120}$ ok.

Άσκ. 3 → πελάτες

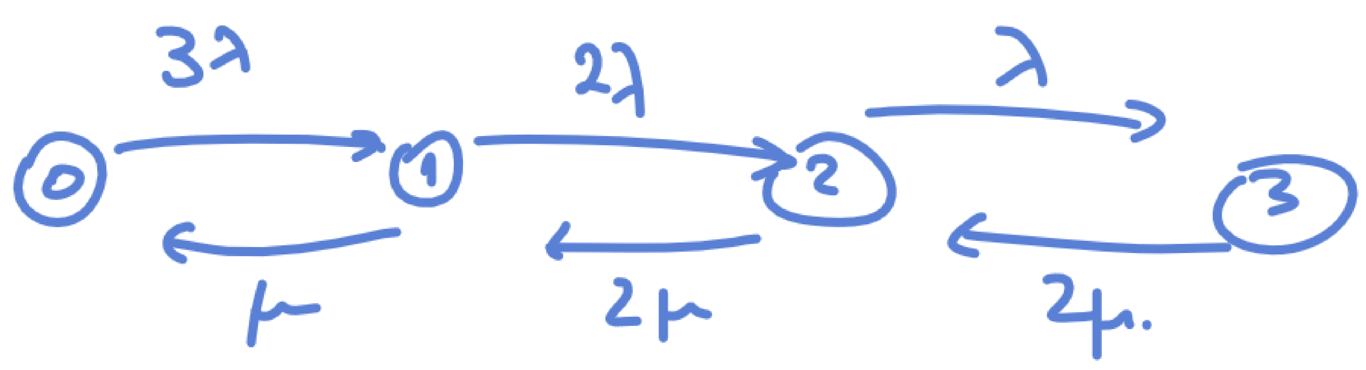
3 τοπογράφοι. Χρόνος λειτουργίας $\sim Exp(1/9)$ Χρον. Μον. = 1 hr.

2 τεχνικοί: Χρόνος Επιδιόρθωσης $\sim Exp(1/2)$

Δεν είναι $M/M/2/3$. Είναι $M/M/2$ με πεπερασμένο πληθυσμό πελατών. $N = 3$

$N(t)$ = # τοπογράφων εκτός λειτουργίας τη στιγμή t

έχει χ.κ. $S = \{0, 1, 2, 3\}$ και δ.ρ.μ.



$\lambda = 1/9$, $\mu = 1/2$

Είναι δ.τ-θ ? η $N(t)$ ΝΑΙ. Άρα υπάρχει κατανομή με τη γνωστή μέθοδο

$$C_0 = 1, \quad C_1 = \frac{3\lambda}{\mu}, \quad C_2 = \frac{3\lambda\, 2\lambda}{\mu\, 2\mu} = 3\left(\lambda/\mu\right)^2$$

$$C_3 = \frac{3\lambda\, 2\lambda\, \lambda}{\mu\, 2\mu\, 2\mu} = \frac{3}{2}\left(\lambda/\mu\right)^3$$

Το σύστημα ευσταθές λόγω του πεπ. χ.κ. οπότε $\exists!\ \pi_n$ με $\pi_0 = \left[\sum_{n=0}^{3} C_n\right]^{-1}$, $\pi_n = C_n \pi_0$ $n = 1, 2, 3$

