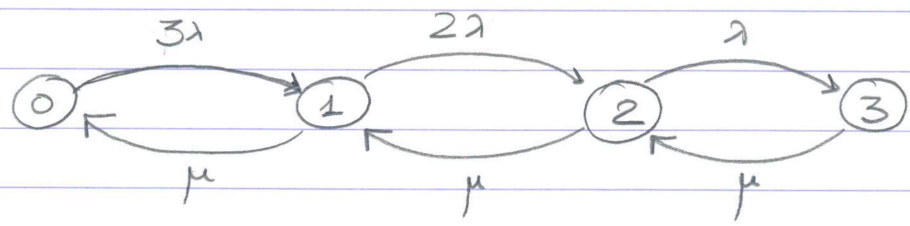
Ασκήσεις Κεφ. 16 (Στοχ. Ανελ. Συνεχούς Χρόνου)

16.8-1 Θα λύσουμε το πρόβλημα παραμετρικά

Έστω λ ο ρυθμός αποτυχίας κάθε μηχανής κ' μ ο ρυθμός επισκευής. Έστω $X(t)$ ο αριθμός των χαλασμένων μηχανών. Η $X(t)$ ακολουθεί Μαρκοβιανή ανέλιξη συνεχούς χρόνου με το παρακάτω διάγραμμα ρυθμών μετάβασης



Για τις εξισώσεις στάσιμης κατάστασης θεωρούμε τις τομές 0-1, 1-2, 2-3:

$$\Pi_0 \cdot 3\lambda = \Pi_1 \mu \Rightarrow \Pi_1 = \Pi_0 \cdot \frac{3\lambda}{\mu}$$

$$\Pi_1 \cdot 2\lambda = \Pi_2 \mu \Rightarrow \Pi_2 = \Pi_1 \cdot \frac{2\lambda}{\mu} = \Pi_0 \cdot \frac{6\lambda^2}{\mu^2}$$

$$\Pi_2 \lambda = \Pi_3 \mu \Rightarrow \Pi_3 = \Pi_2 \frac{\lambda}{\mu} = \Pi_0 \cdot \frac{6\lambda^3}{\mu^3}$$

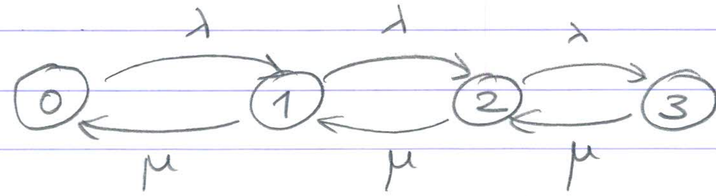
$$\Pi_0 + \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 = 1 \Rightarrow \Pi_0 \cdot \left(1 + \frac{3\lambda}{\mu} + \frac{6\lambda^2}{\mu^2} + \frac{6\lambda^3}{\mu^3}\right) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Pi_0 = \frac{1}{1 + \frac{3\lambda}{\mu} + \frac{6\lambda^2}{\mu^2} + \frac{6\lambda^3}{\mu^3}}$$

Για $\lambda = 1$, $\mu = 2 \Rightarrow \Pi_0 = \frac{1}{1 + \frac{3}{2} + \frac{6}{4} + \frac{6}{8}} = \frac{4}{19}$

$\Pi_1 = \Pi_0 \cdot \frac{3\lambda}{\mu} = \frac{6}{19}$ $\Pi_1 = \Pi_0 \cdot \frac{6\lambda^2}{\mu^2} = \frac{6}{19}$, $\Pi_3 = \Pi_0 \cdot \frac{6\lambda^3}{\mu_3} = \frac{3}{19}$

$\boxed{16.8\text{-}2}$ Έστω λ = ρυθμός αφίξεων, μ = ρυθμός εξυπηρέτησης



$\rho = \lambda/\mu$

$$\Pi_0 \lambda = \Pi_1 \mu \Rightarrow \Pi_1 = \Pi_0 \rho$$

$$\Pi_1 \lambda = \Pi_2 \mu \Rightarrow \Pi_2 = \Pi_1 \rho = \Pi_0 \rho^2$$

$$\Pi_2 \lambda = \Pi_3 \mu \Rightarrow \Pi_3 = \Pi_2 \rho = \Pi_0 \rho^3$$

$$\sum_{n=0}^{3} \Pi_n = \Pi_0 \cdot (1+\rho+\rho^2+\rho^3) = \Pi_0 \cdot \frac{1-\rho^4}{1-\rho} = 1 \Rightarrow \Pi_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^4}$$

$$\Pi_1 = \frac{\rho(1-\rho)}{1-\rho^4}, \quad \Pi_2 = \frac{\rho^2(1-\rho)}{1-\rho^4}, \quad \Pi_3 = \frac{\rho^3(1-\rho)}{1-\rho^4}$$

