# Σεμινάριο Επιχειρησιακής Έρευνας
## Στρατηγική συμπεριφορά σε συστήματα ουρών αναμονής

## Διάλεξη 1: Εισαγωγή

### ① Πηγή:
- Hassin, R and Haviv, M. (2003) To Queue or Not to Queue: Equilibrium Behavior in Queueing Systems. Chapter 1.

### ② Γενικό πλαίσιο:
- Σύστημα εξυπηρέτησης
- Στρατηγικές οντότητες σε αυτό (π.χ. πελάτες, υπηρέτες, διαχειριστές)
- Οι οντότητες παίρνουν αποφάσεις για μεγιστοποίηση της ωφέλειάς τους, λαμβάνοντας υπόψη ότι και οι άλλοι κάνουν το ίδιο.
- Προβλήματα:
  1| Εύρεση στρατηγικών ισορροπίας.
  2| Εύρεση κοινωνικά βέλτιστων στρατηγικών.
  3| Ποσοτικοποίηση της απόκλισης στρατηγικών ισορροπίας και κοινωνικά βέλτιστων στρατηγικών (τιμή της αναρχίας - price of anarchy)
  4| Μηχανισμοί ρύθμισης ώστε οι στρατηγικές ισορροπίας να είναι κοινωνικά βέλτιστες (τιμολόγηση, προτεραιότητες, πειθαρχία ουράς, έλεγχος πληροφορίας)
- Εργαλεία:
  Θεωρία Ουρών Αναμονής και Θεωρία Παιγνίων.

### ③ Ιστορία
- Leeman, W.A. (1964): Κριτική της "κλασσικής" θεωρίας ουρών ότι είναι κατάλληλη για κεντρικά σχεδιασμένη οικονομία
- Naor, P. (1969): Πρώτη εργασία όπου οι πελάτες συμπεριφέρονται

στρατηγικά σε μια παρατηρήσιμη M/M/1 ουρά. Τιμολόγηση για κοινωνική βελτιστοποίηση και βελτιστοποίηση του κέρδους ενός μονοπωλίου.

- Ειδικότερα:

Leeman, W.A (1964) 3 λόγοι για να τιμολογηθεί μια ουρά:

1| Βελτιστοποίηση κατανομής υπαρχόντων πόρων

2| Αποκέντρωση διοικητικών αποφάσεων

3| Καθοδήγηση μακροπρόθεσμων επενδυτικών αποφάσεων

Naor, P. (1969) 1 ακόμα λόγος:

4| Ρύθμιση ζήτησης.

## (4) Βασικές έννοιες από τη Θεωρία Παιγνίων.

- Μη - συνεργατικό παιχνίδι:

$N = \{1, 2, \dots, n\}$ : σύνολο παικτών

$A_i$ : σύνολο πλάνων δράσης του παίκτη $i$

καθαρή στρατηγική του $i$ = στοιχείο του $A_i$

μικτή στρατηγική του $i$ = κατανομή πιθανότητας στο $A_i$

$S_i$ : σύνολο μικτών στρατηγικών του $i$

$\underline{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ : προφίλ στρατηγικών, $s_i \in S_i$

$F_i(\underline{s})$ : συνάρτηση πληρωμής του $i$ στο $\underline{s}$

$\underline{s} = (s_i, s_{-i})$ : συμβολ.

- Η συνάρτηση $F_i(s_i, s_{-i})$ είναι γραμμική ως προς $s_i$:

Αν $$s_i = \begin{cases} s_i^1 & \text{με πιθ } \alpha \\ s_i^2 & \text{με πιθ } 1-\alpha \end{cases}$$

τότε

$$F_i(s_i, s_{-i}) = \alpha F_i(s_i^1, s_{-i}) + (1-\alpha) F_i(s_i^2, s_{-i}).$$

- $s_i^1$ ασθενώς κυριαρχεί της $s_i^2$

$$\Leftrightarrow \forall s_{-i} : F_i(s_i^1, s_{-i}) \geq F_i(s_i^2, s_{-i})$$

και για ένα $s_{-i}$ η ανισότητα είναι >.

- ($s_i^1$ ισχυρά κυριαρχεί της $s_i^2$

$$\Leftrightarrow \forall s_{-i} : F_i(s_i^1, s_{-i}) > F_i(s_i^2, s_{-i}))$$

- $s_i^*$ βέλτιστη απάντηση έναντι της $s_{-i}$

$$\Leftrightarrow F_i(s_i^*, s_{-i}) \geq F_i(s_i, s_{-i}) \ \forall s_i$$

δηλ. $s_i^* \in \underset{s_i \in S_i}{\arg\max}\, F(s_i, s_{-i})$

- $s_i$ ασθενώς κυριαρχούσα στρατηγική του $i$
  $\Leftrightarrow$ $s_i$ ασθενώς κυριαρχεί κάθε άλλης στρατηγικής του $i$
- $\underline{s}^e$ στρατηγικό σημείο ισορροπίας
  $\Leftrightarrow$ $s_i^e$ βέλτιστη απάντηση έναντι της $s_{-i}^e$ $\forall i \in N$.

## (5) Παίγνια μεταξύ των πελατών στις Ουρές

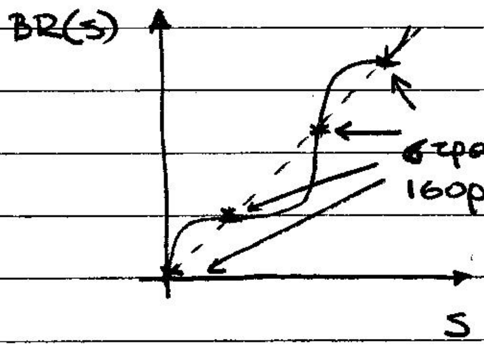
- Πρόβλημα: Οι πελάτες είναι άπειροι.
- Ομοιογένεια: Οι πελάτες είναι όμοιοι.
  S: Σύνολο κοινών στρατηγικών
  F: Συνάρτηση πληρωμής
  F(a,b): Πληρωμή ενός πελάτη που χρησιμοποιεί την στρατηγική a όταν όλοι οι άλλοι χρησιμοποιούν την b.
- $s^e$ (συμμετρική) στρατηγική ισορροπίας
  $\Leftrightarrow F(s^e, s^e) \geq F(s, s^e) \ \forall s$