β) π_3 = ποσοστό του χρόνου που δεν εξυπηρετούνται οι πελάτες

π_0 = " , που λειτουργούν όλοι οι τοπ. και οι τεχνικοί δεν εργάζονται

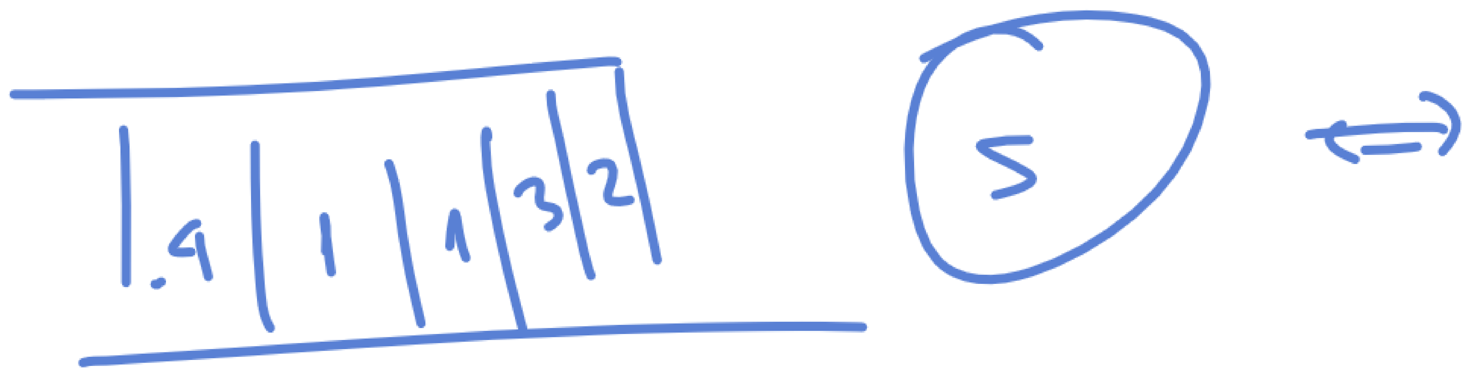
γ) $\bar{N}$ = μακροπρόθεσμο πλήθος τοπογράφων off $\sim \pi_n$ $\nexists$

$L = E[N]$ = μέσο πλήθος τοπογράφων εκτός λειτουργίας $= 0\pi_0 + 1\pi_1 + 2\pi_2 + 3\pi_3$

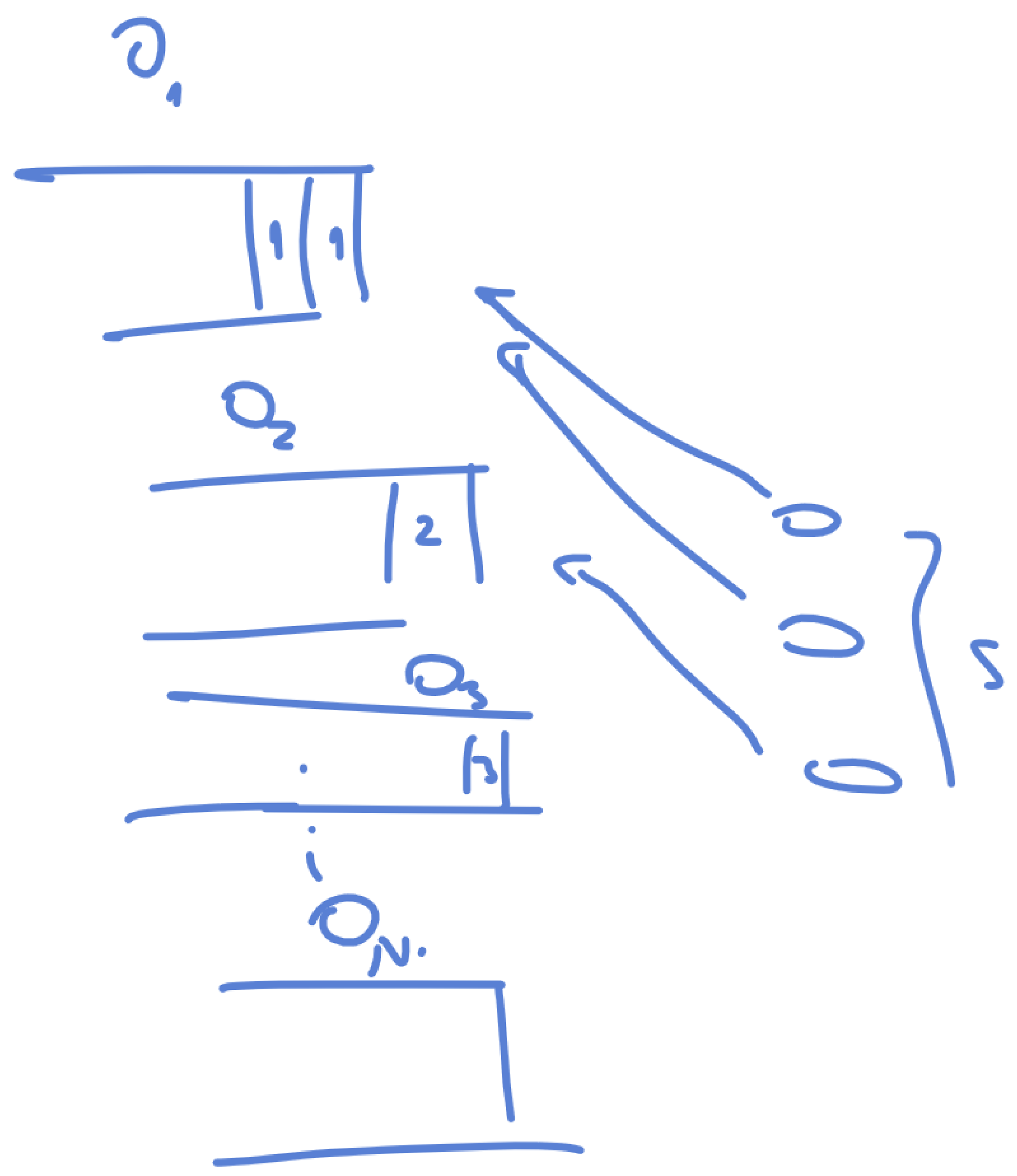
$W = L/\bar{\lambda}$, $\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{3} \lambda_n \pi_n$