Για $\lambda = 2$, $\mu = 4 \Rightarrow \rho = 1/2$

$$\Rightarrow \Pi_0 = \frac{1-1/2}{1-1/16} = \frac{8}{15}, \quad \Pi_1 = \frac{4}{15}, \quad \Pi_2 = \frac{2}{15}, \quad \Pi_3 = \frac{1}{15}$$

Ασκήσεις Κεφαλαίου 17

17.2-2

ⓐ $L = \sum_{n=0}^{4} n\pi_n = \pi_1 + 2\pi_2 + 3\pi_3 + 4\pi_4$

$= \frac{4}{16} + 2\cdot\frac{6}{16} + 3\cdot\frac{4}{16} + 4\cdot\frac{1}{16} = \frac{32}{16} = 2$

ⓑ

X	X_q	X_{served}
0	0	0
1	0	1
2	0	2
3	1	2
4	2	2

$L_q = 1\cdot\pi_3 + 2\cdot\pi_4 = \frac{4}{16} + 2\cdot\frac{1}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

ⓒ $L_s = E(X_{served}) = \pi_1 + 2\cdot(\pi_2+\pi_3+\pi_4) =$

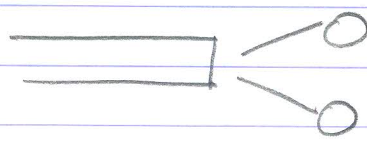
$= \frac{4}{16} + 2\cdot\frac{6+4+1}{16} = \frac{26}{16} = \frac{13}{8}$

ⓓ $W = \frac{L}{\lambda} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\,hr$, $W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{3/8}{4} = \frac{3}{32}\,hr$

ⓔ $W = W_q + E(S) \Rightarrow E(S) = \frac{1}{2} - \frac{3}{32} = \frac{13}{32}\,hr.$

17.2-5

(a)



$\lambda = 40/hr = \frac{2}{3}/min$

$\mu = 30/hr = \frac{1}{2}/min$

(b) Χρησιμοποιούμε το λεπτό ως μονάδα χρόνου

$W_q = 1$

$W = W_q + E(S) = 1 + 2 = 3 \ min$

$L_q = \lambda W_q = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$

$L = \lambda W = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2$

17.2-6

Σε ένα σύστημα με ένα σταθμό εξυπηρέτησης, ο σταθμός λειτουργεί όποτε υπάρχει έστω και ένας πελάτης στο σύστημα, ενώ είναι ανενεργός όταν το σύστημα είναι άδειο. Επομένως το ποσοστό του χρόνου που λειτουργεί ο σταθμός είναι ίσο με $1-\pi_0$.

Από την άλλη πλευρά αν λ είναι ο ρυθμός αφίξεων και μ ο ρυθμός εξυπηρέτησης, ο σταθμός έχει δυνατότητα να εξυπηρετήσει μ πελάτες ανά μον. χρ ενώ μπαίνουν μόνο λ. Επομένως το ποσοστό του χρόνου που λειτουργεί ο σταθμός είναι $\lambda/\mu = \rho$

Επομένως $1-\pi_0 = \rho$.

$\boxed{17.2\text{-}9}$ Έστω s = αριθμός σταθμών εξυπηρέτησης σε σύστημα με μια ουρά αναμονής.