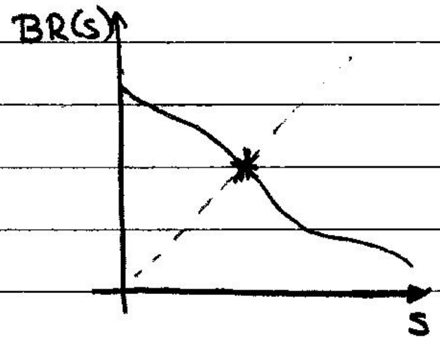
## (6) Διαδικασία εύρεσης στρατηγικών ισορροπίας

- Βήμα 1ο: Μελέτη της συμπεριφοράς συστήματος κάτω από μια στρατηγική $\underline{s}$ των πελατών (υπό τη στάσιμη κατανομή)
- Βήμα 2ο: Υπολογισμός πληρωμής ενός συγκεκριμ. πελάτη που ακολουθεί την $s_{tagged}$ όταν οι άλλοι ακολουθούν της $s_{others}$:
  $F(s_{tagged}, s_{others}) = ;$
- Βήμα 3ο: Εύρεση βέλτιστης απάντηση συγκ πελάτη έναντι στρατηγικής υπολοίπων:
  $$BR(s_{others}) = \underset{s_{tagged}}{\arg\max}\, F(s_{tagged}, s_{others})$$
- Βήμα 4ο: Εύρεση στρατηγικών με την ιδιότητα $s^e \in BR(s^e)$.

## (7) Συμπεριφορά Avoid-The-Crowd (ATC) και Follow-The-Crowd (FTC)

- Έστω ότι ο χώρος στρατηγικών είναι ολικά διατεταγμένος.
  s : στρατηγική των άλλων
  BR(s) : βέλτιστη απάντηση συγκεκρ. πελάτη έναντι της s.
- BR(s) ↑ in s : Συμπεριφορά FTC
  BR(s) ↓ in s : Συμπεριφορά ATC




## (8) Στρατηγικές κατωφλίου

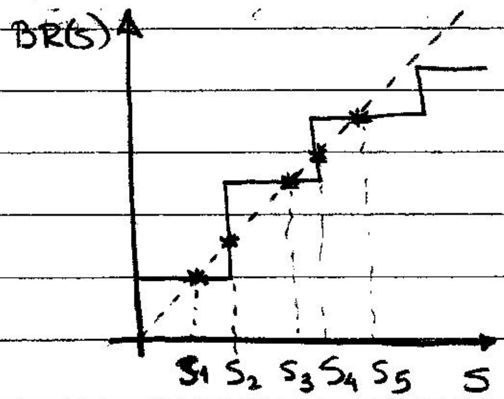
- Κατάσταση συστήματος = Πλήθος πελατών ∈ {0, 1, ...}
  ↑ συνήθως
- Απόφαση ∈ {$A_1$, $A_2$} = {να εισέλθω, να αποχωρήσω}
  ↑ συνήθως
- Στρατηγική = $(q_0, q_1, q_2, \ldots)$
  $q_i$ = πιθ. να πάρω την $A_1$ όταν η κατάσταση είναι $i$
- Καθαρή στρατηγική κατωφλίου με κατώφλι $n$

$$= (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n}, 0, 0, \ldots) = \begin{cases} A_1, & \text{για κατ} \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \\ A_2, & \text{για κατ} \in \{n, n+1, \ldots\} \end{cases}$$

- Μεικτή στρατηγική κατωφλίου με κατώφλι $x = n+p$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0,1)$ = Μίξη των καθαρών στρατηγικών κατωφλίου $n$ και $n+1$ με πιθανότητες $1-p$ και $p$ αντίστοιχα

$$= (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n}, p, 0, 0, \ldots) = \begin{cases} A_1, & \text{για κατ} \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \\ A_1 \text{ με πιθ. } p & \text{για κατάσταση} = n \\ A_2 \text{ με πιθ. } 1-p & \text{για κατάσταση} = n \\ A_2, & \text{για κατ} \in \{n+1, n+2, \ldots\} \end{cases}$$

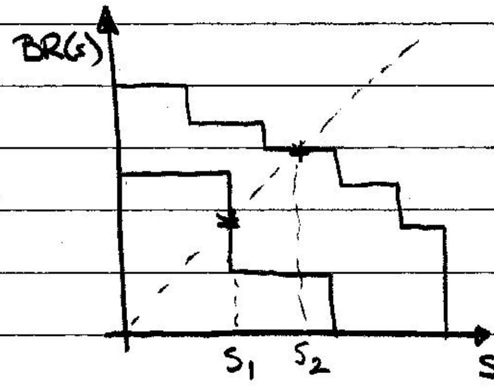
## ⑨ Στρατηγικές κατωφλίου ισορροπίας




FTC

$s_1, s_3, s_5$: καθαρές στρατ. ισορ.

$s_2, s_4, s_6$: μικτές στρατ. ισορ.




ATC

$s_1$: μοναδική μικτή στρατ. ισ.

$s_2$: μοναδική καθαρή στρατ. ισ.

## ⑩ Πλαίσιο ατομικής βελτιστοποίησης

– Οι πελάτες βελτιστοποιούν το καθαρό πλεόνασμά τους:

$$\text{Αμοιβή από εξυπηρέτηση} - \underbrace{\text{Πλήρης τιμή}}_{\text{Άμεσα κόστη} + \text{Κόστη αναμονής}}$$

– Πελάτες ουδέτεροι ως προς τον κίνδυνο (risk neutral)

## ⑪ Πλαίσιο κοινωνικής βελτιστοποίησης

– Ο κοινωνικός σχεδιαστής (social planner) μεγιστοποιεί τον συνολικό κοινωνικό πλούτο ανά χρονική μονάδα:

Αναμενόμενη συνολική ωφέλεια όλων των οντοτήτων (πελατών, υπηρετών).