Μοντέλα με προτεραιότητες

non preemptive



$\Longleftrightarrow$



μ_i διάφορα.

άλλα $s=1$

$\lambda_1/\mu_1+\dots+\frac{\lambda_N}{\mu_N}<1$ για ευστάθεια

$\Downarrow$

$$W_k = \frac{a_k}{b_{k-1}b_k}+\frac{1}{\mu_k}, \quad a_k = \sum_{i=1}^{N}\frac{\lambda_i}{\mu_i^2}$$

$$b_0=1,\quad b_k = 1-\sum_{i=1}^{k}\lambda_i/\mu_i,\quad i=1,\dots,N.$$

$s\geq 1$ αλλά

$\mu_i=\mu \;\; \forall i.$

$$\frac{\lambda}{s\mu}=\frac{\lambda_1+\dots+\lambda_N}{s\mu}<1 \text{ για ευστάθεια.}$$

$\Downarrow$

Στάσιμη κατανομή δεν έχω σε κλειστή μορφή

$$W_k = \frac{1}{AB_{k-1}B_k}+\frac{1}{\mu}$$

A: σταθ. $\left(A=\frac{\mu^2}{\lambda} \text{ αν } s=1\right)$

$B_0=1,\ \dots$

$B_k = 1-\frac{\sum_{i=1}^{k}\lambda_i}{s\mu}$

$\to M/M/s$ (λ, $s\mu$)

Το συνολικό.

$L_k=\lambda_k W_k$ (Little στην Q_k)

$W_{q_k}=W_k-\frac{1}{\mu_k}.$

$L_{q_k}=\lambda_k W_{q_k}$

$L=L_1+\dots+L_N.$

$\Lambda W=\lambda_1 W_1+\dots+\lambda_N W_N.$

Ρυλ.6 | Ασκ. 3

$s = 1$.

$N = 2$ κλάσεις — business $(k=1)$ $\lambda_1 = 2/$ώρα — coach $(k=2)$ $\lambda_2 = 10/$ώρα.

non preemptive.

Αδιάκοπη λειτουργία.

$E[W_s] = 3min = \frac{3}{60} = \frac{1}{20} \Rightarrow \mu_1 = \mu_2 = \mu = 20$ πελ/ώρα.

