Στρατηγική Συμπεριφορά σε Ουρές Αναμονής

Ιωάννης Δημητρακόπουλος

Τμήμα Μαθηματικών
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Θερινό Σχολείο
Π.Μ.Σ Μαθηματικά της Αγοράς και της Παραγωγής
Δευτέρα 31 Αυγούστου 2020

Διάρθρωση

Εισαγωγή

Συνάρτηση Ζήτησης Σε Συνθήκες Μονοπωλίου

- p η τιμή μονάδας ενός προϊόντος
- $D(p)$ η ζήτηση του προϊόντος κάτω από την τιμή p.
- $D(p)$ φθίνουσα συνάρτηση του p.

Εισαγωγή

Συνάρτηση Ζήτησης Σε Συνθήκες Μονοπωλίου

- p η τιμή μονάδας ενός προϊόντος
- $D(p)$ η ζήτηση του προϊόντος κάτω από την τιμή p.
- $D(p)$ φθίνουσα συνάρτηση του p.

Ένα Υποκείμενο Στοχαστικό Μοντέλο

Εισαγωγή

Συνάρτηση Ζήτησης Σε Συνθήκες Μονοπωλίου

- p η τιμή μονάδας ενός προϊόντος
- $D(p)$ η ζήτηση του προϊόντος κάτω από την τιμή p.
- $D(p)$ φθίνουσα συνάρτηση του p.

Ένα Υποκείμενο Στοχαστικό Μοντέλο

- N αριθμός καταναλωτών (μέγεθος αγοράς)

Εισαγωγή

Συνάρτηση Ζήτησης Σε Συνθήκες Μονοπωλίου

- p η τιμή μονάδας ενός προϊόντος
- $D(p)$ η ζήτηση του προϊόντος κάτω από την τιμή p.
- $D(p)$ φθίνουσα συνάρτηση του p.

Ένα Υποκείμενο Στοχαστικό Μοντέλο

- N αριθμός καταναλωτών (μέγεθος αγοράς)
- Θ η μέγιστη τιμή που είναι διατεθειμένος να πληρώσει ένας καταναλωτής για μια μονάδα προϊόντος.

Εισαγωγή

Συνάρτηση Ζήτησης Σε Συνθήκες Μονοπωλίου

- p η τιμή μονάδας ενός προϊόντος
- $D(p)$ η ζήτηση του προϊόντος κάτω από την τιμή p.
- $D(p)$ φθίνουσα συνάρτηση του p.

Ένα Υποκείμενο Στοχαστικό Μοντέλο

- N αριθμός καταναλωτών (μέγεθος αγοράς)
- Θ η μέγιστη τιμή που είναι διατεθειμένος να πληρώσει ένας καταναλωτής για μια μονάδα προϊόντος.
- $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_N$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές.

Εισαγωγή

Συνάρτηση Ζήτησης Σε Συνθήκες Μονοπωλίου

- p η τιμή μονάδας ενός προϊόντος
- $D(p)$ η ζήτηση του προϊόντος κάτω από την τιμή p.
- $D(p)$ φθίνουσα συνάρτηση του p.

Ένα Υποκείμενο Στοχαστικό Μοντέλο

- N αριθμός καταναλωτών (μέγεθος αγοράς)
- Θ η μέγιστη τιμή που είναι διατεθειμένος να πληρώσει ένας καταναλωτής για μια μονάδα προϊόντος.
- $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_N$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές.
- $F(x) = P(\Theta \le x)$

Εισαγωγή

Συνάρτηση Ζήτησης Σε Συνθήκες Μονοπωλίου

- p η τιμή μονάδας ενός προϊόντος
- $D(p)$ η ζήτηση του προϊόντος κάτω από την τιμή p.
- $D(p)$ φθίνουσα συνάρτηση του p.

Ένα Υποκείμενο Στοχαστικό Μοντέλο

- N αριθμός καταναλωτών (μέγεθος αγοράς)
- Θ η μέγιστη τιμή που είναι διατεθειμένος να πληρώσει ένας καταναλωτής για μια μονάδα προϊόντος.
- $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_N$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές.
- $F(x) = P(\Theta \leq x)$

Για δοσμένη τιμή p ο καταναλωτής i θα αγοράσει το προϊόν με πιθανότητα $P(\Theta_i > p) = 1 - F(p)$. Επομένως

$$D(p) = N(1 - F(p))$$

που είναι φθίνουσα ως προς p.

Εισαγωγή

Λογικό Μοντέλο

- Όσο αυξάνει το p μειώνεται η πιθανότητα να το αγοράσει οποιοσδήποτε καταναλωτής

Εισαγωγή

Λογικό Μοντέλο

- Όσο αυξάνει το p μειώνεται η πιθανότητα να το αγοράσει οποιοσδήποτε καταναλωτής

Αυτό Ισχύει Πάντα;

Υπάρχουν περιπτώσεις όπου αν αυξάνει η τιμή, κάποιοι (ή όλοι) οι καταναλωτές θέλουν περισσότερο το προϊόν; Μπορεί σε ακραίες περιπτώσεις η ζήτηση $D(p)$ να είναι αύξουσα ως προς p;

Εισαγωγή

Λογικό Μοντέλο

- Όσο αυξάνει το p μειώνεται η πιθανότητα να το αγοράσει οποιοσδήποτε καταναλωτής

Αυτό Ισχύει Πάντα;

Υπάρχουν περιπτώσεις όπου αν αυξάνει η τιμή, κάποιοι (ή όλοι) οι καταναλωτές θέλουν περισσότερο το προϊόν; Μπορεί σε ακραίες περιπτώσεις η ζήτηση $D(p)$ να είναι αύξουσα ως προς p;

- Εντύπωση καλύτερης ποιότητας.

Εισαγωγή

Λογικό Μοντέλο

- Όσο αυξάνει το p μειώνεται η πιθανότητα να το αγοράσει οποιοσδήποτε καταναλωτής

Αυτό Ισχύει Πάντα;

Υπάρχουν περιπτώσεις όπου αν αυξάνει η τιμή, κάποιοι (ή όλοι) οι καταναλωτές θέλουν περισσότερο το προϊόν; Μπορεί σε ακραίες περιπτώσεις η ζήτηση $D(p)$ να είναι αύξουσα ως προς p;

- Εντύπωση καλύτερης ποιότητας.
- Externality: 'Αν αυξηθεί η τιμή θα αγοράσουν το προϊόν λιγότεροι, και επομένως θα είμαι από τους λίγους που θα το έχουν' (prestige effect).

Σχετικά Φαινόμενα

Σχετικά Φαινόμενα

Paris Metro Pricing

- Μετρό Παρισιού: 2 ειδών εισιτήρια
- Φθηνά: Βαγόνι A, Ακριβά: Βαγόνι B
- A, B, πανομοιότυπα βαγόνια
- Γιατί να αγοράσει κάποιος ακριβό εισιτήριο;

Σχετικά Φαινόμενα

Paris Metro Pricing

- Μετρό Παρισιού: 2 ειδών εισιτήρια
- Φθηνά: Βαγόνι Α, Ακριβά: Βαγόνι Β
- Α, Β, πανομοιότυπα βαγόνια
- Γιατί να αγοράσει κάποιος ακριβό εισιτήριο;

Call Center - Customer Support

- 2 τηλεφωνικοί αριθμοί για υποστήριξη πελατών
- Ο πρώτος αριθμός με δωρεάν κλήση, ο δεύτερος με χρέωση
- Ίδια εξυπηρέτηση
- Γιατί να καλέσει κάποιος πελάτης με χρέωση;

Σχετικά Φαινόμενα

- Κατάστημα παρέχει υπηρεσία σε πελάτες με τη σειρά.

Σχετικά Φαινόμενα

- Κατάστημα παρέχει υπηρεσία σε πελάτες με τη σειρά.
- Συνήθως υπάρχει μεγάλη ουρά αναμονής.

Σχετικά Φαινόμενα

- Κατάστημα παρέχει υπηρεσία σε πελάτες με τη σειρά.
- Συνήθως υπάρχει μεγάλη ουρά αναμονής.
- Τι θα γίνει αν αυξηθεί η τιμή εισόδου;

Σχετικά Φαινόμενα

- Κατάστημα παρέχει υπηρεσία σε πελάτες με τη σειρά.
- Συνήθως υπάρχει μεγάλη ουρά αναμονής.
- Τι θα γίνει αν αυξηθεί η τιμή εισόδου;
- Ένας πελάτης που σκέφτεται αν θα μπει ή όχι.
  - Έχει μικρότερο κίνητρο επειδή αυξήθηκε η τιμή.

Σχετικά Φαινόμενα

- Κατάστημα παρέχει υπηρεσία σε πελάτες με τη σειρά.
- Συνήθως υπάρχει μεγάλη ουρά αναμονής.
- Τι θα γίνει αν αυξηθεί η τιμή εισόδου;
- Ένας πελάτης που σκέφτεται αν θα μπει ή όχι.
    - Έχει μικρότερο κίνητρο επειδή αυξήθηκε η τιμή.
    - Από την άλλη πλευρά έχει μεγαλύτερο κίνητρο επειδή (υποθέτει ότι) θα μπουν λιγότεροι πελάτες και επομένως θα έχει μικρότερη αναμονή.

Σχετικά Φαινόμενα

- Κατάστημα παρέχει υπηρεσία σε πελάτες με τη σειρά.
- Συνήθως υπάρχει μεγάλη ουρά αναμονής.
- Τι θα γίνει αν αυξηθεί η τιμή εισόδου;
- Ένας πελάτης που σκέφτεται αν θα μπει ή όχι.
    - Έχει μικρότερο κίνητρο επειδή αυξήθηκε η τιμή.
    - Από την άλλη πλευρά έχει μεγαλύτερο κίνητρο επειδή (υποθέτει ότι) θα μπουν λιγότεροι πελάτες και επομένως θα έχει μικρότερη αναμονή.
- Το ίδιο σκέφτονται όλοι οι πελάτες. Τι θα γίνει τελικά;

Παίγνια σε Ουρές Αναμονής: Γενικό Πλαίσιο

Οικονομικά Μοντέλα στη Θεωρία Αναμονής

Αυτό το πρόβλημα θέλουμε να μελετήσουμε με μαθηματικά εργαλεία από

- Πιθανότητες και Στοχαστικές Ανελίξεις
- Θεωρία Αναμονής
- Θεωρία Παιγνίων

Παίγνια σε Ουρές Αναμονής: Γενικό Πλαίσιο

Οικονομικά Μοντέλα στη Θεωρία Αναμονής

Αυτό το πρόβλημα θέλουμε να μελετήσουμε με μαθηματικά εργαλεία από

- Πιθανότητες και Στοχαστικές Ανελίξεις
- Θεωρία Αναμονής
- Θεωρία Παιγνίων

Παίγνια σε Ουρές Αναμονής (queueing games)

- Σύστημα Εξυπηρέτησης.

Παίγνια σε Ουρές Αναμονής: Γενικό Πλαίσιο

Οικονομικά Μοντέλα στη Θεωρία Αναμονής

Αυτό το πρόβλημα θέλουμε να μελετήσουμε με μαθηματικά εργαλεία από

- Πιθανότητες και Στοχαστικές Ανελίξεις
- Θεωρία Αναμονής
- Θεωρία Παιγνίων

Παίγνια σε Ουρές Αναμονής (queueing games)

- Σύστημα Εξυπηρέτησης.
- Στρατηγικές Οντότητες σε αυτό. (συνήθως οι πελάτες, αλλά και οι υπηρέτες ή ο διαχειριστής).