Ο μέσος αριθμός ατόμων στο σύστημα είναι $L = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n$

Ο μέσος αριθμός ατόμων στην ουρά είναι

$$L_q = \sum_{n=s+1}^{\infty} (n-s)\pi_n$$

Επομένως $L = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n = \sum_{n=0}^{s-1} n\pi_n + s\pi_s + \sum_{n=s+1}^{\infty} n\pi_n$

$$= \sum_{n=0}^{s-1} n\pi_n + s\pi_s + \sum_{n=s+1}^{\infty} (n-s+s)\pi_n =$$

$$= \sum_{n=0}^{s-1} n\pi_n + \sum_{n=s+1}^{\infty} (n-s)\pi_n + s\pi_s + s\sum_{n=s+1}^{\infty} \pi_n =$$

$$= \sum_{n=0}^{s-1} n\pi_n + L_q + s\sum_{n=s}^{\infty} \pi_n = L_q + \sum_{n=0}^{s-1} n\pi_n + s\left(1 - \sum_{n=0}^{s-1} \pi_n\right)$$

$\boxed{17.4\text{-}3}$ Έστω S_1 ο χρόνος επισκευής χωρίς το νέο εργαλείο και S_2 " " με το νέο εργαλείο.

Έχουμε $S_1 \sim Exp(\mu_1)$ με $\frac{1}{\mu_1} = 4 \Rightarrow \mu_1 = 1/4$

$S_2 \sim Exp(\mu_2)$ με $\frac{1}{\mu_2} = 2 \Rightarrow \mu_2 = 1/2$

Έστω C = η πληρωμή του συνεργείου.

Τότε $C = \begin{cases} 100 & \text{αν } S \leq 2 \\ 80 & \text{αν } S > 2 \end{cases} \Rightarrow E(C) = 100\,P(S\leq 2) + 80\,P(S>2)$

$$= 100\,P(S\leq 2) + 80\left(1 - P(S\leq 2)\right)$$

$\Rightarrow E(C) = 80 + 20\, P(S \leq 2)$

Χωρίς το εργαλείο $E(C_1) = 80 + 20\, P(S_1 \leq 2) =$

$= 80 + 20\left(1 - e^{-2/4}\right) = 100 - 20 e^{-1/2}$

Με το εργαλείο $E(C_2) = 80 + 20\, P(S_2 \leq 2)$

$= 80 + 20\left(1 - e^{-2/2}\right) = 100 - 20 e^{-1}$

$\boxed{17.4\text{-}5}$ Έστω S_1, S_2, S_3 οι χρόνοι εξυπηρέτησης στους 3 σταθμούς. Έχουμε $S_1 \sim Exp(1/20)$, $S_2 \sim Exp(1/15)$ $S_3 \sim Exp(1/10)$.

Έστω επίσης S_1^c, S_2^c, S_3^c οι υπολειπόμενοι χρόνοι εξυπηρέτησης μετά τα 5 πρώτα λεπτά. Από την έλλειψη μνήμης προκύπτει ότι

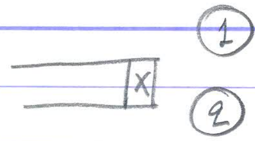
$S_1^c \sim Exp(1/20)$, $S_2^c \sim Exp(1/15)$, $S_3^c \sim Exp(1/10)$

Ο χρόνος μέχρι την επόμενη ολοκλήρωση εξυπηρέτησης είναι ίσος με $S^c = \min(S_1^c, S_2^c, S_3^c)$, και επειδή οι S_1^c, S_2^c, S_3^c είναι ανεξάρτητες έχουμε

$$S^c \sim Exp\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{15} + \frac{1}{10}\right) = Exp\left(\frac{13}{60}\right)$$

Επομένως $E(S^c) = \frac{60}{13} \approx 4{,}6 \text{ min}$

$\boxed{17.4\text{-}7}$



Έστω S_1, S_2 οι υπολειπόμενοι χρόνοι εξυπηρέτησης στους σταθμούς 1, 2.

Από την έλλειψη μνήμης $S_1 \sim Exp(1/10)$, $S_2 \sim Exp(1/10)$

(a) Ο πελάτης (X) θα μείνει στην ουρά μέχρι να φύγει ο πρώτος από τους άλλους δύο, δηλαδή ο χρόνος στην ουρά είναι