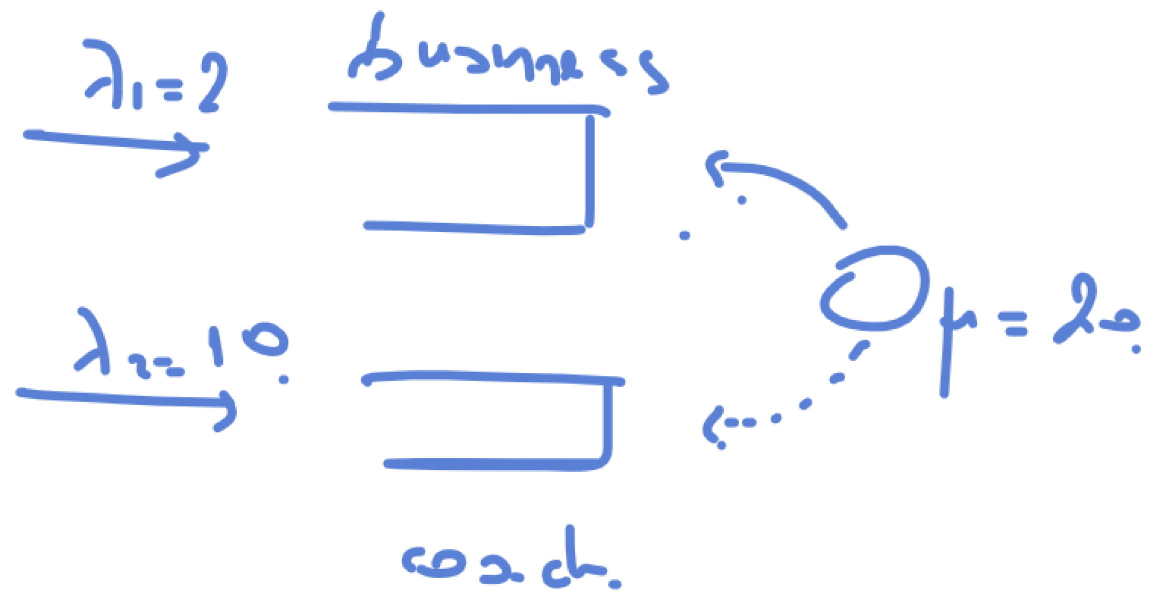
Χρον. Μονάδα 1 hr

Συνολ. Σύστημα $M/M/1$ με $\Lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 12$, $s = 1$, $\mu = 20$

Άρα $r = \frac{\Lambda}{s\mu} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} < 1 \Rightarrow$ ευσταθές.

Το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση σταθερότητας άρα $\exists\, \pi_n$: στάσιμη κατανομή. και άρα και οι ουρές που διαμορφώνουν οι διαφορετικές κλάσεις πελατών είναι ευσταθείς.

Υπολογισμός.



$$A = s!\,\frac{s\mu-\Lambda}{r^s}\sum_{j=0}^{s-1}\frac{r^j}{j!} + s\mu$$

$$\overset{s=1}{=} 1!\,\frac{\mu-\Lambda}{r}\,\frac{r^0}{0!} + \mu = \frac{\mu-\Lambda}{r} + \mu = \frac{\mu-\Lambda}{\Lambda/\mu} + \mu = \frac{\mu(\mu-\Lambda)+\Lambda\mu}{\Lambda} = \frac{\mu^2}{\Lambda}$$

$$A = \frac{\mu^2}{\Lambda} = \frac{20^2}{12} = \frac{100}{3}$$

$B_0 = 1$, $B_1 = 1 - \frac{\lambda_1}{1\cdot\mu_1} = 1 - \frac{2}{20} = \frac{9}{10}$

$N=2$ $B_2 = 1 - \frac{\lambda_1+\lambda_2}{s\mu} = 1 - \frac{\Lambda}{\mu} = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$.

$$W_1 = \frac{1}{A B_0 B_1} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\frac{100}{3} \cdot 1 \cdot \frac{9}{10}} + \frac{1}{20} = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}$$

$$W_2 = \frac{1}{A B_1 B_2} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\frac{100}{3} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{2}{5}} + \frac{1}{20} = \frac{2}{15}$$

Για την Q_1: business $\quad L_1 = \lambda_1 W_1 = 2 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$ πελ.