Παίγνια σε Ουρές Αναμονής: Γενικό Πλαίσιο

Οικονομικά Μοντέλα στη Θεωρία Αναμονής

Αυτό το πρόβλημα θέλουμε να μελετήσουμε με μαθηματικά εργαλεία από

- Πιθανότητες και Στοχαστικές Ανελίξεις
- Θεωρία Αναμονής
- Θεωρία Παιγνίων

Παίγνια σε Ουρές Αναμονής (queueing games)

- Σύστημα Εξυπηρέτησης.
- Στρατηγικές Οντότητες σε αυτό. (συνήθως οι πελάτες, αλλά και οι υπηρέτες ή ο διαχειριστής).
- Οι οντότητες παίρνουν αποφάσεις για βελτιστοποίηση της ωφέλειάς τους, λαμβάνοντας υπόψη ότι και οι άλλοι συμπεριφέρονται όμοια.

Παίγνια σε Ουρές Αναμονής: Γενικό Πλαίσιο

Οικονομικά Μοντέλα στη Θεωρία Αναμονής

Αυτό το πρόβλημα θέλουμε να μελετήσουμε με μαθηματικά εργαλεία από

- Πιθανότητες και Στοχαστικές Ανελίξεις
- Θεωρία Αναμονής
- Θεωρία Παιγνίων

Παίγνια σε Ουρές Αναμονής (queueing games)

- Σύστημα Εξυπηρέτησης.
- Στρατηγικές Οντότητες σε αυτό. (συνήθως οι πελάτες, αλλά και οι υπηρέτες ή ο διαχειριστής).
- Οι οντότητες παίρνουν αποφάσεις για βελτιστοποίηση της ωφέλειάς τους, λαμβάνοντας υπόψη ότι και οι άλλοι συμπεριφέρονται όμοια.
- Στρατηγική συμπεριφορά $\Rightarrow$ Συμμετρικό μη-συνεργατικό Παιχνίδι άπειρων παικτών.

Παίγνια σε Ουρές Αναμονής: Προβλήματα

Προβλήματα

- Εύρεση συμμετρικών στρατηγικών ισορροπίας (Nash equilibrium strategies).

Παίγνια σε Ουρές Αναμονής: Προβλήματα

Προβλήματα

- Εύρεση συμμετρικών στρατηγικών ισορροπίας (Nash equilibrium strategies).
- Εύρεση κοινωνικά βέλτιστων στρατηγικών (socially optimal strategies).

Παίγνια σε Ουρές Αναμονής: Προβλήματα

Προβλήματα

- Εύρεση συμμετρικών στρατηγικών ισορροπίας (Nash equilibrium strategies).
- Εύρεση κοινωνικά βέλτιστων στρατηγικών (socially optimal strategies).
- Εύρεση της βέλτιστης στρατηγικής του μονοπωλίου (διαχειριστή) στη περίπτωση τιμολόγησης της εισόδου.

Παίγνια σε Ουρές Αναμονής: Προβλήματα

Προβλήματα

- Εύρεση συμμετρικών στρατηγικών ισορροπίας (Nash equilibrium strategies).
- Εύρεση κοινωνικά βέλτιστων στρατηγικών (socially optimal strategies).
- Εύρεση της βέλτιστης στρατηγικής του μονοπωλίου (διαχειριστή) στη περίπτωση τιμολόγησης της εισόδου.
- Ποσοτικοποίηση της απόκλισης στρατηγικών ισορροπίας και κοινωνικά βέλτιστων στρατηγικών - τιμή αναρχίας (price of anarchy).

Παίγνια σε Ουρές Αναμονής: Προβλήματα

Προβλήματα

- Εύρεση συμμετρικών στρατηγικών ισορροπίας (Nash equilibrium strategies).
- Εύρεση κοινωνικά βέλτιστων στρατηγικών (socially optimal strategies).
- Εύρεση της βέλτιστης στρατηγικής του μονοπωλίου (διαχειριστή) στη περίπτωση τιμολόγησης της εισόδου.
- Ποσοτικοποίηση της απόκλισης στρατηγικών ισορροπίας και κοινωνικά βέλτιστων στρατηγικών - τιμή αναρχίας (price of anarchy).
- Μηχανισμοί ρύθμισης ώστε οι πελάτες να υιοθετούν τις κοινωνικά βέλτιστες στρατηγικές ως στρατηγικές ισορροπίας (μέσω τιμολόγησης, προτεραιοτήτων, πειθαρχία ουράς, έλεγχος πληροφορίας).

Ιστορία

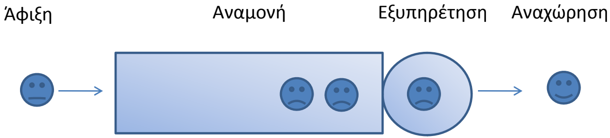
- *Leeman, W.A. (1964)* Κριτική στη ΄Κλασσική΄ θεωρία ουρών κατάλληλη για κεντρικά σχεδιασμένη οικονομία. Εισαγωγή τιμολόγησης για βελτιστοποίηση πόρων, αποκέντρωση διοικητικών αποφάσεων, καθοδήγηση μακροπρόθεσμων επενδυτικών αποφάσεων.
- *Naor, P. (1969)* Πρώτη εργασία όπου οι πελάτες συμπεριφέρονται στρατηγικά σε παρατηρήσιμη $M/M/1$ ουρά. Τιμολόγηση για κοινωνική βελτιστοποίηση και βελτιστοποίηση του κέρδους μονοπωλίου. Η τιμολόγηση λειτουργεί ως ρυθμιστικός παράγοντας της ζήτησης.
- *Edelson and Hildebrand (1975)* Ανέλυσαν το μοντέλο του *Naor* με τη μόνη διαφορά ότι οι πελάτες δε μπορούν να παρατηρήσουν τη κατάσταση του συστήματος πριν εισέρθουν σε αυτό. (μη παρατηρήσιμη $M/M/1$ ουρά)

Βασικά Στοιχεία Θεωρίας Αναμονής

Ένα Σύστημα Εξυπηρέτησης αποτελείται από ένα σταθμό που παρέχει μια υπηρεσία και ένα χώρο αναμονής (ουρά).

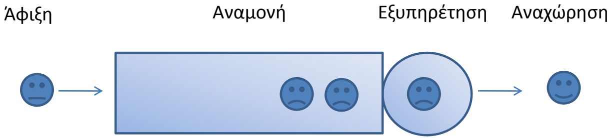
Βασικά Στοιχεία Θεωρίας Αναμονής

Ένα Σύστημα Εξυπηρέτησης αποτελείται από ένα σταθμό που παρέχει μια υπηρεσία και ένα χώρο αναμονής (ουρά).



Βασικά Στοιχεία Θεωρίας Αναμονής

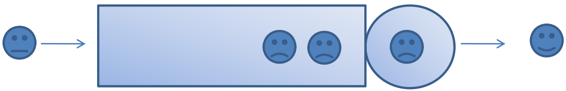
Ένα Σύστημα Εξυπηρέτησης αποτελείται από ένα σταθμό που παρέχει μια υπηρεσία και ένα χώρο αναμονής (ουρά).



Συμβολισμοί
Λ=(δυνητικός) ρυθμός αφίξεων
μ=ρυθμός εξυπηρέτησης
$1/\mu$=μέσος χρόνος εξυπηρέτησης
$\rho = \frac{\Lambda}{\mu}$= ρυθμός συνωστισμού

Βασικά Στοιχεία Θεωρίας Αναμονής

Ένα Σύστημα Εξυπηρέτησης αποτελείται από ένα σταθμό που παρέχει μια υπηρεσία και ένα χώρο αναμονής (ουρά).



Συμβολισμοί
Λ=(δυνητικός) ρυθμός αφίξεων
μ=ρυθμός εξυπηρέτησης
$1/\mu$=μέσος χρόνος εξυπηρέτησης
$\rho = \frac{\Lambda}{\mu}$= ρυθμός συνωστισμού

Γιατί δημιουργείται ουρά;
Ακανόνιστες αφίξεις
Ακανόνιστοι (τυχαίοι) χρόνοι εξυπηρέτησης

Ανάλυση Απόδοσης

Δύο βασικές ποσότητες που χαρακτηρίζουν την απόδοση ενός συστήματος εξυπηρέτησης είναι

1. L =Μέσος Αριθμός Πελατών στο Σύστημα σε Στάσιμη Κατάσταση (Συμφόρηση) και
2. W =Μέσος Χρόνος Παραμονής ενός Πελάτη στο Σύστημα (Καθυστέρηση).

Ανάλυση Απόδοσης

Δύο βασικές ποσότητες που χαρακτηρίζουν την απόδοση ενός συστήματος εξυπηρέτησης είναι

1. L =Μέσος Αριθμός Πελατών στο Σύστημα σε Στάσιμη Κατάσταση (Συμφόρηση) και
2. W =Μέσος Χρόνος Παραμονής ενός Πελάτη στο Σύστημα (Καθυστέρηση).
3. $L = \lambda W$ Νόμος του Little, $\lambda =$ ο πραγματικός ρυθμός αφίξεων.

Ανάλυση Απόδοσης

Δύο βασικές ποσότητες που χαρακτηρίζουν την απόδοση ενός συστήματος εξυπηρέτησης είναι

1. L =Μέσος Αριθμός Πελατών στο Σύστημα σε Στάσιμη Κατάσταση (Συμφόρηση) και
2. W =Μέσος Χρόνος Παραμονής ενός Πελάτη στο Σύστημα (Καθυστέρηση).
3. $L = \lambda W$ Νόμος του Little, $\lambda =$ ο πραγματικός ρυθμός αφίξεων.
4. Απλούς τύπους για τα L, W έχουμε κάτω από συγκεκριμένες υποθέσεις κατανομής αφίξεων και εξυπηρετήσεων, π.χ. εκθετικές.
5. Υπάρχουν και πολλά άλλα μέτρα απόδοσης που έχουν οριστεί και μελετηθεί (μέσος χρόνος αναμονής, μέσος κύκλος απασχόλησης, κ.α.).

Ανάλυση Απόδοσης

Δύο βασικές ποσότητες που χαρακτηρίζουν την απόδοση ενός συστήματος εξυπηρέτησης είναι

1. L =Μέσος Αριθμός Πελατών στο Σύστημα σε Στάσιμη Κατάσταση (Συμφόρηση) και
2. W =Μέσος Χρόνος Παραμονής ενός Πελάτη στο Σύστημα (Καθυστέρηση).
3. $L = \lambda W$ Νόμος του Little, $\lambda =$ ο πραγματικός ρυθμός αφίξεων.
4. Απλούς τύπους για τα L, W έχουμε κάτω από συγκεκριμένες υποθέσεις κατανομής αφίξεων και εξυπηρετήσεων, π.χ. εκθετικές.
5. Υπάρχουν και πολλά άλλα μέτρα απόδοσης που έχουν οριστεί και μελετηθεί (μέσος χρόνος αναμονής, μέσος κύκλος απασχόλησης, κ.α.).
6. Γενικά δύσκολο πρόβλημα που απαιτεί καλή γνώση
   - Πιθανοτήτων
   - Στοχαστικών Ανελίξεων
   - 'λγεβρας Πινάκων
   - Διαφορικών Εξισώσεων και Εξισώσεων Διαφορών

Απλή Περίπτωση: Σύστημα $M/M/1(FCFS)$

Απλή Περίπτωση: Σύστημα $M/M/1(FCFS)$

Βασικές υποθέσεις

1. Οι αφίξεις ακολουθούν στοχαστική ανέλιξη Poisson, Λ=μέσος αριθμός αφίξεων ανά μονάδα χρόνου
2. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης ακολουθούν εκθετική κατανομή, μ=ρυθμός εξυπηρέτησης, $1/\mu$=μέσος χρόνος εξυπηρέτησης.
3. Η πειθαρχία ουράς είναι FCFS.
4. $\rho = \frac{\Lambda}{\mu} < 1$.