– Πληρωμές μεταξύ οντοτήτων δεν επιδρούν στον συνολικό κοινωνικό πλούτο.

$$\text{Κοινωνικός πλούτος} = \text{Ωφέλειες από εξυπηρ.} - \text{Κόστη λειτουργίας} - \text{Κόστη αναμονής}$$

## (12) Βασικά αποτελέσματα από τη Θεωρία Ουρών

- Ονοματολογία Kendall

  A / B / c / s ( )

  διαδ. αφίξεων | χρόνοι εξυπ. | πλήθος υπηρ. | χωρητικ. | πειθαρχία

- Αποχώρηση (Balking): Όταν ένας πελάτης φθάνει αλλά δεν μπαίνει
- Υπαναχώρηση (Reneging): Όταν ένας πελάτης μπαίνει αλλά εγκαταλείπει πριν εξυπηρετηθεί
- Λ: Δυνητικός ρυθμός αφίξεων

  λ: Πραγματικός ρυθμός αφίξεων

  μ: Ρυθμός εξυπηρέτησης

  $\rho = \lambda/\mu$: Ρυθμός (ένταση) συνωστισμού.

- Νόμος του Little

$$\underbrace{E[\#\ \text{πελατών}]}_{E[Q]} = \underbrace{\text{Ρυθμός αφίξεων}}_{\lambda} \times \underbrace{E[\text{Χρόνος παραμ.}]}_{E[S]}.$$

- Ιδιότητα PASTA

  Poisson διαδ. αφίξεων $\Longrightarrow$

  $\#$ πελατών σε τυχαία χρον. στιγμή $\overset{d}{=}$ $\#$ πελατών σε στιγμή άφιξης

- Ισχυρή πειθαρχία ουράς (strong service discipline): Ο κανόνας επιλογής του επόμενου πελάτη προς εξυπηρέτηση δεν λαμβάνει υπόψη τις υπολειπόμενες απαιτήσεις εξυπηρέτησης (π.χ. FCFS, LCFS)
- Διατηρητική πειθαρχία ουράς (work-conserving service discipline): Ο υπηρέτης δεν είναι ποτέ ανενεργός όταν υπάρχουν πελάτες και κάθε πελάτης του οποίου η εξυπηρέτηση διακόπτεται συνεχίζει αργότερα από το ίδιο σημείο.

## (13) Αποτελέσματα στην M/M/1 ουρά με ισχυρή, διατηρητική πειθαρχία

- $P(\#\ \text{πελατών στο σύστημα} = n) = (1-\rho)\rho^n,\ n \geq 0$
- $E(\#\ \text{πελατών στο σύστημα}) = \frac{\rho}{1-\rho}$
- $E(\text{Χρόνος παραμονής}) = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\mu-\lambda}$

– $E$(Περίοδος συνεχούς λειτουργίας) $= \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\mu-\lambda}$

– $E$( Χρόνος μεταξύ άφιξης πελάτη και τέλους περ. συν. λειτ)

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (1-\rho)\rho^n \frac{n+1}{\mu-\lambda} = \left(1+\frac{\rho}{1-\rho}\right)\cdot\frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{\mu(1-\rho)^2}$$

– $E$(Χρόνος μετάβασης από $n$ σε $n-1$ πελάτες) $= \frac{1}{\mu-\lambda}$

Τα αποτελέσματα αυτά (εκτός απ' το τελευταίο) ισχύουν και για την M/G/1 ουρά με πειθαρχία EPS ή LCFS/PR

## (14) Αποτέλεσμα για την M/G/1 (FCFS)

– $E$( Χρόνος παραμονής) $= E[B] + \frac{\lambda E[B^2]}{2(1-\lambda E[B])}$, $B$ ο χρόνος εξυπ.

Αποδ:

Από Νόμο Little:

$$E[Q] = \lambda E[S]$$

Με δέσμευση στην κατάσταση που βλέπει ένας αφικνούμενος πελάτης, λαμβάνοντας υπόψη την PASTA

$$E[S] = \underbrace{(1-\rho)}_{\substack{\text{πιθ. κενού} \\ \text{συστήματος}}} E[B] + \rho\left(E[Q\,|\,Q\geq 1]\cdot E[B] + \frac{E[B^2]}{2E[B]}\right)$$

$$= (1-\rho)E[B] + \underbrace{E[Q\,1_{\{Q\geq 1\}}]}_{E[Q]} E[B] + \rho\frac{E[B^2]}{2E[B]}$$

$$= (1-\rho)E[B] + \lambda E[S]\, E[B] + \rho \frac{E[B^2]}{2E[B]}$$

$\Rightarrow$

$$E[S] = (1-\rho)E[B] + \rho E[S] + \rho\frac{E[B^2]}{2E[B]}$$

$\Rightarrow$

$$E[S] = E[B] + \frac{\rho}{1-\rho}\cdot\frac{E[B^2]}{2E[B]} = E[B] + \frac{\lambda E[B^2]}{2(1-\rho)}.$$

Σεμινάριο Επιχειρησιακής Έρευνας

Στρατηγική συμπεριφορά σε συστήματα ουρών αναμονής

Διάλεξη 2: Το βασικό Μαρκοβιανό μη-παρατηρήσιμο μοντέλο:
Το δίλημμα εισόδου/αποχώρησης στη μη-παρατηρήσιμη M/M/1 ουρά

① Πηγή:
- Hassin, R. and Haviv, M. (2003) To Queue or Not to Queue: Equilibrium Behavior in Queueing Systems.
Chapter 3: 3.1.