$$W_{q_1} = W_1 - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{30} \text{ hr.}$$

$$L_{q_1} = \lambda_1 W_{q_1} = 2 \cdot \frac{1}{30} = \frac{1}{15} \text{ πελ.}$$

Q_2: coach $\quad L_2 = \lambda_2 W_2 = 10 \cdot \frac{2}{15} = \frac{4}{3}$

$W_{q_2} = W_2 - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{12}$ και $L_{q_2} = \lambda_2 \cdot \frac{1}{12} = \frac{5}{6}$

β) $\frac{W_{q_1}}{W_{q_2}}$ = ποσοστό του μέσου χρόνου αναμονής ενός πελάτη της business

$$= \frac{1/30}{1/12} = 40\%$$

γ) Συνολικό Σύστημα M/M/1 με $\lambda = 12$, $\mu = 20$ $\quad \pi_0 = 1 - r.$

$(\Rightarrow \quad 1 - \pi_0 = P(N > 0))$

$= r = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} = 60\%$

ποσοστό χρόνου που ο υπάλληλος είναι απασχολημένος ανά ώρα

Άρα. ανά ώρα απασχολείται $12 \cdot 60\% = 7,2$ ώρες

Δίκτυα ουρών

Equivalence Property

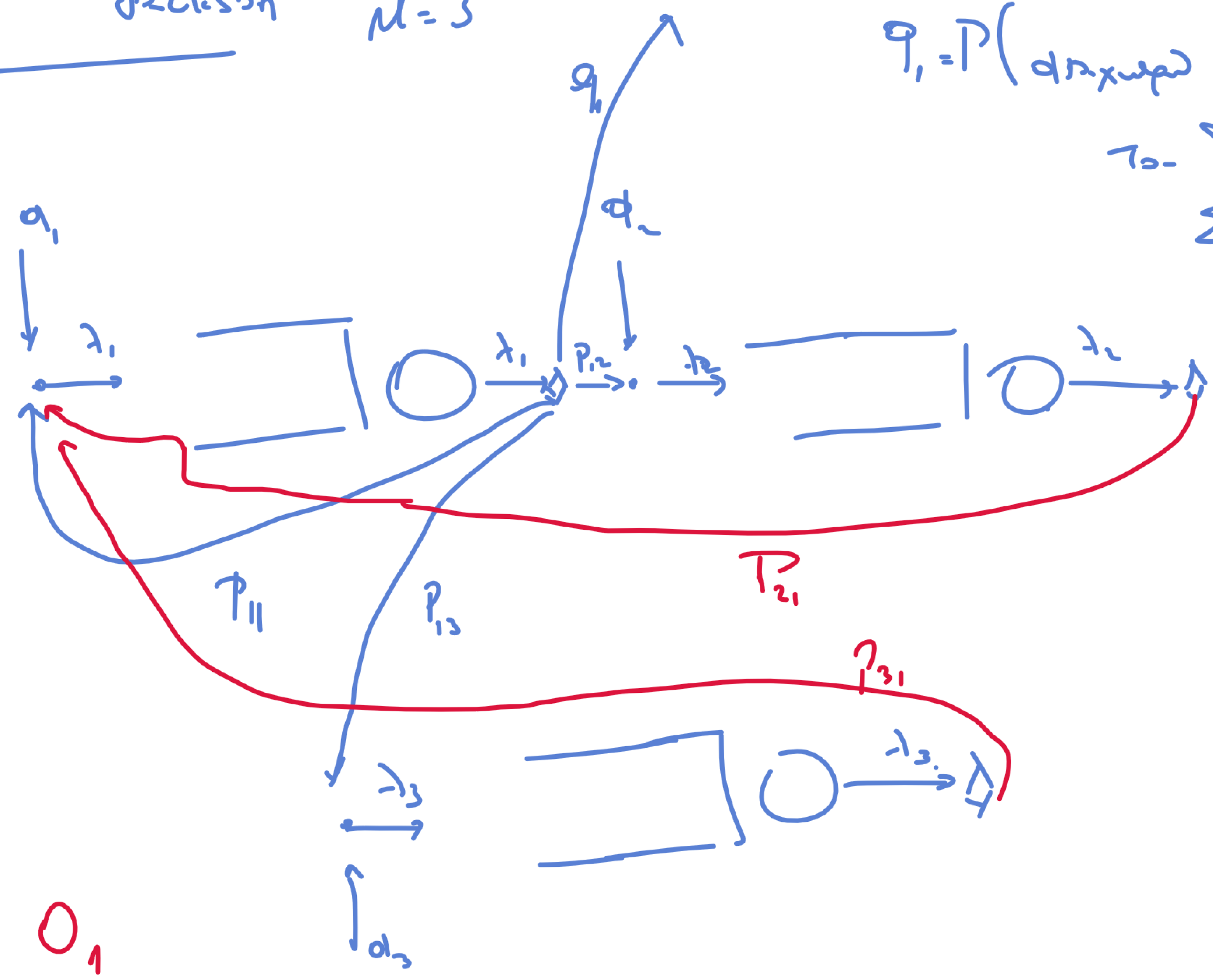
$P_{ij} = P$(να πάει στην O_j | αναχωρεί από O_i)