Απλή Περίπτωση: Σύστημα $M/M/1(FCFS)$

Βασικές υποθέσεις

1. Οι αφίξεις ακολουθούν στοχαστική ανέλιξη Poisson, Λ=μέσος αριθμός αφίξεων ανά μονάδα χρόνου
2. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης ακολουθούν εκθετική κατανομή, μ=ρυθμός εξυπηρέτησης, $1/\mu$=μέσος χρόνος εξυπηρέτησης.
3. Η πειθαρχία ουράς είναι FCFS.
4. $\rho = \frac{\Lambda}{\mu} < 1$.

Τότε

1. $N = \#$ πελατών στο σύστημα σε στασιμότητα.
2. $P(N = n) = (1-\rho)\rho^n, \; n \geq 0$. (στάσιμη κατανομή)
3. $L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\Lambda}{\mu - \Lambda}$
4. $W = \frac{1}{\mu - \Lambda}$

Κάτω από γενικότερες υποθέσεις κάποιες φορές προκύπτουν πιο πολύπλοκοι τύποι αλλά πολλές φορές δεν υπάρχει κλειστή μορφή για τα μέτρα απόδοσης.

Να μπει κανείς ή να μη μπει;

Να μπει κανείς ή να μη μπει;

Στρατηγικοί Πελάτες: Το δίλημμα εισόδου (join)/αποχώρησης (balk)

1. Οι πελάτες είναι άπειροι και όμοιοι.

Να μπει κανείς ή να μη μπει;

Στρατηγικοί Πελάτες: Το δίλημμα εισόδου (join)/αποχώρησης (balk)

1. Οι πελάτες είναι άπειροι και όμοιοι.
2. R=αμοιβή πελάτη όταν (αν) ολοκληρωθεί η εξυπηρέτηση.

Να μπει κανείς ή να μη μπει;

Στρατηγικοί Πελάτες: Το δίλημμα εισόδου (join)/αποχώρησης (balk)

1. Οι πελάτες είναι άπειροι και όμοιοι.
2. R=αμοιβή πελάτη όταν (αν) ολοκληρωθεί η εξυπηρέτηση.
3. C=κόστος πελάτη ανά μονάδα χρόνου που παραμένει στο σύστημα.

Να μπει κανείς ή να μη μπει;

Στρατηγικοί Πελάτες: Το δίλημμα εισόδου (join)/αποχώρησης (balk)

1. Οι πελάτες είναι άπειροι και όμοιοι.
2. R=αμοιβή πελάτη όταν (αν) ολοκληρωθεί η εξυπηρέτηση.
3. C=κόστος πελάτη ανά μονάδα χρόνου που παραμένει στο σύστημα.
4. Ο πελάτης κατά την άφιξή του αποφασίζει αν θα μπει στην ουρά ή όχι (καθαρές στρατηγικές).

Να μπει κανείς ή να μη μπει;

Στρατηγικοί Πελάτες: Το δίλημμα εισόδου (join)/αποχώρησης (balk)

1. Οι πελάτες είναι άπειροι και όμοιοι.
2. R=αμοιβή πελάτη όταν (αν) ολοκληρωθεί η εξυπηρέτηση.
3. C=κόστος πελάτη ανά μονάδα χρόνου που παραμένει στο σύστημα.
4. Ο πελάτης κατά την άφιξή του αποφασίζει αν θα μπει στην ουρά ή όχι (καθαρές στρατηγικές).
5. Υπάρχει η δυνατότητα τυχαιοποίησης : Ο πελάτης μπαίνει με πιθανότητα p (αφού εκτελέσει ένα τυχαίο πείραμα). Η τιμή του p αποφασίζεται από τον πελάτη (μεικτές στρατηγικές).

Να μπει κανείς ή να μη μπει;

Στρατηγικοί Πελάτες: Το δίλημμα εισόδου (join)/αποχώρησης (balk)

1. Οι πελάτες είναι άπειροι και όμοιοι.
2. R=αμοιβή πελάτη όταν (αν) ολοκληρωθεί η εξυπηρέτηση.
3. C=κόστος πελάτη ανά μονάδα χρόνου που παραμένει στο σύστημα.
4. Ο πελάτης κατά την άφιξή του αποφασίζει αν θα μπει στην ουρά ή όχι (καθαρές στρατηγικές).
5. Υπάρχει η δυνατότητα τυχαιοποίησης : Ο πελάτης μπαίνει με πιθανότητα p (αφού εκτελέσει ένα τυχαίο πείραμα). Η τιμή του p αποφασίζεται από τον πελάτη (μεικτές στρατηγικές).

Ωφέλεια ενός πελάτη

Ωφέλεια ενός πελάτη

Συνάρτηση ωφέλειας ενός τυχαίου πελάτη

1. Οι πελάτες είναι άπειροι και όμοιοι.

Ωφέλεια ενός πελάτη

Συνάρτηση ωφέλειας ενός τυχαίου πελάτη

1. Οι πελάτες είναι άπειροι και όμοιοι.
2. Όλοι οι πελάτες έχουν ίδια R, C και τις ίδιες δυνατές στρατηγικές (συμμετρική περίπτωση), δηλαδή έχουν την ίδια συνάρτηση πληρωμής ή ωφέλειας (utility).

Ωφέλεια ενός πελάτη

Συνάρτηση ωφέλειας ενός τυχαίου πελάτη

1. Οι πελάτες είναι άπειροι και όμοιοι.
2. Όλοι οι πελάτες έχουν ίδια R, C και τις ίδιες δυνατές στρατηγικές (συμμετρική περίπτωση), δηλαδή έχουν την ίδια συνάρτηση πληρωμής ή ωφέλειας (utility).
3. Αν $U(p;q)$ = πληρωμή συγκεκριμένου πελάτη που χρησιμοποιεί τη στρατηγική p όταν όλοι οι άλλοι χρησιμοποιούν την q, τότε.

$$U(p;q) = p \cdot (R - C \cdot W(q)) + (1-p) \cdot 0.$$

Έννοια Σημείου Στρατηγικής Ισορροπίας (Nash equilibrium)

Σημεία Στρατηγικής Ισορροπίας Nash

Μια στρατηγική p_e είναι Συμμετρικό Σημείο Στρατηγικής Ισορροπίας αν έχει την παρακάτω ιδιότητα:

$$U(p_e;p_e) \geq U(p;p_e), \text{ για κάθε } p$$

Αν όλοι οι πελάτες ακολουθούν την p_e, τότε κανείς δεν μπορεί να πετύχει καλύτερη απόδοση με το να αλλάξει τη στρατηγική του

Βασικές Έννοιες Θεωρίας Παιγνίων

Στο πλαίσιο των συμμετρικών μη-συνεργατικών παιχιδιών, έστω p η στρατηγική ενός συγκεκριμένου παίκτη και q η στρατηγική όλων των υπόλοιπων παικτών, τότε

Βασικές Έννοιες Θεωρίας Παιγνίων

Στο πλαίσιο των συμμετρικών μη-συνεργατικών παιχιδιών, έστω p η στρατηγική ενός συγκεκριμένου παίκτη και q η στρατηγική όλων των υπόλοιπων παικτών, τότε

Κυριαρχούσα στρατηγική:

- Ασθενής: η p_1 κυριαρχεί ασθενώς της p_2 ανν για κάθε $q: \; U(p_1; q) \geq U(p_2; q)$, και για κάποιο q η ανισότητα είναι γνήσια.

Βασικές Έννοιες Θεωρίας Παιγνίων

Στο πλαίσιο των συμμετρικών μη-συνεργατικών παιχιδιών, έστω p η στρατηγική ενός συγκεκριμένου παίκτη και q η στρατηγική όλων των υπόλοιπων παικτών, τότε

Κυριαρχούσα στρατηγική:

- Ασθενής: η p_1 κυριαρχεί ασθενώς της p_2 ανν για κάθε $q: \; U(p_1; q) \geq U(p_2; q)$, και για κάποιο q η ανισότητα είναι γνήσια.
- Ισχυρή: η p_1 κυριαρχεί ισχυρά της p_2 ανν για κάθε $b: \; U(p_1; q) > U(p_2; q)$.

Βασικές Έννοιες Θεωρίας Παιγνίων

Στο πλαίσιο των συμμετρικών μη-συνεργατικών παιχιδιών, έστω p η στρατηγική ενός συγκεκριμένου παίκτη και q η στρατηγική όλων των υπόλοιπων παικτών, τότε

Κυριαρχούσα στρατηγική:

- Ασθενής: η p_1 κυριαρχεί ασθενώς της p_2 ανν για κάθε $q: \ U(p_1;q) \geq U(p_2;q)$, και για κάποιο q η ανισότητα είναι γνήσια.
- Ισχυρή: η p_1 κυριαρχεί ισχυρά της p_2 ανν για κάθε $b: \ U(p_1;q) > U(p_2;q)$.

Ορισμός: Η p **ασθενώς κυριαρχούσα** στρατηγική ενός παίκτη ανν η p κυριαρχεί ασθενώς κάθε άλλης στρατηγικής του.

Βασικές Έννοιες Θεωρίας Παιγνίων

Στο πλαίσιο των συμμετρικών μη-συνεργατικών παιχιδιών, έστω p η στρατηγική ενός συγκεκριμένου παίκτη και q η στρατηγική όλων των υπόλοιπων παικτών, τότε

Κυριαρχούσα στρατηγική:

- Ασθενής: η p_1 κυριαρχεί ασθενώς της p_2 ανν για κάθε $q: \; U(p_1; q) \geq U(p_2; q)$, και για κάποιο q η ανισότητα είναι γνήσια.
- Ισχυρή: η p_1 κυριαρχεί ισχυρά της p_2 ανν για κάθε $b: \; U(p_1; q) > U(p_2; q)$.

Ορισμός: Η p **ασθενώς κυριαρχούσα** στρατηγική ενός παίκτη ανν η p κυριαρχεί ασθενώς κάθε άλλης στρατηγικής του.

Βασικές Έννοιες Θεωρίας Παιγνίων

Στο πλαίσιο των συμμετρικών μη-συνεργατικών παιχιδιών, έστω p η στρατηγική ενός συγκεκριμένου παίκτη και q η στρατηγική όλων των υπόλοιπων παικτών, τότε

Βασικές Έννοιες Θεωρίας Παιγνίων

Στο πλαίσιο των συμμετρικών μη-συνεργατικών παιχιδιών, έστω p η στρατηγική ενός συγκεκριμένου παίκτη και q η στρατηγική όλων των υπόλοιπων παικτών, τότε

Βέλτιστη Απάντηση:
Η p^* βέλτιστη απάντηση έναντι της q ανν $U(p^*; q) \geq U(p; q)$, για κάθε p, δηλαδή $p^* \in \arg\max_{p \in S} U(p; q)$.