$$T_q = \min(S_1, S_2) \Rightarrow T_q \sim Exp(2/10)$$

(b) Ο χρόνος εξυπηρέτησης του πελάτη είναι $S \sim Exp(1/10)$

Επομένως ο χρόνος παραμονής του στο σύστημα είναι

$$T = T_q + S.$$

$$E(T) = E(T_q) + E(S) = \frac{10}{2} + 10 = 15 \text{ min}$$

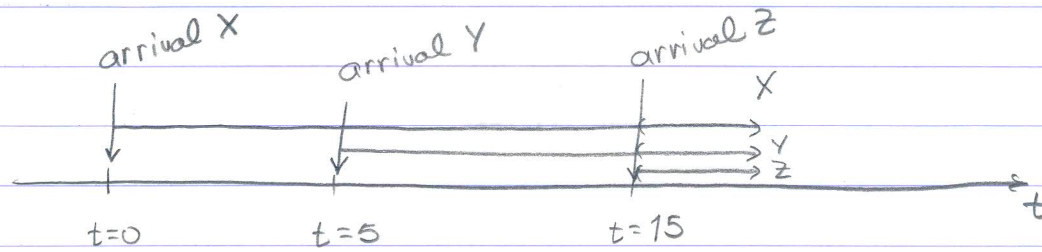
$$Var(T) = Var(T_q) + Var(S) = 5^2 + 10^2 = 125 \text{ min}^2$$

$$\Rightarrow \sigma(T) = \sqrt{Var(T)} = \sqrt{125} \approx 11{,}2 \text{ min}$$

Επίσης $E(T_q) = 5$ $\quad V(T_q) = 5^2$, $\sigma(T_q) = 5$

(c) Λόγω της έλλειψης μνήμης οι υπολειπόμενοι χρόνοι εξυπηρέτησης μετά τα 5 λεπτά έχουν την ίδια κατανομή όπως πριν επομένως δεν αλλάζει τίποτα.

17.4-8



(a) Έστω X, Y οι υπολειπόμενοι χρόνοι εξυπηρέτησης των X, Y, κατά τη στιγμή $t=15$.
Λόγω έλλειψης μνήμης $X, Y \sim Exp(1/15)$, ανεξάρτητες

$$P(X \text{ πριν } Y) = P(X<Y) = \frac{1/15}{\frac{1}{15}+\frac{1}{15}} = \frac{1}{2}$$

(b) Για να τελειώσει ο Z πριν τον X θα πρέπει ο Y να τελειώσει πριν τον X, να μπει ο Z στη θέση του Y και να τελειώσει πριν τον X.
Δηλαδή

$$P(Z \text{ πριν } X) = P(Z+Y<X)$$

$$= P(Y<X) \cdot P(Z+Y<X \mid Y<X)$$

Όμως $P(Y<X) = 1/2$ (από (a)).
Επίσης λόγω της έλλειψης μνήμης, τη στιγμή που θα μπει ο Z στη θέση του Y οι δύο υπολειπόμενοι χρόνοι θα είναι πάλι $Exp(1/15)$, επομένως

$$P(Z+Y<X \mid Y<X) = 1/2$$

δηλαδή

$$P(Z \text{ πριν } X) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4.$$

(c) Ομοια $P(Z<Y) = 1/4$

(d) Ο πελάτης X έχει ήδη μείνει 15 λεπτά και ο υπολειπόμενος χρόνος του είναι $X \sim Exp(1/15)$
Επομένως ο συνολικός χρόνος παραμονής του είναι

$T_X = 15 + X$, όπου $X \sim Exp(1/15)$

$$P(T_X \leq x) = P(X + 15 \leq x) = P(X \leq x - 15) = 1 - e^{-\frac{x-15}{15}}, \text{ για } x \geq 15$$

$$E(T_X) = 15 + E(X) = 15 + 15 = 30$$
$$Var(T_X) = Var(X) = 15^2 = 125 \Rightarrow \sigma(T_X) = 15$$

(e) Ο πελάτης Y έχει ήδη μείνει 10 λεπτά, επομένως ανάλογα με το (d):

$$T_Y = 10 + Y, \quad P(T_Y \leq y) = 1 - e^{-\frac{y-10}{15}} \quad y \geq 10$$

$$E(T_Y) = 10 + 15 = 25, \quad \sigma(T_Y) = 15$$

(f) Ο χρόνος που θα παραμείνει ο Z είναι ίσος με το χρόνο μέχρι την πρώτη αναχώρηση των X, Y έστω $T_{X,Y}$ κ' επιπλέον το χρόνο εξυπηρέτησης του Z, S_Z.

$$T_{X,Y} = \min(X, Y) \Rightarrow T_{X,Y} \sim Exp(2/15)$$
$$S_Z \sim Exp(1/15)$$
ανεξάρτητα