$q_i = P$(αναχωρεί οριστικά από το δίκτυο)

$\sum P_{ij} + q_i = 1.$

Ανοικτό Jackson

$M = 3$



Είσοδος στην O_1

Από έξω δ. Poisson ρυθμού α_1

Από O_1 δ. Poisson ρυθμού $\lambda_1 P_{11}$ Μείξη δ. Poisson

" O_2 " ρυθμού $\lambda_2 P_{21}$ $\Rightarrow$ ρυθμού $\alpha_1 + \lambda_1 P_{11} + \lambda_2 P_{21} + \lambda_3 P_{31}$

O_3 δ. Poisson " $\lambda_3 P_{31}$

$= \lambda_1$

Εξισώσεις κίνησης

Η λύση αντιστοιχεί στους πραγματικούς ρυθμούς αφίξεων λ_i στις ουρές O_i και η ανάλυση αυτών $M|M|s_i$ θα γίνει κατά τα γνωστά με λ_i, μ_i, s_i.

Ανάλυση σε κάθε ουρά O_i:

$M/M/s_i$ με λ_i, μ_i

1) Ευστάθεια $\rho_i = \dfrac{\lambda_i}{s_i \mu_i} < 1$

2) Στάσιμη κατανομή $\pi_{n_i} = P[N_i = n_i]$

3) Μέτρα Απόδοσης της O_i — W_i, L_i, W_{q_i}, L_{q_i}

Για το δίκτυο

1) Από κοινού στάσιμη $P[N_1 = n_1, N_2 = n_2, \dots, N_M = n_M] = \pi_{n_1} \pi_{n_2} \cdots \pi_{n_M}$