Βασικές Έννοιες Θεωρίας Παιγνίων

Στο πλαίσιο των συμμετρικών μη-συνεργατικών παιχνιδιών, έστω p η στρατηγική ενός συγκεκριμένου παίκτη και q η στρατηγική όλων των υπόλοιπων παικτών, τότε

Βέλτιστη Απάντηση:
Η p^* βέλτιστη απάντηση έναντι της q ανν $U(p^*; q) \geq U(p; q)$, για κάθε p, δηλαδή $p^* \in \arg\max_{p \in S} U(p; q)$.

Συνέπεια: Η p_e σημείο στρατηγικής ισορροπίας ανν η p_e είναι βέλτιστη απάντηση έναντι της p_e.

Εύρεση Σημείων Στρατηγικής Ισορροπίας

1. Μελέτη της συμπεριφοράς συστήματος σε κατάσταση στασιμότητας υπό μία στρατηγική p των πελατών.
   Η στρατηγική εξαρτάται απο το επίπεδο της πληροφορίας για τη κατάσταση του συστήματος.

Εύρεση Σημείων Στρατηγικής Ισορροπίας

1. Μελέτη της συμπεριφοράς συστήματος σε κατάσταση στασιμότητας υπό μία στρατηγική p των πελατών. Η στρατηγική εξαρτάται απο το επίπεδο της πληροφορίας για τη κατάσταση του συστήματος.
2. Υπολογισμός της πληρωμής συγκεκριμένου (tagged) πελάτη που ακολουθεί την p' όταν οι άλλοι ακολουθούν την p : $U(p';p)$.

Εύρεση Σημείων Στρατηγικής Ισορροπίας

1. Μελέτη της συμπεριφοράς συστήματος σε κατάσταση στασιμότητας υπό μία στρατηγική p των πελατών.
   Η στρατηγική εξαρτάται απο το επίπεδο της πληροφορίας για τη κατάσταση του συστήματος.
2. Υπολογισμός της πληρωμής συγκεκριμένου (tagged) πελάτη που ακολουθεί την p' όταν οι άλλοι ακολουθούν την p : $U(p'; p)$.
3. Εύρεση της βέλτιστης απάντησης συγκεκριμένου πελάτη έναντι οποιασδήποτε στρατηγικής των υπολοίπων:

$$BR(p) = \arg\max_{p' \in S} U(p'; p).$$

Εύρεση Σημείων Στρατηγικής Ισορροπίας

1. Μελέτη της συμπεριφοράς συστήματος σε κατάσταση στασιμότητας υπό μία στρατηγική p των πελατών. Η στρατηγική εξαρτάται απο το επίπεδο της πληροφορίας για τη κατάσταση του συστήματος.
2. Υπολογισμός της πληρωμής συγκεκριμένου (tagged) πελάτη που ακολουθεί την p' όταν οι άλλοι ακολουθούν την p : $U(p'; p)$.
3. Εύρεση της βέλτιστης απάντησης συγκεκριμένου πελάτη έναντι οποιασδήποτε στρατηγικής των υπολοίπων:
$$BR(p) = \arg\max_{p' \in S} U(p'; p).$$
4. Εύρεση ΣΣΙ p_e με την ιδιότητα $p_e \in BR(p_e)$ (p_e σταθερό σημείο της $BR(p)$).

Μη παρατηρήσιμη M/M/1 ουρά (E & H (1975))

Μη παρατηρήσιμη M/M/1 ουρά (E & H (1975))

- Οι πελάτες που φτάνουν στο σύστημα δε γνωρίζουν το μέγεθος της ουράς πριν πάρουν την απόφαση εισόδου.

Μη παρατηρήσιμη M/M/1 ουρά (E & H (1975))

- Οι πελάτες που φτάνουν στο σύστημα δε γνωρίζουν το μέγεθος της ουράς πριν πάρουν την απόφαση εισόδου.
- Έστω ότι όλοι οι πελάτες εκτός από έναν ακολουθούν την ίδια στρατηγική p_e, δηλαδή μπαίνουν στο σύστημα με πιθανότητα p_e.

Μη παρατηρήσιμη M/M/1 ουρά (E & H (1975))

- Οι πελάτες που φτάνουν στο σύστημα δε γνωρίζουν το μέγεθος της ουράς πριν πάρουν την απόφαση εισόδου.
- Έστω ότι όλοι οι πελάτες εκτός από έναν ακολουθούν την ίδια στρατηγική p_e, δηλαδή μπαίνουν στο σύστημα με πιθανότητα p_e.
- Τότε ο πραγματικός ρυθμός εισόδου είναι $\lambda_e = \Lambda p_e$ και

Μη παρατηρήσιμη M/M/1 ουρά (E & H (1975))

- Οι πελάτες που φτάνουν στο σύστημα δε γνωρίζουν το μέγεθος της ουράς πριν πάρουν την απόφαση εισόδου.
- Έστω ότι όλοι οι πελάτες εκτός από έναν ακολουθούν την ίδια στρατηγική p_e, δηλαδή μπαίνουν στο σύστημα με πιθανότητα p_e.
- Τότε ο πραγματικός ρυθμός εισόδου είναι $\lambda_e = \Lambda p_e$ και
- η μέση καθυστέρηση ενός πελάτη $W_e = \frac{1}{\mu - \Lambda p_e}$

Μη παρατηρήσιμη M/M/1 ουρά

Έστω ένας πελάτης που ακολουθεί στρατηγική p όταν όλοι οι άλλοι ακολουθούν p_e.

Μη παρατηρήσιμη M/M/1 ουρά

Έστω ένας πελάτης που ακολουθεί στρατηγική p όταν όλοι οι άλλοι ακολουθούν p_e.

- Τό αναμενόμενο κέρδος του είναι ίσο με

$$U(p; p_e) = p[R - CW_e] + (1-p) \cdot 0 = p\left(R - \frac{C}{\mu - \Lambda p_e}\right).$$

Μη παρατηρήσιμη M/M/1 ουρά

Έστω ένας πελάτης που ακολουθεί στρατηγική p όταν όλοι οι άλλοι ακολουθούν p_e.

- Τό αναμενόμενο κέρδος του είναι ίσο με

$$U(p;p_e) = p[R - CW_e] + (1-p)\cdot 0 = p\left(R - \frac{C}{\mu - \Lambda p_e}\right).$$

- Ο πελάτης αυτός θα ακολουθήσει τη στρατηγική p^* που μεγιστοποιεί το κέρδος του:
$U(p^*;p_e) = \max_{0\leq p\leq 1} U(p;p_e)$.

Μη παρατηρήσιμη M/M/1 ουρά

Έστω ένας πελάτης που ακολουθεί στρατηγική p όταν όλοι οι άλλοι ακολουθούν p_e.

- Τό αναμενόμενο κέρδος του είναι ίσο με

$$U(p;p_e) = p[R - CW_e] + (1-p)\cdot 0 = p\left(R - \frac{C}{\mu - \Lambda p_e}\right).$$

- Ο πελάτης αυτός θα ακολουθήσει τη στρατηγική p^* που μεγιστοποιεί το κέρδος του: $U(p^*;p_e) = \max_{0\leq p\leq 1} U(p;p_e)$.
- Η p^* είναι η βέλτιστη απάντηση στην p_e.

Μη παρατηρήσιμη M/M/1 ουρά

Έστω ένας πελάτης που ακολουθεί στρατηγική p όταν όλοι οι άλλοι ακολουθούν p_e.

- Τό αναμενόμενο κέρδος του είναι ίσο με

$$U(p;p_e) = p[R - CW_e] + (1-p)\cdot 0 = p\left(R - \frac{C}{\mu - \Lambda p_e}\right).$$

- Ο πελάτης αυτός θα ακολουθήσει τη στρατηγική p^* που μεγιστοποιεί το κέρδος του: $U(p^*;p_e) = \max_{0\leq p\leq 1} U(p;p_e)$.
- Η p^* είναι η βέλτιστη απάντηση στην p_e.
- Η p_e είναι σημείο στρατηγικής ισορροπίας αν αποτελεί βέλτιστη απάντηση στον εαυτό της, δηλαδή αν $p^* = p_e$.

Μη παρατηρήσιμη M/M/1 ουρά: Ανάλυση Ισορροπίας

$$U(p; p_e) = p\left(R - \frac{C}{\mu - \Lambda p_e}\right) \text{ (γραμμική ως προς } p).$$

Μη παρατηρήσιμη M/M/1 ουρά: Ανάλυση Ισορροπίας

$$U(p;p_e) = p\left(R - \frac{C}{\mu - \Lambda p_e}\right) \text{ (γραμμική ως προς } p\text{).}$$

Έστω $p_e = 0$. Τότε

Μη παρατηρήσιμη M/M/1 ουρά: Ανάλυση Ισορροπίας

$$U(p; p_e) = p\left(R - \frac{C}{\mu - \Lambda p_e}\right) \text{ (γραμμική ως προς } p\text{).}$$

Έστω $p_e = 0$. Τότε

- $U(p; 0) = p\left(R - \frac{C}{\mu}\right)$.
- Αν $R \leq \frac{C}{\mu}$, η $U(p; 0)$ μεγιστοποιείται για $p = 0$.
- Επομένως αν $R \leq \frac{C}{\mu}$, η $BR(0) = 0$ και η $p_e = 0$ είναι ΣΣΙ.

Μη παρατηρήσιμη M/M/1 ουρά: Ανάλυση Ισορροπίας

$$U(p;p_e) = p\left(R - \frac{C}{\mu - \Lambda p_e}\right) \text{ (γραμμική ως προς } p\text{).}$$

Μη παρατηρήσιμη M/M/1 ουρά: Ανάλυση Ισορροπίας

$$U(p; p_e) = p\left(R - \frac{C}{\mu - \Lambda p_e}\right) \text{ (γραμμική ως προς } p\text{)}.$$

Έστω $p_e = 1$. Τότε

Μη παρατηρήσιμη M/M/1 ουρά: Ανάλυση Ισορροπίας

$$U(p;p_e) = p\left(R - \frac{C}{\mu - \Lambda p_e}\right) \text{ (γραμμική ως προς } p).$$

Έστω $p_e = 1$. Τότε

- $U(p;1) = p\left(R - \frac{C}{\mu-\Lambda}\right)$.
- Αν $R \geq \frac{C}{\mu-\Lambda}$, η $U(p;1)$ μεγιστοποιείται για $p = 1$.
- Επομένως αν $R \geq \frac{C}{\mu-\Lambda}$, η $BR(1) = 1$ και η $p_e = 1$ είναι ΣΣΙ.