② Το μοντέλο
- Poisson ($\lambda$) διαδικασία αφίξεων
- Exp ($\mu$) χρόνοι εξυπηρέτησης
- 1 υπηρέτης
- $\infty$ χωρητικότητα
- FCFS πειθαρχία ουράς
- R: αμοιβή από την εξυπηρέτηση για ένας πελάτη
- C: κόστος αναμονής ανά χρονική μονάδα για έναν πελάτη (πληρώνεται είτε είναι στο χώρο αναμονής είτε εξυπηρετείται)
- Απόφαση πελάτη: Είσοδος / Αποχώρηση, χωρίς να παρατηρήσει το σύστημα
- p: τιμή εξυπηρέτησης για έναν πελάτη, που τίθεται από το διαχειριστή του συστήματος (υποτίθεται $p<R$).

③ Στρατηγικές πελάτη
- Είσοδος (1), Αποχώρηση (0): καθαρές στρατηγικές
- Είσοδος με πιθ. $q$, $q\in[0,1]$: μεικτές στρατηγικές

④ Συμπεριφορά του συστήματος υπό δεδομένη στρατηγική πελατών
- Έστω ότι οι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική $q$.
- Το σύστημα συμπεριφέρεται ως μια M/M/1 ουρά με ρυθμό αφίξεων $\lambda q$.
- Ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη που εισέρχεται

είναι $\dfrac{1}{\mu-\lambda q}$.

## (5) Συνάρτηση πληρωμής πελάτη

- Έστω ένας επιλεγμένος πελάτης που ακολουθεί τη στρατηγική $q'$ όταν οι άλλοι ακολουθούν την $q$.
- Η ωφέλειά του είναι

$$U(q',q) = (1-q')\cdot 0 + q'\left(R-p-C\cdot\frac{1}{\mu-\lambda q}\right).$$

## (6) Βέλτιστη απάντηση πελάτη

- Λύνοντας το πρόβλημα

$$\max_{q'} U(q',q)$$

βρίσκουμε τη βέλτιστη απάντηση ενός πελάτη σε μια στρατηγική $q$ των άλλων.

- Η $U(q',q)$ είναι γραμμική ως προς $q'$, οπότε για το σύνολο των βέλτιστων απαντήσεων έναντι της $q$, $BR(q)$, έχουμε:

$$BR(q) = \begin{cases} \{0\}, & \text{αν } R-p-C\dfrac{1}{\mu-\lambda q} < 0 \\ [0,1], & \text{αν } R-p-C\dfrac{1}{\mu-\lambda q} = 0 \\ \{1\}, & \text{αν } R-p-C\dfrac{1}{\mu-\lambda q} > 0. \end{cases}$$

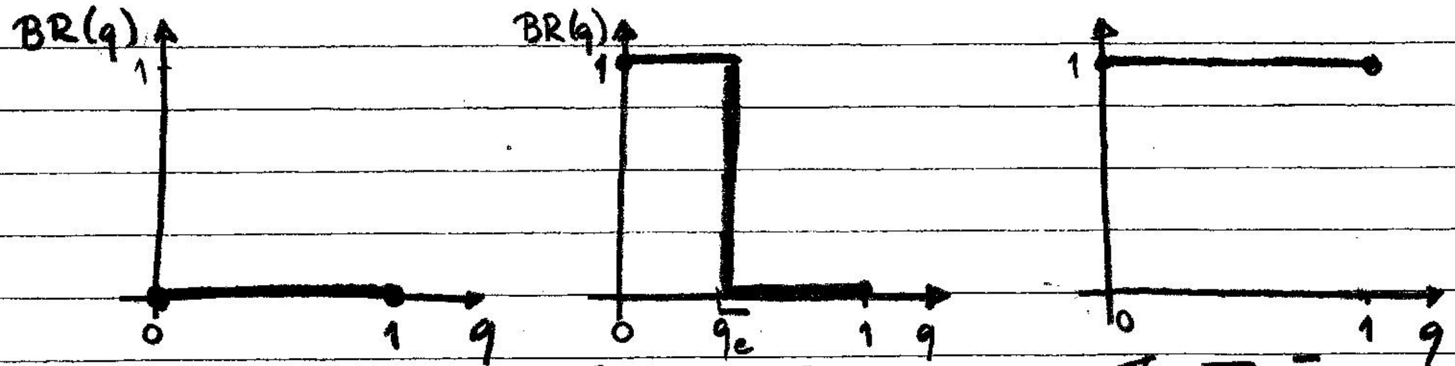
ή, λύνοντας ως προς $q$ ($q \in [0,1]$ και $\lambda q < \mu$)

$$BR(q) = \begin{cases} \{0\}, & \text{αν } q > \bar{q}_e \\ [0,1], & \text{αν } q = \bar{q}_e \\ \{1\}, & \text{αν } q < \bar{q}_e \end{cases}$$

Η συμπεριφορά είναι ATC.

με $\bar{q}_e = \frac{1}{\lambda}\left(\mu - \frac{C}{R-p}\right)$.

- Υπάρχουν 3 περιπτώσεις ανάλογα με το $\bar{q}_e$.




Περ. I: $\bar{q}_e \leq 0$ Περ. II: $0 < \bar{q}_e < 1$ Περ. III: $\bar{q}_e \geq 1$

## (7) Στρατηγικές ισορροπίας

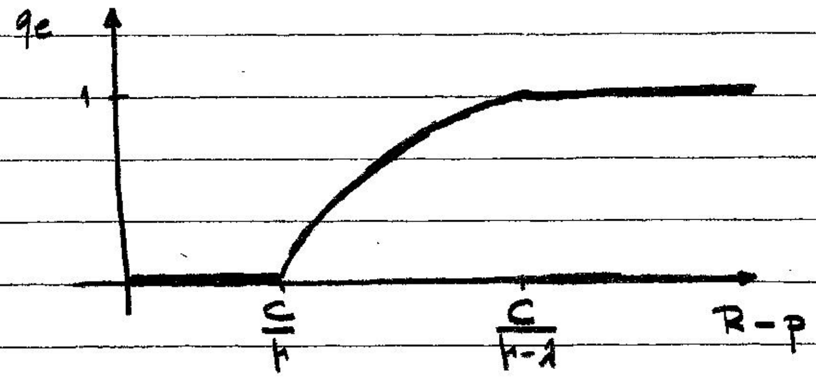
– Μια στρατηγική $q$ είναι στρατηγική ισορροπίας αν και μόνο αν $q \in BR(q)$

– Η $q_e = 0$ είναι στρατηγική ισορροπίας αν και μόνο αν $0 \in BR(0) \Leftrightarrow 0 \geq \overline{q_e} \Leftrightarrow R - p \leq \frac{C_1}{\mu}$.