2) L = μέσο πλήθος πελατών στο δίκτυο $= L_1 + L_2 + \dots + L_M$

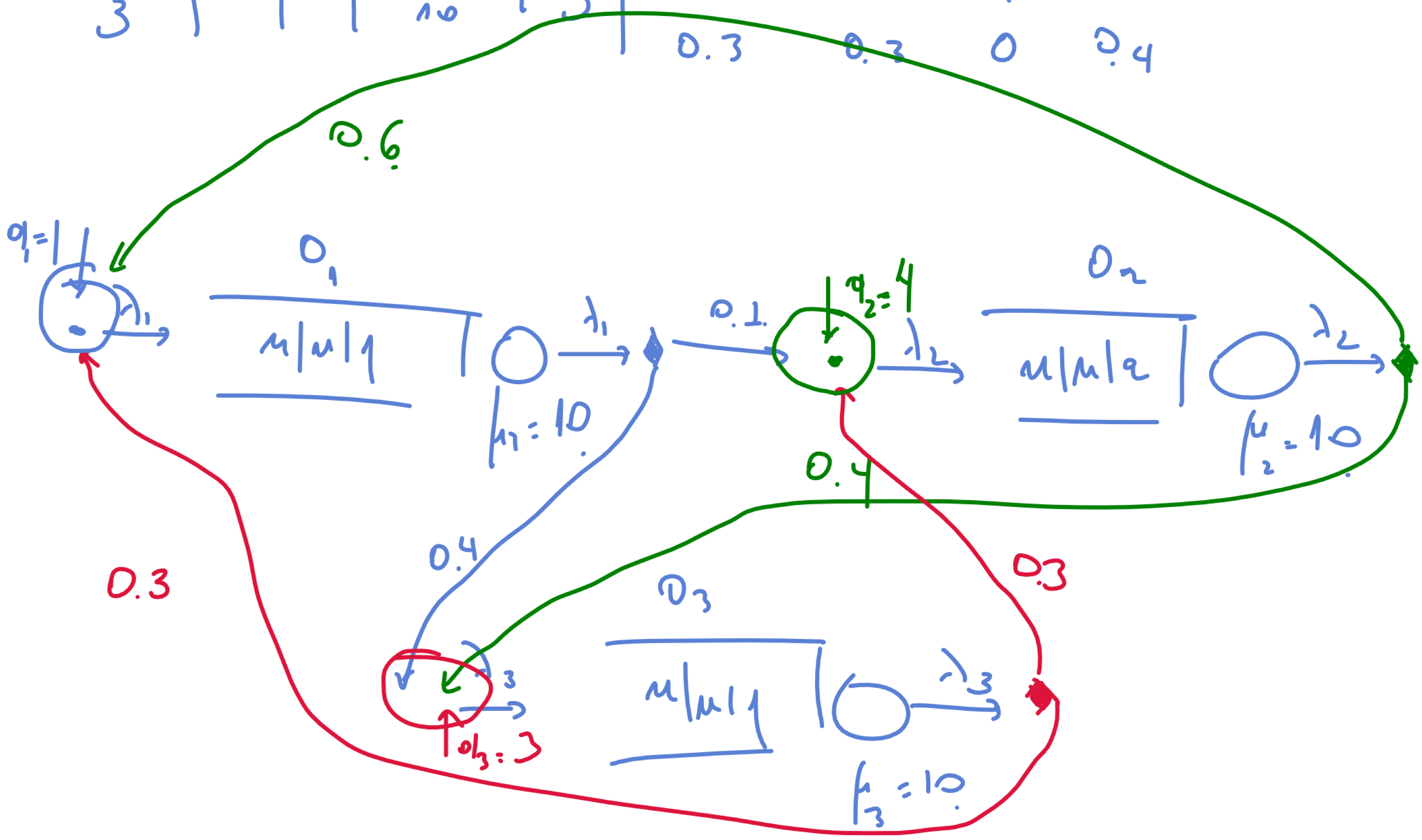
3) W = μέσος χρόνος παραμονής αυθαίρετου πελάτη στο δίκτυο $= \dfrac{L}{\sum a_i}$

4) T_i = " " " πελάτη που μπαίνει στην O_i στο δίκτυο

$$T_i = W_i + \sum_{j=1}^{M} p_{ij} T_j$$

Παράδειγμα $M=3$. Χρον. μονάδα: 1 hr

Q_i	s_i	μ_i	α_i	P_{ij}: $j=1$	2	3	$q_i = P[\text{αναχ. από το δίκτυο από την } Q_i]$
1	1	10	1	0	0.1	0.4	0.5
2	2	10	4	0.6	0	0.4	0
3	1	10	3	0.3	0.3	0	0.4



Βήμα 1

$$\lambda_1 = \alpha_1 + P_{21}\lambda_2 + P_{31}\lambda_3 + \cancel{P_{11}\lambda_1}^{\to 0}$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 + 0.6\lambda_2 + 0.3\lambda_3 \\ \lambda_2 &= 4 + 0.1\lambda_1 + 0.3\lambda_3 \\ \lambda_3 &= 3 + 0.4\lambda_1 + 0.4\lambda_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = 10,\ \lambda_3 = \frac{15}{2}.$$