Μη παρατηρήσιμη M/M/1 ουρά: Ανάλυση Ισορροπίας

$$U(p; p_e) = p\left(R - \frac{C}{\mu - \Lambda p_e}\right) \text{ (γραμμική ως προς } p\text{)}.$$

Μη παρατηρήσιμη M/M/1 ουρά: Ανάλυση Ισορροπίας

$$U(p; p_e) = p\left(R - \frac{C}{\mu - \Lambda p_e}\right) \text{ (γραμμική ως προς } p\text{)}.$$

Έστω $0 < p_e < 1$. Τότε

Μη παρατηρήσιμη M/M/1 ουρά: Ανάλυση Ισορροπίας

$$U(p;p_e) = p\left(R - \frac{C}{\mu - \Lambda p_e}\right) \text{ (γραμμική ως προς } p\text{)}.$$

Έστω $0 < p_e < 1$. Τότε

- Η $U(p;p_e)$ μεγιστοποιείται για $p = p_e$ μόνο αν $R = \frac{C}{\mu - \Lambda p_e}$.
- Εδώ $BR(p) \in [0,1]$ δηλ. ο πελάτης είναι αδιάφορος.

Μη παρατηρήσιμη M/M/1 ουρά: Ανάλυση Ισορροπίας

$$U(p;p_e) = p\left(R - \frac{C}{\mu - \Lambda p_e}\right) \text{ (γραμμική ως προς } p\text{)}.$$

Έστω $0 < p_e < 1$. Τότε

- Η $U(p;p_e)$ μεγιστοποιείται για $p = p_e$ μόνο αν $R = \frac{C}{\mu - \Lambda p_e}$.
- Εδώ $BR(p) \in [0,1]$ δηλ. ο πελάτης είναι αδιάφορος.
- Επομένως αν $\frac{C}{\mu} < R < \frac{C}{\mu - \Lambda}$, η $BR(p_e) = p_e$ και η $p_e = \frac{\mu - C/R}{\Lambda}$ είναι ΣΣΙ.

Μη παρατηρήσιμη M/M/1 ουρά: Σημεία Ισορροπίας

Μη παρατηρήσιμη M/M/1 ουρά: Σημεία Ισορροπίας

Σημεία Στρατηγικής Ισορροπίας

Συνοπτικά

	p_e	$\lambda_e = \Lambda p_e$
$\mu - \frac{C}{R} \leq 0$	0	0
$0 < \mu - \frac{C}{R} < \Lambda$	$\frac{\mu - C/R}{\Lambda}$	$\mu - C/R$
$0 < \Lambda \leq \mu - \frac{C}{R}$	1	Λ

Παρατηρήσεις

- Αν η δυναμικότητα εξυπηρέτησης είναι μικρή $(\mu < \frac{C}{R})$, δε μπαίνει κανείς.

Παρατηρήσεις

- Αν η δυναμικότητα εξυπηρέτησης είναι μικρή $(\mu < \frac{C}{R})$, δε μπαίνει κανείς.
- Αν το μέγεθος της αγοράς είναι μικρό $(\Lambda \leq \mu - \frac{C}{R})$, μπαίνουν όλοι (market capture).

Παρατηρήσεις

- Αν η δυναμικότητα εξυπηρέτησης είναι μικρή ($\mu < \frac{C}{R}$), δε μπαίνει κανείς.
- Αν το μέγεθος της αγοράς είναι μικρό ($\Lambda \leq \mu - \frac{C}{R}$), μπαίνουν όλοι (market capture).
- Στην ενδιάμεση περίπτωση μπαίνει ένα ποσοστό p_e.

Παρατηρήσεις

- Αν η δυναμικότητα εξυπηρέτησης είναι μικρή $(\mu < \frac{C}{R})$, δε μπαίνει κανείς.
- Αν το μέγεθος της αγοράς είναι μικρό $(\Lambda \leq \mu - \frac{C}{R})$, μπαίνουν όλοι (market capture).
- Στην ενδιάμεση περίπτωση μπαίνει ένα ποσοστό p_e.
- Πάντα ισχύει ότι $\lambda_e \leq \mu - \frac{C}{R}$, δηλαδή η 'ανεκμετάλλευτη δυναμικότητα' είναι τουλάχιστον $\frac{C}{R}$.

Παρατηρήσεις

- Αν η δυναμικότητα εξυπηρέτησης είναι μικρή $(\mu < \frac{C}{R})$, δε μπαίνει κανείς.
- Αν το μέγεθος της αγοράς είναι μικρό $(\Lambda \leq \mu - \frac{C}{R})$, μπαίνουν όλοι (market capture).
- Στην ενδιάμεση περίπτωση μπαίνει ένα ποσοστό p_e.
- Πάντα ισχύει ότι $\lambda_e \leq \mu - \frac{C}{R}$, δηλαδή η 'ανεκμετάλλευτη δυναμικότητα' είναι τουλάχιστον $\frac{C}{R}$.
- Γιατί συμβαίνει αυτό;
- Η βέλτιστη απάντηση έναντι μίας στρατηγικής q είναι φθίνουσα. Λέμε ότι οι πελάτες αποφεύγουν-το-πλήθος (Avoid-The-Crowd).

Συμπεριφορά Avoid or Follow-the-Crowd

Έστω ότι ο χώρος των στρατηγικών είναι ολικά διατεταγμένος.

Αν s η στρατηγική των άλλων και $BR(s)$ η βέλτιστη απάντηση συγκεκριμένου πελάτη έναντι της s, τότε:

Συμπεριφορά Avoid or Follow-the-Crowd

Έστω ότι ο χώρος των στρατηγικών είναι ολικά διατεταγμένος.

Αν s η στρατηγική των άλλων και $BR(s)$ η βέλτιστη απάντηση συγκεκριμένου πελάτη έναντι της s, τότε:

- Αν $BR(s) \nearrow_s$ (αύξουσα): Συμπεριφορά Follow-the-Crowd (FTC).

Συμπεριφορά Avoid or Follow-the-Crowd

Έστω ότι ο χώρος των στρατηγικών είναι ολικά διατεταγμένος.

Αν s η στρατηγική των άλλων και $BR(s)$ η βέλτιστη απάντηση συγκεκριμένου πελάτη έναντι της s, τότε:

- Αν $BR(s) \nearrow_s$ (αύξουσα): Συμπεριφορά Follow-the-Crowd (FTC).
- Αν $BR(s) \searrow_s$ (φθίνουσα): Συμπεριφορά Avoid-the-Crowd (ATC).

Συμπεριφορά Avoid or Follow-the-Crowd

Έστω ότι ο χώρος των στρατηγικών είναι ολικά διατεταγμένος.

Αν s η στρατηγική των άλλων και $BR(s)$ η βέλτιστη απάντηση συγκεκριμένου πελάτη έναντι της s, τότε:

- Αν $BR(s) \nearrow_s$ (αύξουσα): Συμπεριφορά Follow-the-Crowd (FTC).
- Αν $BR(s) \searrow_s$ (φθίνουσα): Συμπεριφορά Avoid-the-Crowd (ATC).
- Τα σημεία τομής της $BR(s)$ με τη διχοτόμο των 45^o είναι οι θέσεις των ΣΣΙ.

Συμπεριφορά Avoid or Follow-the-Crowd

Έστω ότι ο χώρος των στρατηγικών είναι ολικά διατεταγμένος.

Αν s η στρατηγική των άλλων και $BR(s)$ η βέλτιστη απάντηση συγκεκριμένου πελάτη έναντι της s, τότε:

- Αν $BR(s) \nearrow_s$ (αύξουσα): Συμπεριφορά Follow-the-Crowd (FTC).
- Αν $BR(s) \searrow_s$ (φθίνουσα): Συμπεριφορά Avoid-the-Crowd (ATC).
- Τα σημεία τομής της $BR(s)$ με τη διχοτόμο των 45^o είναι οι θέσεις των ΣΣΙ.
- Στη περίπτωση καθαρής FTC συμπεριφοράς έχουμε πολλαπλά σημεία ισορροπίας.

Συμπεριφορά Avoid or Follow-the-Crowd

Έστω ότι ο χώρος των στρατηγικών είναι ολικά διατεταγμένος.

Αν s η στρατηγική των άλλων και $BR(s)$ η βέλτιστη απάντηση συγκεκριμένου πελάτη έναντι της s, τότε:

- Αν $BR(s) \nearrow_s$ (αύξουσα): Συμπεριφορά Follow-the-Crowd (FTC).
- Αν $BR(s) \searrow_s$ (φθίνουσα): Συμπεριφορά Avoid-the-Crowd (ATC).
- Τα σημεία τομής της $BR(s)$ με τη διχοτόμο των 45^o είναι οι θέσεις των ΣΣΙ.
- Στη περίπτωση καθαρής FTC συμπεριφοράς έχουμε πολλαπλά σημεία ισορροπίας.
- Στη περίπτωση καθαρής ATC συμπεριφοράς έχουμε μοναδικό σημείο ισορροπίας.

Πρόβλημα Κοινωνικής Βελτιστοποίησης

Πρόβλημα Κοινωνικής Βελτιστοποίησης

- Οι πελάτες δεν αποφασίζουν ανεξάρτητα αν θα μπουν με βάση το ατομικό τους κέρδος.

Πρόβλημα Κοινωνικής Βελτιστοποίησης

- Οι πελάτες δεν αποφασίζουν ανεξάρτητα αν θα μπουν με βάση το ατομικό τους κέρδος.
- Υπάρχει ένας κεντρικός ελεγκτής που αποφασίζει την κοινή για όλους πιθανότητα εισόδου p.

Πρόβλημα Κοινωνικής Βελτιστοποίησης

- Οι πελάτες δεν αποφασίζουν ανεξάρτητα αν θα μπουν με βάση το ατομικό τους κέρδος.
- Υπάρχει ένας κεντρικός ελεγκτής που αποφασίζει την κοινή για όλους πιθανότητα εισόδου p.
- Κριτήριο του ελεγκτή είναι η μεγιστοποίηση του συνολικού κέρδους όλων των πελατών ανά μονάδα χρόνου.

Πρόβλημα Κοινωνικής Βελτιστοποίησης

- Οι πελάτες δεν αποφασίζουν ανεξάρτητα αν θα μπουν με βάση το ατομικό τους κέρδος.
- Υπάρχει ένας κεντρικός ελεγκτής που αποφασίζει την κοινή για όλους πιθανότητα εισόδου p.
- Κριτήριο του ελεγκτή είναι η μεγιστοποίηση του συνολικού κέρδους όλων των πελατών ανά μονάδα χρόνου.
- Συνολικό κέρδος

$$S(p) = \Lambda p\left(R - CW(p)\right) = \Lambda p\left(R - \frac{C}{\mu - \Lambda p}\right)$$

Κοινωνικά Βέλτιστες Στρατηγικές

Μια στρατηγική p_o είναι κοινωνικά βέλτιστη (ή ολικά βέλτιστη, ή αποτελεσματική) αν

$$S(p_o) = \max_{0 \le p \le 1} S(p) = \max_{0 \le p \le 1} \Lambda p \left(R - CW(p)\right)$$

- $S'(p) = \Lambda \left(R - CW(p) - pCW'(p)\right) = \Lambda \left(R - \frac{C\mu}{(\mu - \Lambda p)^2}\right)$.
- $S''(p) = -\frac{2C\mu\Lambda^2}{(\mu-\Lambda p)^3}$, άρα η $S(p)$ κοίλη.