– Η $q_e \in (0,1)$ είναι στρατηγική ισορροπίας αν και μόνο αν $q_e \in BR(q_e) \Leftrightarrow q_e = \overline{q_e} \Leftrightarrow q_e = \frac{1}{\lambda}\left(\mu - \frac{C_1}{R-p}\right)$, υπό την προϋπόθεση ότι $\overline{q_e} \in (0,1) \Leftrightarrow \frac{C_1}{\mu} < R - p < \frac{C_1}{\mu - \lambda}$.

– Η $q_e = 1$ είναι στρατηγική ισορροπίας αν και μόνο αν $1 \in BR(1) \Leftrightarrow 1 \leq \overline{q_e} \Leftrightarrow R - p \geq \frac{C_1}{\mu - \lambda}$.

– Επομένως η στρατηγική ισορροπίας είναι μοναδική και έχουμε




$$q_e = \begin{cases} 0, & R - p \leq \frac{C_1}{\mu} \\ \frac{1}{\lambda}\left(\mu - \frac{C_1}{R-p}\right), & \frac{C_1}{\mu} < R - p < \frac{C_1}{\mu-\lambda} \\ 1, & R - p > \frac{C_1}{\mu - \lambda}. \end{cases}$$

## (8) Κοινωνική βελτιστοποίηση

– Ο κοινωνικός σχεδιαστής θέλει να επιλέξει κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική $q_{soc}$ που μεγιστοποιεί τον κοινωνικό πλούτο ανά χρονική μονάδα

$$S(q) = \underbrace{\lambda q \cdot \left(R - \cancel{p} - \frac{C}{\mu - \lambda q}\right)}_{\text{Πλούτος πελατών}} + \underbrace{\lambda \cancel{q p}}_{\text{Πλούτος συστ. εξυπηρ.}}, \quad \text{ανεξ. του } p.$$

Έχουμε

$$\frac{d}{dq} S(q) = \lambda \left(R - \frac{C}{\mu - \lambda q}\right) - \lambda^2 q \frac{C}{(\mu - \lambda q)^2}$$

$$= \lambda \left(R - \frac{C\mu}{(\mu - \lambda q)^2}\right)$$

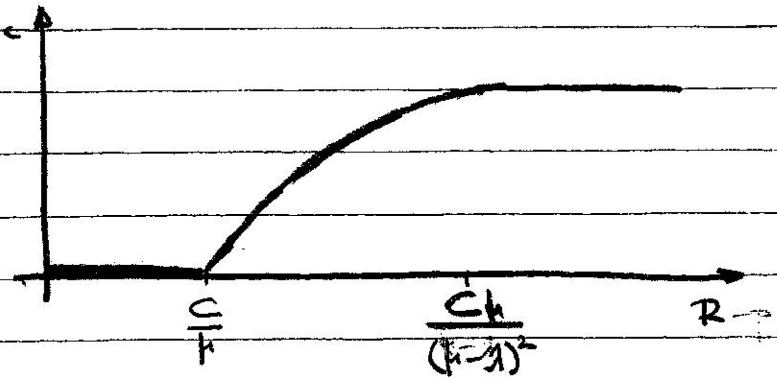
$$\frac{d^2}{dq^2} S(q) = -\frac{2C\mu\lambda^2}{(\mu - \lambda q)^3} < 0.$$

Επομένως η $S(q)$ είναι κοίλη για $q \in [0, \min(1, \mu/\lambda))$.
Μεγιστοποιείται για $\bar{q}_{soc}$:

$$\frac{d}{dq} S(\bar{q}_{soc}) = 0 \iff R - \frac{C\mu}{(\mu - \lambda \bar{q}_{soc})^2} = 0$$

$$\iff \bar{q}_{soc} = \frac{1}{\lambda}\left(\mu - \sqrt{\frac{C\mu}{R}}\right),$$

εφόσον $\bar{q}_{soc} \in [0,1]$, αλλιώς το μέγιστο είναι το 1.
— Επομένως η κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική είναι μοναδική και έχουμε




$$q_{soc} = \begin{cases} 0, & R \leq C/\mu \\ \frac{1}{\lambda}\left(\mu - \sqrt{\frac{C\mu}{R}}\right), & C/\mu < R < \frac{C\mu}{(\mu-\lambda)^2} \\ 1, & R \geq \frac{C\mu}{(\mu-\lambda)^2}. \end{cases}$$

Ισχύει πάντα ότι για $p = 0$ : $q_e(0) \geq q_{soc}$,
δηλ. αν η τιμή είναι 0, οι πελάτες χρησιμοποιούν το σύστημα περισσότερο απ' όσο είναι κοινωνικά βέλτιστο.

## (3) Βελτιστοποίηση κέρδους μονοπωλείου

— Ένα μονοπώλιο θέλει να επιλέξει τιμή $p_m$ ώστε να μεγιστοποιήσει το κέρδος ανά χρονική μονάδα.
Θέτοντας τιμή $p$, οι πελάτες υιοθετούν την αντίστοιχη στρατηγική ισορροπίας

$$q_e(p) = \begin{cases} 0, & R - p \leq C/\mu \\ \frac{1}{\lambda}\left(\mu - \frac{C}{R-p}\right), & C/\mu < R-p < \frac{C}{\mu-\lambda} \\ 1, & R-p \geq \frac{C}{\mu-\lambda} \end{cases}$$

οπότε το κέρδος γίνεται $\lambda q p = \lambda q \left(R - \frac{C}{\mu - \lambda q}\right)$
οπότε βελτιστοποιείται όπως στην κοινωνική βελτιστοποίηση.