Βήμα 2 Ανάλυση κάθε συστήματος

Q_1: M|M|1, $\lambda_1 = 5$, $\mu_1 = 10$. Αφού $\rho_1 = \lambda_1/\mu_1 = 1/2 < 1$ ευσταθής και $N_1 \sim \text{Geom}(\rho_1)$ στο $\mathbb{N}_0$

$$P[N_1 = n_1] = (1-\rho_1)\rho_1^{n_1} = \left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n_1}, \quad n_1 = 0,1,2,\ldots$$

$$L_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1 - \lambda_1} = 1; \quad W_1 = \frac{1}{\mu_1 - \lambda_1} = \frac{1}{5}.$$

O_2: M/M/2 $\quad \lambda_2 = 10, \quad \mu_2 = 10 \quad \rho_2 = \dfrac{\lambda_2}{s_2 \mu_2} = \dfrac{1}{2} < 1$ άρα ευσταθής

$\exists\, \pi_{n}$ με $\quad \pi_0 = \left[\sum_{n=0}^{1} \dfrac{(\lambda_2/\mu_2)^{n_2}}{n_2!} + \dfrac{(\lambda_2/\mu_2)^2}{2!\,(1-\rho_2)} \right]^{-1} = \dfrac{1}{3}$

$$\pi_{n_2} = \begin{cases} \pi_0 \cdot \dfrac{(\lambda_2/\mu_2)^{n_2}}{n_2!} & n_2 = 1 \\ \pi_0 \cdot \dfrac{(\lambda_2/\mu_2)^2}{2!\, 2^{n_2 - 2}}, & n_2 = 2, 3, 4, \ldots \end{cases}$$

$$L_{q_2} = \sum_{n_2=2}^{\infty} (n_2 - 2)\pi_{n_2} = \ldots = \frac{(\lambda_2/\mu_2)^2}{2!} \frac{\rho_2}{(1-\rho_2)^2}\pi_0 = \ldots = \frac{1}{3}$$

$$W_{q_2} = \frac{L_{q_2}}{\lambda_2} = \frac{1/3}{10} = \frac{1}{30} \quad \text{και}$$

$$W_2 = W_{q_2} + \frac{1}{\mu_2} = \frac{1}{30} + \frac{1}{10} = \frac{4}{30} \qquad \xrightarrow{\text{Little}} L_2 = \lambda_2 W_2 = 10 \cdot \frac{4}{30} = \frac{4}{3}$$

O_3: M/M/1, $\quad \lambda_3 = \dfrac{15}{2}, \quad \mu_3 = 10 \Rightarrow \rho_3 = \dfrac{15/2}{10} = \dfrac{3}{4} < 1$ ευσταθής

$N_3 \sim Geom(\rho_3)$ από [illegible] άρα $P[N_3 = n_3] = \dfrac{1}{4} \cdot \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n_3}, \; n_3 = 0, \ldots$

$$L_3 = \frac{\lambda_3}{\mu_3 - \lambda_3} = \frac{15/2}{10 - 15/2} = 3 \quad \text{και} \quad W_3 = L_3/\lambda_3 = \frac{3}{15/2} = \frac{6}{15}$$

Στο δίκτυο.

$$P[N_1 = n_1, N_2 = n_2, N_3 = n_3] = \pi_{n_1} \cdot \pi_{n_2} \cdot \pi_{n_3} \quad (n_1, n_2, n_3)$$

κενό δίκτυο $\leftarrow P[N_1 = 0, N_2 = 0, N_3 = 0] = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{24}$

$$L = L_1 + L_2 + L_3 = 1 + \frac{4}{3} + 3 = \frac{16}{3}$$ ← σε όλο δίκτυο

$$W = \frac{L}{a_1 + a_2 + a_3} = \frac{16/3}{1 + 4 + 3} = \frac{2}{3}$$ ← Προσοχή Όχι.

$W \neq W_1 + W_2 + W_3$

Μέσος χρόνος, παραμονής πελάτη στο δίκτυο όταν μπαίνει από O_1

$T_i =$ " " " " από O_i

$$T_i = W_i + \sum_{j=1}^{3} P_{ij} T_j \quad \forall i = 1, 2, 3.$$