Κοινωνικά Βέλτιστες Στρατηγικές

Μια στρατηγική p_o είναι κοινωνικά βέλτιστη (ή ολικά βέλτιστη, ή αποτελεσματική) αν

$$S(p_o) = \max_{0 \le p \le 1} S(p) = \max_{0 \le p \le 1} \Lambda p \left(R - CW(p)\right)$$

- $S'(p) = \Lambda \left(R - CW(p) - pCW'(p)\right) = \Lambda \left(R - \frac{C\mu}{(\mu - \Lambda p)^2}\right)$.
- $S''(p) = -\frac{2C\mu\Lambda^2}{(\mu - \Lambda p)^3}$, άρα η $S(p)$ κοίλη.
- Η $S(p)$ μεγιστοποιείται όταν το οριακό κέρδος (marginal profit) $S'(p) = 0$.

Κοινωνικά Βέλτιστες Στρατηγικές

Μια στρατηγική p_o είναι κοινωνικά βέλτιστη (ή ολικά βέλτιστη, ή αποτελεσματική) αν

$$S(p_o) = \max_{0\leq p\leq 1} S(p) = \max_{0\leq p\leq 1} \Lambda p\,(R - CW(p))$$

- $S'(p) = \Lambda\,(R - CW(p) - pCW'(p)) = \Lambda\left(R - \frac{C\mu}{(\mu-\Lambda p)^2}\right)$.
- $S''(p) = -\frac{2C\mu\Lambda^2}{(\mu-\Lambda p)^3}$, άρα η $S(p)$ κοίλη.
- Η $S(p)$ μεγιστοποιείται όταν το οριακό κέρδος (marginal profit) $S'(p) = 0$.
- Επομένως η κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική p_o ικανοποιεί την εξίσωση

$$R - CW(p) - pCW'(p) = 0 \Leftrightarrow \Lambda\left(R - \frac{C\mu}{(\mu-\Lambda p)^2}\right) = 0$$

Κοινωνικά Βέλτιστες ή Αποτελεσματικές Στρατηγικές

Κοινωνικά Βέλτιστες Στρατηγικές

Συνοπτικά

	p_o	$\lambda_{o=\Lambda p_o}$
$R \leq \frac{C}{\mu}$	0	0
$\frac{C}{\mu} < R < \frac{C\mu}{(\mu-\Lambda)^2}$	$\frac{\mu-\sqrt{\frac{C\mu}{R}}}{\Lambda}$	$\mu - \sqrt{\frac{C\mu}{R}}$
$R \geq \frac{C\mu}{(\mu-\Lambda)^2}$	1	Λ

Σχέση Ατομικού και Κοινωνικού Βέλτιστου

Σχέση Ατομικού και Κοινωνικού Βέλτιστου

Θεώρημα

Πάντα ισχύει $p_o \leq p_e$, και $\lambda_o \leq \lambda_e$.

Σχέση Ατομικού και Κοινωνικού Βέλτιστου

Θεώρημα

Πάντα ισχύει $p_o \leq p_e$, και $\lambda_o \leq \lambda_e$.

- Ο κεντρικός ελεγκτής αφήνει λιγότερους πελάτες να χρησιμοποιήσουν το σύστημα συγκριτικά με την περίπτωση που κάθε πελάτης αποφασίζει μόνος του αν θα μπει ή όχι.

Σχέση Ατομικού και Κοινωνικού Βέλτιστου

Θεώρημα

Πάντα ισχύει $p_o \leq p_e$, και $\lambda_o \leq \lambda_e$.

- Ο κεντρικός ελεγκτής αφήνει λιγότερους πελάτες να χρησιμοποιήσουν το σύστημα συγκριτικά με την περίπτωση που κάθε πελάτης αποφασίζει μόνος του αν θα μπει ή όχι.
- Γιατί συμβαίνει αυτό;
- Το βλέπουμε στην πράξη;

Σχέση Ατομικού και Κοινωνικού Βέλτιστου

Στην περίπτωση των ανεξάρτητων στρατηγικών πελατών:

- Η στρατηγική ΣΣΙ p_e δίνεται από:

$$R - CW(p_e) = 0$$

- $R - CW(p_e) =$ κέρδος του ίδιου του πελάτη αν μπει στο σύστημα

Σχέση Ατομικού και Κοινωνικού Βέλτιστου

Στην περίπτωση του συνολικού κέρδους:

- Η κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική p_o δίνεται από:

$$R - CW(p_o) - CW'(p_o) = 0$$

- $R - CW(p_o)$ = κέρδος του οριακού πελάτη αν μπει στο σύστημα
- $CW'(p)$ = αύξηση της μέσης καθυστέρησης όλου του συστήματος αν μπει ο οριακός πελάτης

Σχέση Ατομικού και Κοινωνικού Βέλτιστου

Επομένως όταν ο πελάτης αποφασίζει μόνος του υπολογίζει μόνο το δικό του όφελος, ενώ ο κεντρικός ελεγκτής υπολογίζει το όφελος του πελάτη από την είσοδό του αλλά και την επίδραση που έχει αυτή στους υπόλοιπους πελάτες.

Σχέση Ατομικού και Κοινωνικού Βέλτιστου

Επομένως όταν ο πελάτης αποφασίζει μόνος του υπολογίζει μόνο το δικό του όφελος, ενώ ο κεντρικός ελεγκτής υπολογίζει το όφελος του πελάτη από την είσοδό του αλλά και την επίδραση που έχει αυτή στους υπόλοιπους πελάτες.

Αυτή η επίδραση ονομάζεται εξωτερικότητα (externality) και είναι ίση με $-CW'(p_o) < 0$ (negative externalities).

Externalities

Externalities

1. Negative Externality
   - Η είσοδος ενός πελάτη αυξάνει την καθυστέρηση (δηλαδή μειώνει το κέρδος) των άλλων πελατών
   - $\lambda_o < \lambda_e$
   - Διαισθητικά αναμενόμενη περίπτωση

Externalities

1. Negative Externality
   - Η είσοδος ενός πελάτη αυξάνει την καθυστέρηση (δηλαδή μειώνει το κέρδος) των άλλων πελατών
   - $\lambda_o < \lambda_e$
   - Διαισθητικά αναμενόμενη περίπτωση
2. Positive Externality
   - Η είσοδος ενός πελάτη μειώνει την καθυστέρηση (δηλαδή αυξάνει το κέρδος) των άλλων πελατών
   - $\lambda_o > \lambda_e$
   - Παραδείγματα: Server Vacations, Μεταβλητή Ταχύτητα Εξυπηρέτησης

Externalities

1. Negative Externality
   - Η είσοδος ενός πελάτη αυξάνει την καθυστέρηση (δηλαδή μειώνει το κέρδος) των άλλων πελατών
   - $\lambda_o < \lambda_e$
   - Διαισθητικά αναμενόμενη περίπτωση
2. Positive Externality
   - Η είσοδος ενός πελάτη μειώνει την καθυστέρηση (δηλαδή αυξάνει το κέρδος) των άλλων πελατών
   - $\lambda_o > \lambda_e$
   - Παραδείγματα: Server Vacations, Μεταβλητή Ταχύτητα Εξυπηρέτησης
3. No Externality
   - Η είσοδος ενός πελάτη δεν έχει καμιά επίδραση στην καθυστέρηση των άλλων πελατών
   - $\lambda_o = \lambda_e$
   - Παράδειγμα: LCFS with Reneging Decision

Το Πρόβλημα του Μονοπωλίου - Βέλτιστη Τιμολόγηση

- Θεωρούμε πάλι τη μη παρατηρήσιμη ουρά.

Το Πρόβλημα του Μονοπωλίου - Βέλτιστη Τιμολόγηση

- Θεωρούμε πάλι τη μη παρατηρήσιμη ουρά.
- Οι πελάτες αποφασίζουν ανεξάρτητα αν θα μπουν με βάση το ατομικό τους κέρδος.

Το Πρόβλημα του Μονοπωλίου - Βέλτιστη Τιμολόγηση

- Θεωρούμε πάλι τη μη παρατηρήσιμη ουρά.
- Οι πελάτες αποφασίζουν ανεξάρτητα αν θα μπουν με βάση το ατομικό τους κέρδος.
- Ο διαχειριστής του συστήματος βάζει τιμή εισόδου (entrance fee) f, ώστε να μεγιστοποιήσει το κέρδος του ανά χρονίκη μονάδα.

Το Πρόβλημα του Μονοπωλίου - Βέλτιστη Τιμολόγηση

- Θεωρούμε πάλι τη μη παρατηρήσιμη ουρά.
- Οι πελάτες αποφασίζουν ανεξάρτητα αν θα μπουν με βάση το ατομικό τους κέρδος.
- Ο διαχειριστής του συστήματος βάζει τιμή εισόδου (entrance fee) f, ώστε να μεγιστοποιήσει το κέρδος του ανά χρονίκη μονάδα.
- Κέρδος Μονοπωλίου ανά χρονική μονάδα

$$\Pi(f) = \Lambda p f$$

Το Πρόβλημα του Μονοπωλίου - Βέλτιστη Τιμολόγηση

- Θεωρούμε πάλι τη μη παρατηρήσιμη ουρά.
- Οι πελάτες αποφασίζουν ανεξάρτητα αν θα μπουν με βάση το ατομικό τους κέρδος.
- Ο διαχειριστής του συστήματος βάζει τιμή εισόδου (entrance fee) f, ώστε να μεγιστοποιήσει το κέρδος του ανά χρονίκη μονάδα.
- Κέρδος Μονοπωλίου ανά χρονική μονάδα

$$\Pi(f) = \Lambda p f$$

- Ζητάμε τη βέλτιστη τιμή εισόδου f_m που μεγιστοποιεί το κέρδος του μονοπωλίου για δεδομένη στρατηγική p των πελατών.

Ένα Ισοδύναμο Πρόβλημα

- Κάτω από τη τιμή εισόδου f, οι πελάτες θα υιοθετήσουν την αντίστοιχη στρατηγική ισορροπίας

$$p_e = \begin{cases} 0, & R - f \leq \frac{C}{\mu} \\ \frac{\mu - \frac{C}{R-f}}{\Lambda}, & \frac{C}{\mu} < R - f < \frac{C}{\mu - \Lambda} \\ 1, & R - f \geq \frac{C}{\mu - \Lambda} \end{cases}$$

Ένα Ισοδύναμο Πρόβλημα

- Κάτω από τη τιμή εισόδου f, οι πελάτες θα υιοθετήσουν την αντίστοιχη στρατηγική ισορροπίας

$$p_e = \begin{cases} 0, & R - f \leq \frac{C}{\mu} \\ \frac{\mu - \frac{C}{R-f}}{\Lambda}, & \frac{C}{\mu} < R - f < \frac{C}{\mu - \Lambda} \\ 1, & R - f \geq \frac{C}{\mu - \Lambda} \end{cases}$$

- Στην ισορροπία ισχύει

$$R - f - \frac{C}{\mu - \Lambda p_e} = 0 \Leftrightarrow f = R - \frac{C}{\mu - \Lambda p_e}$$

Ένα Ισοδύναμο Πρόβλημα

- Κάτω από τη τιμή εισόδου f, οι πελάτες θα υιοθετήσουν την αντίστοιχη στρατηγική ισορροπίας

$$p_e = \begin{cases} 0, & R - f \leq \frac{C}{\mu} \\ \frac{\mu - \frac{C}{R-f}}{\Lambda}, & \frac{C}{\mu} < R - f < \frac{C}{\mu - \Lambda} \\ 1, & R - f \geq \frac{C}{\mu - \Lambda} \end{cases}$$