- Οι αντικειμενικές συναρτήσεις της κοινωνίας και του μονοπωλίου συμπίπτουν διότι λόγω της ομοιογένειας των πελατών, ο διαχειριστής του συστήματος δεν αφήνει θετικό περιθώριο κέρδους στους πελάτες. Οπότε όλος ο κοινωνικός πλούτος πάει στο μονοπώλιο.
- Η τιμή $P_m$ που μεγιστοποιεί το κέρδος του μονοπωλίου είναι φθίνουσα ως προς $\lambda$:

$$P_m = R - \frac{C}{\mu - \lambda q_{soc}}.$$

Αυτό σημαίνει ότι αύξηση στη ζήτηση ($\lambda$) επάγει μείωση στην τιμή ($P_m$)! Αυτό φαίνεται αντι-διαισθητικό, αλλά δικαιολογείται διότι η αύξηση στη ζήτηση επάγει μείωση στην ποιότητα του αγαθού (μεγαλύτερος μέσος χρόνος αναμονής) και άρα και πτώση στην τιμή.

Σεμινάριο Επιχειρησιακής Έρευνας
Στρατηγική συμπεριφορά σε συστήματα ουρών αναμονής

## Διάλεξη 3: Το βασικό Μαρκοβιανό παρατηρήσιμο μοντέλο: Το δίλημμα εισόδου/αποχώρησης στην παρατηρήσιμη M|M|1 ουρά

### ① Πηγή:

- Hassin, R. and Haviv, M. (2003) To Queue or Not to Queue: Equilibrium behavior in Queueing Systems. Chapter 2: 2.1, 2.3, 2.4.

### ② Το μοντέλο

- Poisson ($\lambda$) διαδικασία αφίξεων
- Exp($\mu$) χρόνοι εξυπηρέτησης
- 1 υπηρέτης
- $\infty$ χωρητικότητα
- FCFS πειθαρχία ουράς
- R: αμοιβή από την εξυπηρέτηση για έναν πελάτη
- C: κόστος αναμονής ανά χρονική μονάδα για έναν πελάτη (πληρώνεται είτε είναι στο χώρο αναμονής είτε εξυπηρετείται)
- Απόφαση πελάτη: Είσοδος/Αποχώρηση
- Πληροφορία πελάτη: Αριθμός παρόντων πελατών κατά την άφιξή του.
- p: τιμή εξυπηρέτησης για έναν πελάτη, που τίθεται από το διαχειριστή του συστήματος

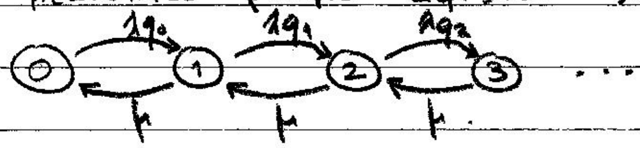
### ③ Στρατηγικές πελάτη

- $(q_0, q_1, \ldots, q_n, \ldots)$: μια μεικτή στρατηγική, $q_n \in [0,1]$, $n=0,1,\ldots$
  $q_n$ = Πιθ. εισόδου όταν υπάρχουν $n$ πελάτες στο σύστημα

### ④ Συμπεριφορά του συστήματος υπό δεδομένη στρατηγική πελατών

- Έστω ότι οι πελάτες ακολουθούν τη στρατηγική $\underline{q} = (q_0, q_1, \ldots, q_n, \ldots)$.

- Το σύστημα συμπεριφέρεται ως μια M/M/1 ουρά με μεταβλητό ρυθμό αφίξεων $\lambda_n = \lambda q_n$, δηλ.




- Ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα εξαρτάται από την $q$ και μπορεί να βρεθεί από το νόμο του Little.
- Όμως ο μέσος χρόνος παραμονής ενός πελάτη στο σύστημα, δεδομένου ότι βρίσκει $n$ πελάτες μπροστά του δεν εξαρτάται από την $q$ και είναι $\frac{n+1}{\mu}$.

Αιτία: FCFS πειθαρχία ουράς, αμνήμονη ιδιότητα χρόνων εξυπηρέτησης.

Συνέπεια: Ύπαρξη κυριαρχουσών στρατηγικών.

## (5) Συνάρτηση πληρωμής πελάτη

- Έστω ένας επιλεγμένος πελάτης που ακολουθεί τη στρατηγική $q'$ όταν οι άλλοι ακολουθούν την $q$ και βλέπει $n$ πελάτες στο σύστημα.
- Η ωφέλειά του είναι

$$U(q',q|n) = (1-q'_n)\cdot 0 + q'_n\left(R-p-C\frac{n+1}{\mu}\right)$$

## (6) Βέλτιστη απάντηση πελάτη

- Η βέλτιστη απάντηση $q'$ ενός επιλεγμένου πελάτη, σε οποιαδήποτε στρατηγική $q$ των άλλων απαιτεί

$$q'_n = \begin{cases} \{0\}, & \text{αν } R-p-C\frac{n+1}{\mu} < 0 \\ [0,1], & \text{αν } R-p-C\frac{n+1}{\mu} = 0 \\ \{1\}, & \text{αν } R-p-C\frac{n+1}{\mu} > 0 \end{cases}$$

δηλ.

$$q'_n = \begin{cases} \{0\}, & \text{αν } \frac{\mu(R-p)}{C} - 1 < n \\ [0,1], & \text{αν } \frac{\mu(R-p)}{C} - 1 = n \\ \{1\}, & \text{αν } \frac{\mu(R-p)}{C} > n \end{cases}$$

οπότε

η βέλτιστη στρατηγική είναι η στρατηγική κατωφλίου $\left\lfloor \frac{\mu(R-p)}{c} \right\rfloor$ (υποθέτοντας ότι $\frac{\mu(R-p)}{c}$ όχι ακέραιος) δηλ. ο πελάτης να μπαίνει αν το πλήθος των πελατών στο σύστημα συμπεριλαμβανομένου του ιδίου είναι το πολύ

$$n_e(p) = \left\lfloor \frac{\mu(R-p)}{c} \right\rfloor.$$

⑦ Στρατηγικές ισορροπίας

- Επειδή έχουμε την ίδια βέλτιστη απάντηση έναντι οποιασδήποτε στρατηγικής των άλλων, αυτή είναι κυριαρχούσα στρατηγική και επομένως και στρατηγική ισορροπίας.