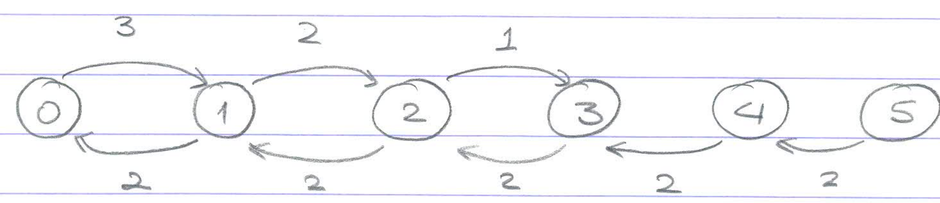
$$T_Z = T_{X,Y} + S_Z$$

$$E(T_Z) = E(T_{XY}) + E(S_Z) = \frac{15}{2} + 15 = \frac{45}{2} = 22{,}5 \text{ min}$$
$$Var(T_Z) = Var(T_{XY}) + Var(S_Z) = \left(\frac{15}{2}\right)^2 + 15^2 = 281{,}25 \Rightarrow \sigma(T_Z) = 16{,}77 \text{ min}$$

(g) Η άσκηση δε δίνει πληροφορίες για τη διαδικασία αφίξεων δηλαδή για την κατανομή των χρόνων μεταξύ αφίξεων και επομένως η ζητούμενη πιθανότητα δε μπορεί να υπολογιστεί.

$\boxed{17.5\text{-}1}$ $X(t)$ = αρ. πελατών στο σύστημα.

(a)



(b) Η επαναληπτική κλάση είναι η $\{0,1,2,3\}$. Η στάσιμη κατανομή δίνεται από:

$$3\pi_0 = 2\pi_1 \Rightarrow \pi_1 = \frac{3}{2}\pi_0$$

$$2\pi_1 = 2\pi_2 \Rightarrow \pi_2 = \pi_1 = \frac{3}{2}\pi_0$$

$$\pi_2 = 2\pi_3 \Rightarrow \pi_3 = \frac{1}{2}\pi_2 = \frac{3}{4}\pi_0$$

$$\pi_4 = \pi_5 = \dots = 0 \quad \text{(μεταβατικές)}$$

$$\pi_0+\pi_1+\pi_2+\pi_3 = 1 \Rightarrow \pi_0\cdot\left(1+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+\frac{3}{4}\right)=1 \Rightarrow \pi_0 = \frac{4}{19}$$

$$\pi_1 = \frac{6}{19}, \quad \pi_2 = \frac{6}{19}, \quad \pi_3 = \frac{3}{19}$$

(c) Αφού $\mu_n = 2 \ \forall n$, υπάρχει ένας σταθμός εξυπηρέτησης

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n = \pi_1 + 2\pi_2 + 3\pi_3 = \frac{27}{19}$$

$$L_q = 0\pi_0 + 0\cdot\pi_1 + 1\cdot\pi_2 + 2\pi_3 = \frac{12}{19}$$

$$\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \pi_n = 3\pi_0 + 2\pi_1 + \pi_2 = \frac{30}{19}$$

$$W = \frac{L}{\bar{\lambda}} = \frac{27}{30} \quad , \quad W_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}} = \frac{12}{30}$$

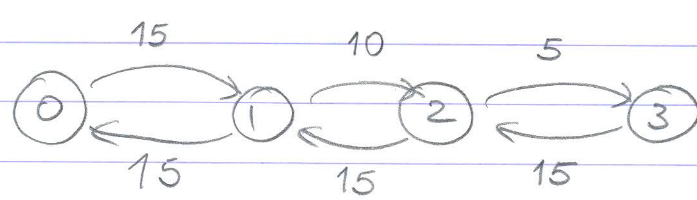
Επίσης ισχύει $W - W_q = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$ που είναι ο αναμενόμενος χρόνος εξυπηρέτησης όπως περιμέναμε.