- Στην ισορροπία ισχύει

$$R - f - \frac{C}{\mu - \Lambda p_e} = 0 \Leftrightarrow f = R - \frac{C}{\mu - \Lambda p_e}$$

- Στην ισορροπία, το κέρδος του διαχειριστή γίνεται

$$\Pi(p) = \Lambda p \left(R - \frac{C}{\mu - \Lambda p} \right).$$

Ένα Ισοδύναμο Πρόβλημα

- Κάτω από τη τιμή εισόδου f, οι πελάτες θα υιοθετήσουν την αντίστοιχη στρατηγική ισορροπίας

$$p_e = \begin{cases} 0, & R - f \leq \frac{C}{\mu} \\ \frac{\mu - \frac{C}{R-f}}{\Lambda}, & \frac{C}{\mu} < R - f < \frac{C}{\mu - \Lambda} \\ 1, & R - f \geq \frac{C}{\mu - \Lambda} \end{cases}$$

- Στην ισορροπία ισχύει

$$R - f - \frac{C}{\mu - \Lambda p_e} = 0 \Leftrightarrow f = R - \frac{C}{\mu - \Lambda p_e}$$

- Στην ισορροπία, το κέρδος του διαχειριστή γίνεται

$$\Pi(p) = \Lambda p \left(R - \frac{C}{\mu - \Lambda p} \right).$$

- Ζητάμε τη βέλτιστη στρατηγική p_m που μεγιστοποιεί το κέρδος του μονοπωλίου

$$\Pi(p_m) = \max_{0 \leq p \leq 1} \Pi(p)$$

Σχέση Κοινωνικής Βελτιστοποίησης και Βέλτιστου Κέρδους Μονοπωλίου

Οι αντικειμενικές συναρτήσεις του μονοπωλίου $\Pi(p)$ και της κοινωνίας $S(p)$ συμπίπτουν. Άρα

Σχέση Κοινωνικής Βελτιστοποίησης και Βέλτιστου Κέρδους Μονοπωλίου

Οι αντικειμενικές συναρτήσεις του μονοπωλίου $\Pi(p)$ και της κοινωνίας $S(p)$ συμπίπτουν. Άρα

- οι κοινωνικά βέλτιστες στρατηγικές p_o είναι και βέλτιστες για το μονοπώλιο, δηλ. $p_m = p_o$ και

Σχέση Κοινωνικής Βελτιστοποίησης και Βέλτιστου Κέρδους Μονοπωλίου

Οι αντικειμενικές συναρτήσεις του μονοπωλίου $\Pi(p)$ και της κοινωνίας $S(p)$ συμπίπτουν. Άρα

- οι κοινωνικά βέλτιστες στρατηγικές p_o είναι και βέλτιστες για το μονοπώλιο, δηλ. $p_m = p_o$ και
- η τιμή f_m που επάγει τη βέλτιστη στρατηγική είναι:

$$f_m = R - \frac{C}{\mu - \Lambda p_m}$$

.

Παρατηρήσεις

1. Αυτό συμβαίνει διότι οι πελάτες είναι ομοιογενείς, και άρα ο διαχειριστής με την εισαγωγή μίας τιμής, καρπώνεται όλο το κοινωνικό όφελος, δηλαδή δεν αφήνει θετικό περιθώριο κέρδους στους πελάτες.

Παρατηρήσεις

1. Αυτό συμβαίνει διότι οι πελάτες είναι ομοιογενείς, και άρα ο διαχειριστής με την εισαγωγή μίας τιμής, καρπώνεται όλο το κοινωνικό όφελος, δηλαδή δεν αφήνει θετικό περιθώριο κέρδους στους πελάτες.
2. Εδώ αύξηση στη ζήτηση (Λ) επάγει μείωση στη τιμή (f_m). Αν και δεν είναι διαισθητικό, δικαιολογείται από τη μείωση στη ποιότητα του αγαθού (αύξηση της μέσης αναμονής) λόγω της αύξησης στη ζήτηση και άρα λιγότερη πραγματική ζήτηση (Λp).

Παρατηρήσεις

1. Αυτό συμβαίνει διότι οι πελάτες είναι ομοιογενείς, και άρα ο διαχειριστής με την εισαγωγή μίας τιμής, καρπώνεται όλο το κοινωνικό όφελος, δηλαδή δεν αφήνει θετικό περιθώριο κέρδους στους πελάτες.
2. Εδώ αύξηση στη ζήτηση (Λ) επάγει μείωση στη τιμή (f_m). Αν και δεν είναι διαισθητικό, δικαιολογείται από τη μείωση στη ποιότητα του αγαθού (αύξηση της μέσης αναμονής) λόγω της αύξησης στη ζήτηση και άρα λιγότερη πραγματική ζήτηση (Λp).
3. Το παραπάνω μας δίνει και ένα τρόπο ρύθμισης της συμπεριφοράς των πελατών μέσω τιμολόγησης της εισόδου στο σύστημα, ώστε αυτοί να υιοθετούν κοινωνικά βέλτιστες στρατηγικές, όταν συμπεριφέρονται ατομικιστικά.

Στρατηγική Συμπεριφορά σε παρατηρήσιμη M/M/1 ουρά (Naor (1969))

Στρατηγική Συμπεριφορά σε παρατηρήσιμη M/M/1 ουρά (Naor (1969))

- Οι πελάτες που φτάνουν στο σύστημα γνωρίζουν το μέγεθος της ουράς πριν πάρουν την απόφαση εισόδου.

Στρατηγική Συμπεριφορά σε παρατηρήσιμη M/M/1 ουρά (Naor (1969))

- Οι πελάτες που φτάνουν στο σύστημα γνωρίζουν το μέγεθος της ουράς πριν πάρουν την απόφαση εισόδου.
- Οι αποφάσεις των πελατών που φτάνουν εξαρτώνται από τον αριθμό πελατών που βρίσκονται στο σύστημα κατά τη στιγμή άφιξης (δυναμικές στρατηγικές).

Στρατηγική Συμπεριφορά σε παρατηρήσιμη M/M/1 ουρά (Naor (1969))

- Οι πελάτες που φτάνουν στο σύστημα γνωρίζουν το μέγεθος της ουράς πριν πάρουν την απόφαση εισόδου.
- Οι αποφάσεις των πελατών που φτάνουν εξαρτώνται από τον αριθμό πελατών που βρίσκονται στο σύστημα κατά τη στιγμή άφιξης (δυναμικές στρατηγικές).

Στρατηγική Συμπεριφορά σε παρατηρήσιμη M/M/1 ουρά (Naor (1969))

Το Μοντέλο

- Διαδικασία αφίξεων Poisson ρυθμού Λ.
- Εκθετικοί i.i.d. Χρονοι Εξυπηρέτησης με $\mu =$ ρυθμός εξυπηρέτησης.
- 1 υπηρέτης, ∞ χωρητικότητα, FCFS πειθαρχία.
- $R =$ αξία εξυπηρέτησης μετά την ολοκλήρωσή της.
- $C =$ κόστος ανά χρονική μονάδα παραμονής στο σύστημα.
- $f =$ τιμή εισόδου στο σύστημα που θέτει ο διαχειριστής.
- Κάθε πελάτης που φθάνει στο σύστημα αποφασίζει αν θα μπεί (join) ή όχι (balk), γνωρίζοντας τον αριθμό των παρόντων πελατών στο σύστημα.

Στρατηγική Συμπεριφορά Πελατών

- Οι πελάτες λαμβάνουν αποφάσεις εισόδου/αναχώρησης αφού παρατηρήσουν τη κατασταση του συστήματος κατά τη στιγμή της άφιξής τους.
- $n = \#$πελατών στο σύστημα. Δεδομένου του n:
    - οι καθαρές στρατηγικές ενός πελάτη είναι είτε να μπεί (1) ή να μη μπεί (0)
    - οι μεικτές στρατηγικές δίνονται από το διάνυσμα πιθανοτήτων $p = (p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots)$, όπου $p_n \in [0, 1]$ πιθ. εισόδου όταν υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα.

Στρατηγική Συμπεριφορά Πελατών

- Οι πελάτες λαμβάνουν αποφάσεις εισόδου/αναχώρησης αφού παρατηρήσουν τη κατασταση του συστήματος κατά τη στιγμή της άφιξής τους.
- $n = \#$πελατών στο σύστημα. Δεδομένου του n:
  - οι καθαρές στρατηγικές ενός πελάτη είναι είτε να μπεί (1) ή να μη μπεί (0)
  - οι μεικτές στρατηγικές δίνονται από το διάνυσμα πιθανοτήτων $p = (p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots)$, όπου $p_n \in [0, 1]$ πιθ. εισόδου όταν υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα.
  - Αν ο πελάτης μπει

Στρατηγική Συμπεριφορά Πελατών

- Οι πελάτες λαμβάνουν αποφάσεις εισόδου/αναχώρησης αφού παρατηρήσουν τη κατασταση του συστήματος κατά τη στιγμή της άφιξής τους.
- n = #πελατών στο σύστημα. Δεδομένου του n:
  - οι καθαρές στρατηγικές ενός πελάτη είναι είτε να μπεί (1) ή να μη μπεί (0)
  - οι μεικτές στρατηγικές δίνονται από το διάνυσμα πιθανοτήτων $p = (p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots)$, όπου $p_n \in [0, 1]$ πιθ. εισόδου όταν υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα.
  - Αν ο πελάτης μπει
    - Η καθυστέρησή του δεν εξαρτάται από τη στρατηγική των παικτών και είναι ίση με $W_n = \frac{n+1}{\mu}$.

Στρατηγική Συμπεριφορά Πελατών

- Οι πελάτες λαμβάνουν αποφάσεις εισόδου/αναχώρησης αφού παρατηρήσουν τη κατασταση του συστήματος κατά τη στιγμή της άφιξής τους.
- $n = \#$πελατών στο σύστημα. Δεδομένου του n:
    - οι καθαρές στρατηγικές ενός πελάτη είναι είτε να μπεί (1) ή να μη μπεί (0)
    - οι μεικτές στρατηγικές δίνονται από το διάνυσμα πιθανοτήτων $p = (p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots)$, όπου $p_n \in [0, 1]$ πιθ. εισόδου όταν υπάρχουν n πελάτες στο σύστημα.
    - Αν ο πελάτης μπει
        - Η καθυστέρησή του δεν εξαρτάται από τη στρατηγική των παικτών και είναι ίση με $W_n = \frac{n+1}{\mu}$.
        - Το κέρδος του θα είναι ίσο με

$$U_n(p; q) = (1 - p_n) \cdot 0 + p_n \left(R - f - C\frac{n+1}{\mu} \right).$$

Στρατηγικές κατωφλίου

- Ο πελάτης θα μπεί αν και μόνο αν $U_n \geq 0$.

Στρατηγικές κατωφλίου

- Ο πελάτης θα μπεί αν και μόνο αν $U_n \geq 0$.
- Επομένως η στρατηγική 'μπες αν $n \leq \lfloor \frac{(R-f)\mu}{C} \rfloor - 1$, αλλιώς φύγε' είναι ΣΣΙ, ως κυριαρχούσα στρατηγική.

Στρατηγικές κατωφλίου

- Ο πελάτης θα μπεί αν και μόνο αν $U_n \geq 0$.
- Επομένως η στρατηγική 'μπες αν $n \leq \lfloor \frac{(R-f)\mu}{C} \rfloor - 1$, αλλιώς φύγε' είναι ΣΣΙ, ως κυριαρχούσα στρατηγική.
- Στρατηγική 'κατωφλίου' (threshold strategy): $n_e = \lfloor \frac{(R-f)\mu}{C} \rfloor$ κατώφλι εισόδου.