⑧ Κοινωνική βελτιστοποίηση

- Ο κοινωνικός σχεδιαστής θέλει να επιλέξει κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική $q_{soc}$ που μεγιστοποιεί τον κοινωνικό πλούτο ανά χρονική μονάδα

$$S(q) = S(q_0, q_1, \dots) = \lambda^* R - C E[Q]$$

όπου $\lambda^*$ ο πραγματικός ρυθμός αφίξεων που είναι

$$\lambda^* = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n p_n$$

και $E[Q]$ το μέσο πλήθος πελατών που είναι

$$E[Q] = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n,$$

όπου $(p_n)$ η στάσιμη κατανομή του πλήθους των πελατών που είναι

$$p_n = B \rho^n q_0 q_1 \cdots q_{n-1}, \quad n \geq 0, \quad B = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n q_0 \cdots q_{n-1} \right)^{-1}.$$

- Το πρόβλημα αυτό λύνεται με στοχαστικό δυναμικό προγραμματισμό (αποδεικνύεται ότι η βέλτιστη στρατηγ. είναι τύπου κατωφλίου).

— Εδώ θα επικεντρωθούμε στο ειδικότερο πρόβλημα της κοινωνικής βελτιστοποίησης που μπορεί να επιτύχει ο κοινωνικός σχεδιαστής, επιβάλλοντας τιμή εξυπηρέτησης σταθερή για όλους τους πελάτες.

— Έστω ότι επιβάλλει τιμή p. Τότε οι πελάτες υιοθετούν τη στρατηγική κατωφλίου $n = \left\lfloor \frac{\mu(R-p)}{C} \right\rfloor$ και το σύστημα συμπεριφέρεται ως M/M/1/n ουρά. Είναι τότε $q_0 = q_1 = \dots = q_{n-1} = 1$, $q_n = q_{n+1} = \dots = 0$, οπότε για $\rho \neq 1$ είναι

$$p_k = \frac{(1-\rho)\rho^k}{1-\rho^{n+1}}, \quad 0 \le k \le n$$

και

$$\lambda^* = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda p_k = \lambda(1-p_n) = \frac{1-\rho^n}{1-\rho^{n+1}}$$

$$E[Q] = \sum_{k=0}^{n} k p_k = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(n+1)\rho^{n+1}}{1-\rho^{n+1}}$$

Άρα ο κοινωνικός πλούτος γίνεται

$$S_0(n) = \lambda R \frac{1-\rho^n}{1-\rho^{n+1}} - C\left[\frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(n+1)\rho^{n+1}}{1-\rho^{n+1}}\right].$$

— Έχουμε

$$\begin{aligned} S_0(n) - S_0(n-1) &= \lambda R \frac{1-\rho^n}{1-\rho^{n+1}} - \lambda R \frac{1-\rho^{n-1}}{1-\rho^n} \\ &\quad + C\frac{(n+1)\rho^{n+1}}{1-\rho^{n+1}} - C\frac{n\rho^n}{1-\rho^n} \\ &= \lambda R \frac{\cancel{1} - 2\rho^n + \cancel{\rho^{2n}} - \cancel{1} + \rho^{n-1} + \rho^{n+1} - \cancel{\rho^{2n}}}{(1-\rho^{n+1})(1-\rho^n)} \\ &\quad + C\frac{(n+1)\rho^{n+1} - (\cancel{n}+1)\rho^{2n+1} - n\rho^n - \cancel{n\rho^{2n+1}}}{(1-\rho^{n+1})(1-\rho^n)} \\ &= \frac{\lambda R(1-\rho)^2\rho^{n-1}}{(1-\rho^{n+1})(1-\rho^n)} + \frac{C\left((n+1)\rho - \rho^{n+1} - n\right)\rho^n}{(1-\rho^{n+1})(1-\rho^n)} \end{aligned}$$

Για $\rho < 1$ έχουμε

$$S_0(n) - S_0(n-1) \geq 0 \iff \lambda R(1-\rho)^2 \geq C\rho\left(n + \rho^{n+1} - (n+1)\rho\right)$$

$$\overset{\rho=\lambda/\mu}{\Longleftrightarrow} \mu R(1-\rho)^2 \geq C\left(n+\rho^{n+1}-(n+1)\rho\right)$$

$$\Longleftrightarrow \frac{R\mu}{C} \geq \frac{n+\rho^{n+1}-(n+1)\rho}{(1-\rho)^2}$$

Αλλά η συνάρτηση

$$g(n) = \frac{n+\rho^{n+1}-(n+1)\rho}{(1-\rho)^2}$$

$$= \frac{1}{(1-\rho)^2}\left(n(1-\rho)-\rho(1-\rho^n)\right)$$

$$= \frac{1}{1-\rho}\left(n-\rho\sum_{k=0}^{n-1}\rho^k\right)$$

$$= \frac{1}{1-\rho}\left(n-\sum_{k=1}^{n}\rho^k\right)$$

$$= \frac{1}{1-\rho}\sum_{k=1}^{n}(1-\rho^k) \quad \nearrow \text{ ως προς } n.$$

Άρα υπάρχει μοναδικό $n_{soc}$ τέτοιο ώστε

$$g(n) \leq \frac{R\mu}{C} \text{ για } n \leq n_{soc} \quad \text{και} \quad g(n) > \frac{R\mu}{C} \text{ για } n > n_{soc}$$

δηλ.

$$S_0(n) - S_0(n-1) \geq 0 \text{ για } n \leq n_{soc} \text{ και}$$

$$S_0(n) - S_0(n-1) \leq 0 \text{ για } n > n_{soc}$$

οπότε η $S_0(n)$ είναι μονοκόρυφη με μέγιστο στην $n_{soc}$.