Στρατηγικές κατωφλίου

- Ο πελάτης θα μπεί αν και μόνο αν $U_n \geq 0$.
- Επομένως η στρατηγική 'μπες αν $n \leq \lfloor \frac{(R-f)\mu}{C} \rfloor - 1$, αλλιώς φύγε' είναι ΣΣΙ, ως κυριαρχούσα στρατηγική.
- Στρατηγική 'κατωφλίου' (threshold strategy): $n_e = \lfloor \frac{(R-f)\mu}{C} \rfloor$ κατώφλι εισόδου.

Παρατηρήσεις:

1. Η βέλτιστη απάντηση έναντι μίας στρατηγικής κατωφλίου των υπόλοιπων πελατών είναι επίσης στρατηγική κατωφλίου.
2. Η βέλτιστη απάντηση είναι φθινουσα ως προς τις στρατηγικές κατωφλίου.
3. Η συμπεριφορά πελατών είναι Avoid-The-Crowd.

Πρόβλημα Κοινωνικής Βελτιστοποίησης

- Ο κοινωνικός διαχειριστής επιθυμεί να μεγιστοποιήσει το συνολικό όφελος όλων επιβάλοντας σταθερή τιμή εισόδου f για όλους τους πελάτες.

Πρόβλημα Κοινωνικής Βελτιστοποίησης

- Ο κοινωνικός διαχειριστής επιθυμεί να μεγιστοποιήσει το συνολικό όφελος όλων επιβάλοντας σταθερή τιμή εισόδου f για όλους τους πελάτες.
- Δεδομένης της f, οι πελάτες λειτουργώντας ατομικιστικά θα υιοθετήσουν το κατώφλι ισορροπίας $n_e = \lfloor \frac{(R-f)\mu}{C} \rfloor$ και τότε το σύστημα στη στάσιμη κατάσταση θα συμπεριφέρεται ως $M/M/1/n_e$.

Πρόβλημα Κοινωνικής Βελτιστοποίησης

- Ο κοινωνικός διαχειριστής επιθυμεί να μεγιστοποιήσει το συνολικό όφελος όλων επιβάλοντας σταθερή τιμή εισόδου f για όλους τους πελάτες.
- Δεδομένης της f, οι πελάτες λειτουργώντας ατομικιστικά θα υιοθετήσουν το κατώφλι ισορροπίας $n_e = \lfloor \frac{(R-f)\mu}{C} \rfloor$ και τότε το σύστημα στη στάσιμη κατάσταση θα συμπεριφέρεται ως $M/M/1/n_e$.
- Αρα, ο συνολικός πλούτος θα εξαρτάται από το κατώφλι n και δίνεται απο:

$$S(n) = \lambda^* R - CE[N], \text{ με}$$

- $\lambda^* = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda p_k = \Lambda(1 - p_n)$
- $E[N] = \sum_{k=0}^{n} k p_k$
- $p_k = \frac{(1-\rho)\rho^k}{1-\rho^{n+1}}$, $0 \leq k \leq n$ (στάσιμη κατανομή).

Κοινωνική Βελτιστοποίηση

Αρα, ο συνολικός πλούτος δίνεται απο:

$$S(n) = \Lambda R \frac{1-\rho^n}{1-\rho^{n+1}} - C\left[\frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(n+1)\rho^{n+1}}{1-\rho^{n+1}}\right]$$

- Αποδεικνύεται ότι η $S(n)$ είναι μονοκόρυφη με μέγιστο στο n_o.
- $n_o = \max\left\{n : \frac{n+\rho^{n+1}-(n+1)\rho}{(1-\rho)^2} \leq \frac{R\mu}{C}\right\}$.
- Το αριστερό μέλος της ανισότητας είναι αύξουσα συνάρτηση του n.

Κοινωνικά Βέλτιστες Στρατηγικές Κατωφλίου

- Η κοινωνικά βέλτιστη στρατηγική κατωφλίου είναι η n_o.
- Επάγεται έμμεσα από τον διαχειριστή, θέτοντας τιμή f_o τέτοια ώστε:

$$n_o = \lfloor \frac{(R - f_o)\mu}{C} \rfloor.$$

δηλαδή, για οποιαδήποτε τιμή f_o με

$$R - \frac{C(n_o - 1)}{\mu} \leq f_o \leq R - \frac{Cn_o}{\mu}$$

- Ισχύει ότι $n_o \leq n_e(0)$ με $n_e(0) = \lfloor \frac{R\mu}{C} \rfloor$, δλδ αν οι πελάτες μπαίνουν χωρίς να πληρώσουν την είσοδο $(f = 0)$.

Βελτιστοποίηση Κέρδους Μονοπωλίου

- Μονοπώλιο επιλέγει τιμή f_m ώστε να μεγιστοποιήσει το κέρδος του ανά χρονική μονάδα.
- Για δεδομένη τιμή είσόδου f, οι πελάτες κάτω από την ατομική τους βελτιστοποίηση επιλέγουν το κατώφλι $n_e(f)$ και το κέρδος του διαχειριστή ανά χρονική μονάδα είναι

$$\Pi = \Lambda \frac{1-\rho^{n_e(f)}}{1-\rho^{n_e(f)+1}} \cdot f$$

Βελτιστοποίηση Κέρδους Μονοπωλίου

- Μονοπώλιο επιλέγει τιμή f_m ώστε να μεγιστοποιήσει το κέρδος του ανά χρονική μονάδα.
- Για δεδομένη τιμή είσόδου f, οι πελάτες κάτω από την ατομική τους βελτιστοποίηση επιλέγουν το κατώφλι $n_e(f)$ και το κέρδος του διαχειριστή ανά χρονική μονάδα είναι

$$\Pi = \Lambda \frac{1-\rho^{n_e(f)}}{1-\rho^{n_e(f)+1}} \cdot f$$

- Διατυπώνουμε το ισοδύναμο πρόβλημα, εκφράζοντας την Π συναρτήσει του κατωφλίου n, ως εξής:
    - Για να επιτευχθεί κατώφλι n θα πρέπει να τεθεί τιμή f τέτοια ώστε $n = \lfloor \frac{(R-f)\mu}{C} \rfloor$ και η f να είναι η μέγιστη δυνατή.
    - $f = R - \frac{Cn}{\mu}$
    - $\Pi(n) = \Lambda \frac{1-\rho^{n(f)}}{1-\rho^{n(f)+1}} \cdot \left(R - \frac{Cn}{\mu}\right).$

Βελτιστες Στρατηγικές Κατωφλίου για το Μονοπώλιο

1. Αποδεικνύεται ότι η $\Pi(n)$ είναι μονοκόρυφη.
2. Παρουσιάζει μέγιστο στο n_m με

$$n_m = \max\left\{n : \ n + \frac{(1-\rho^{n-1})(1-\rho^{n+1})}{\rho^{n-1}(1-\rho)^2} \leq \frac{R\mu}{C}\right\}.$$

3. Το αριστερό μέλος της ανισότητας είναι αύξουσα συνάρτηση του n άρα υπάρχει μοναδικό n_m.
4. Αποδεικνύεται ότι $n_m \leq n_o \leq n_e(0)$.

Μερικές Επεκτάσεις

Μερικές Επεκτάσεις

1. Διαφορετικές Κατηγορίες (Κλάσεις) Πελατών
    - Συστήματα Εξυπηρέτησης με Προτεραιότητες.
    - Τιμολόγηση ανά κατηγορία.
    - Συστήματα Δημοπρασίας για Αγορά Προτεραιότητας.
    - Pricing Internet and Broadband Services.

Μερικές Επεκτάσεις

1. Διαφορετικές Κατηγορίες (Κλάσεις) Πελατών
   - Συστήματα Εξυπηρέτησης με Προτεραιότητες.
   - Τιμολόγηση ανά κατηγορία.
   - Συστήματα Δημοπρασίας για Αγορά Προτεραιότητας.
   - Pricing Internet and Broadband Services.
2. Server Vacations
   - Όταν το σύστημα αδειάσει ο σταθμός σταματά και ασχολείται με κάτι άλλο
   - Επιστρέφει όταν συγκεντρωθούν N πελάτες στην ουρά

Μερικές Επεκτάσεις

1. Διαφορετικές Κατηγορίες (Κλάσεις) Πελατών
   - Συστήματα Εξυπηρέτησης με Προτεραιότητες.
   - Τιμολόγηση ανά κατηγορία.
   - Συστήματα Δημοπρασίας για Αγορά Προτεραιότητας.
   - Pricing Internet and Broadband Services.
2. Server Vacations
   - Όταν το σύστημα αδειάσει ο σταθμός σταματά και ασχολείται με κάτι άλλο
   - Επιστρέφει όταν συγκεντρωθούν N πελάτες στην ουρά
3. Δυναμικός Ρυθμός Εξυπηρέτησης
   - Ο σταθμός εξυπηρετεί με ταχύτητα που εξαρτάται από το συνωστισμό του συστήματος
   - Παράδειγμα: $\mu = \mu_l$ όταν $n \leq T$, $\mu = \mu_h$ όταν $n > T$, όπου $\mu_h > \mu_l$.

Μερικές Επεκτάσεις

1. Διαφορετικές Κατηγορίες (Κλάσεις) Πελατών
   - Συστήματα Εξυπηρέτησης με Προτεραιότητες.
   - Τιμολόγηση ανά κατηγορία.
   - Συστήματα Δημοπρασίας για Αγορά Προτεραιότητας.
   - Pricing Internet and Broadband Services.
2. Server Vacations
   - Όταν το σύστημα αδειάσει ο σταθμός σταματά και ασχολείται με κάτι άλλο
   - Επιστρέφει όταν συγκεντρωθούν N πελάτες στην ουρά
3. Δυναμικός Ρυθμός Εξυπηρέτησης
   - Ο σταθμός εξυπηρετεί με ταχύτητα που εξαρτάται από το συνωστισμό του συστήματος
   - Παράδειγμα: $\mu = \mu_l$ όταν $n \leq T$, $\mu = \mu_h$ όταν $n > T$, όπου $\mu_h > \mu_l$.
4. Επίδραση της Πληροφορίας
   - Κατά την άφιξή του ο πελάτης μπορεί να παίρνει λιγότερη ή περισσότερη πληροφορία σχετικά με την κατάσταση του συστήματος.
   - Πώς επιδρά αυτή η διαβάθμιση της πληροφόρησης στη διαμόρφωση ΣΣΙ;

Βιβλιογραφία

- Hassin, R. and Haviv, M. (2003). *To queue or not to queue*, Kluwer, Boston.
- Stidham, S. (2009). *Optimal design of queueing systems*, CRC Press Book.
- Hassin, R. (2016). *Rational queueing*, CRC Press Book.
- Courcoubetis, C. and Weber, R. (2003). *Pricing Communications Networks*, Wiley, New York.
- Gross, D. and Harris, C. (1998). *Fundamentals of Queueing Theory*, Wiley, New York.
- Μηλολιδάκης, Κ. (2009). *Εισαγωγή στη Θεωρία Παιγνίων*, Εκδ. Σοφία, Θεσσαλονίκη.