– Άρα ο κοινωνικός διαχειριστής βρίσκει το κοινωνικά βέλτιστο κατώφλι $n_{soc}$ ως

$$n_{soc} = \max\left\{n : g(n) \leq \frac{R\mu}{C}\right\}$$

και το επάγει θέτοντας τιμή $p_{soc}$ τέτοια ώστε

$$n_{soc} = \left\lfloor \frac{\mu(R-p)}{C} \right\rfloor$$

δηλ. οποιοδήποτε $p_{soc}$ με $R - \frac{C(n_{soc}-1)}{\mu} \leq p_{soc} \leq R - \frac{C n_{soc}}{\mu}$.

Ισχύει ότι $n_{soc} \leq n_e(0)$.
Πράγματι έχουμε

$$g(n) - n = \frac{1}{1-\rho} \sum_{k=1}^{n} (1-\rho^k) - \frac{1}{1-\rho} n(1-\rho)$$
$$= \frac{1}{1-\rho} \sum_{k=1}^{n} (\cancel{1} - \rho^k - \cancel{1} + \rho)$$
$$= \frac{\rho}{1-\rho} \sum_{k=1}^{n} (1-\rho^{k-1}) \geq 0,$$

οπότε

$$g(n_{soc}) \geq n_{soc}.$$

Όμως

$$g(n_{soc}) \leq \frac{R\mu}{c}, \quad \left(\begin{matrix}\text{ορισμός} \\ \text{του } n_{soc}\end{matrix}\right)$$

οπότε $n_{soc} \leq \frac{R\mu}{c} \Rightarrow n_{soc} \leq \left\lfloor \frac{R\mu}{c} \right\rfloor = n_e(0)$.
Δηλαδή, η κοινωνική βελτιστοποίηση απαιτεί να μπαίνουν λιγότεροι πελάτες απ' ό,τι γίνεται αν τους αφήσουμε ελεύθερους να μπαίνουν υπολογίζοντας μόνο το ατομικό συμφέρον τους.

(5) Βελτιστοποίηση κέρδους μονοπωλίου

– Ένα μονοπώλιο θέλει να επιλέξει τιμή $p_m$ ώστε να μεγιστοποιήσει το κέρδος ανά χρονική μονάδα. Θέτοντας τιμή $p$ οι πελάτες ακολουθούν την αντίστοιχη στρατηγική ισορροπίας είναι κατωφλίου $n_e(p)$ οπότε το κέρδος γίνεται

$$\lambda \frac{1-\rho^{n_e(p)}}{1-\rho^{n_e(p)+1}} \cdot p$$

Για να βρούμε ποιο είναι το κατώφλι $n_m$ που είναι επιθυμητό για βελτιστοποίηση του κέρδους, εκφράζουμε το κέρδος συναρτήσει του κατωφλίου $n$. Για να επιτευχθεί κατώφλι $n$ θα πρέπει να τεθεί τιμή $p$ τέτοια ώστε $\left\lfloor \frac{(R-p)\mu}{c} \right\rfloor = n$ και η $p$ να είναι η μέγιστη δυνατή. Επομένως πρέπει $p = R - \frac{nC}{\mu}$. Τότε το κέρδος του διαχειριστή είναι

$$Z_0(n) = \lambda \frac{1-\rho^n}{1-\rho^{n+1}}\left(R - \frac{Cn}{\mu}\right)$$

$$= \lambda \frac{1-\rho^n}{1-\rho^{n+1}}\left(\frac{\nu_e - n}{\nu_e}\right), \quad \nu_e = \frac{R\mu}{C}$$

Αυτό δείχνει ότι $Z_0(n) < 0$ για $n > n_e(0)$ (αφού ο διαχειριστής πρέπει να θέσει αρνητική τιμή, δηλαδή επιδότηση για να επάγει κατώφλι μεγαλύτερο από το $n_e(0)$). Οπότε είναι βέβαιο ότι $n_m \le n_e(0)$.

– Έχουμε

$$\frac{Z_0(n)}{Z_0(n-1)} = \frac{(1-\rho^n)^2(\nu_e - n)}{(1-\rho^{n+1})(1-\rho^{n-1})(\nu_e - n + 1)}$$

Για $\rho < 1$ έχουμε

$$\frac{Z_0(n)}{Z_0(n-1)} \geq 1 \iff \frac{1-\rho^n}{1-\rho^{n+1}}(\nu_e - n) \geq \frac{1-\rho^{n-1}}{1-\rho^n}(\nu_e - n + 1)$$

$$\iff \frac{(1-\rho^n)^2 - (1-\rho^{n-1})(1-\rho^{n+1})}{(1-\rho^{n+1})(1-\rho^n)}(\nu_e - n) \geq \frac{1-\rho^{n-1}}{1-\rho^n}$$

$$\iff \frac{\rho^{n-1}(1-\rho)^2}{(1-\rho^{n+1})\cancel{(1-\rho^n)}}(\nu_e - n) \geq \frac{1-\rho^{n-1}}{\cancel{1-\rho^n}}$$

$$\iff \nu_e - n \geq \frac{(1-\rho^{n-1})(1-\rho^{n+1})}{\rho^{n-1}(1-\rho)^2}$$

$$\iff \frac{R\mu}{C} \geq n + \frac{(1-\rho^{n-1})(1-\rho^{n+1})}{\rho^{n-1}(1-\rho)^2}$$

Αποδεικνύεται ότι η

$$h(n) = n + \frac{(1-\rho^{n-1})(1-\rho^{n+1})}{\rho^{n-1}(1-\rho)^2} \nearrow \text{ ως προς } n$$

Άρα υπάρχει μοναδικό $n_m$ τέτοιο ώστε

$$h(n) \le \frac{R\mu}{C} \text{ για } n \le n_m \quad \text{και} \quad h(n) > \frac{R\mu}{C} \text{ για } n > n_m$$

οπότε η $Z_0(n)$ είναι μονοκόρυφη με μέγιστο στην $n_m$.
Τελικά μπορεί να αποδειχθεί ότι $n_m \le n_{soc} \le n_e(0)$.