17.5−5 Στην κατάσταση n ο ρυθμός άφιξης είναι λ και η πιθανότητα balking (δηλ. αποχώρησης) $p_n = n/3$

Επομένως η πιθανότητα να μπει ο πελάτης στην ουρά ίση με $1-p_n$, Άρα ο πραγματικός ρυθμός εισόδου είναι

$\lambda_n = \lambda(1-p_n) = \lambda(1-n/3)$ για $n=1,2,3$, $\lambda=0$ για $n>3$

(b)



$\frac{1}{\mu} = 4$ min

$\Rightarrow \mu = \frac{1}{4}/min = 15/hr$

$15\pi_0 = 15\pi_1 \Rightarrow \pi_1 = \pi_0$

$10\pi_1 = 15\pi_2 \Rightarrow \pi_2 = \frac{2}{3}\pi_1 = \frac{2}{3}\pi_0$

$5\pi_2 = 15\pi_3 \Rightarrow \pi_3 = \frac{1}{3}\pi_2 = \frac{2}{9}\pi_0$

(c)

$\Rightarrow \pi_0 = \frac{9}{26}, \quad \pi_1 = \frac{9}{26}, \quad \pi_2 = \frac{6}{26}, \quad \pi_3 = \frac{2}{26}$

(d) $L = \pi_1 + 2\pi_2 + 3\pi_3 = \dfrac{27}{26}$

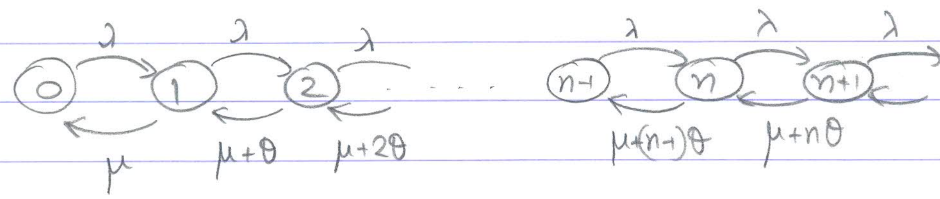
$\bar{\lambda} = 15\pi_0 + 10\pi_1 + 5\pi_2 = \dfrac{255}{26}$

$\Rightarrow W = \dfrac{L}{\bar{\lambda}} = \dfrac{27}{255}$ hrs $\approx$ 6,35 min.

17.5-7 Στην κατάσταση n πελάτες στο σύστημα, υπάρχουν $n-1$ πελάτες στην ουρά $(n \geq 1)$.

(a)

Οι δυνατές μεταβάσεις είναι: στην $n+1$ με ρυθμό λ (νέα άφιξη)
στην κατάσταση $n-1$: με ρυθμό $\mu + (n-1)\theta$
(μ για ολοκλήρωση εξυπηρέτησης
κ' θ για την αποχώρηση κάθε πελάτη στην ουρά)



(b) $\lambda\pi_0 = \mu\pi_1 \quad \Rightarrow \quad \pi_1 = \dfrac{\lambda}{\mu}\pi_0$

$\lambda\pi_1 = (\mu+\theta)\pi_2 \quad \Rightarrow \quad \pi_2 = \dfrac{\lambda}{\mu+\theta} \cdot \dfrac{\lambda}{\mu}\pi_0$

$\lambda\pi_2 = (\mu+2\theta)\pi_3 \quad \Rightarrow \quad \pi_3 = \dfrac{\lambda^3}{\mu(\mu+\theta)(\mu+2\theta)}\pi_0$

$\vdots$

$$\pi_n = \frac{\lambda^n}{\mu(\mu+\theta)\cdots(\mu+(n-1)\theta)}\pi_0.$$

17.5-8 Συνδυάζοντας τις ασκήσεις 5-5 κ' 5-7:

$\lambda = 4/hr \quad , \quad \mu = 1/hr$

(a) Στην πρώτη θέση της ουράς reneging rate = 1
" δεύτερη " " " " " = 2 $\left(= \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right)$

Οι πιθανότητες εισόδου είναι 1 για $n=0$,
$1/2$ για $n=1$
$1/4$ για $n=2$, 0 για $n=3$

Επομένως $\lambda_0 = 4$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0$.

Οι ρυθμοί εξόδου (εξυπηρέτησης + αποχώρησης) είναι

$\mu_0 = \mu = 1$

$\mu_1 = \mu + 1 = 2$ (αποχώρηση με ρυθμό 1)

$\mu_2 = \mu + 1 + 2 = 4$ (" " " $1+2=3$)

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left, "4"] & 1 \arrow[l, bend left, "1"] \arrow[r, bend left, "2"] & 2 \arrow[l, bend left, "2"] \arrow[r, bend left, "1"] & 3 \arrow[l, bend left, "4"] \end{tikzcd}$$

(b)
$$\left.\begin{aligned} 4\pi_0 = \pi_1 &\Rightarrow \quad \pi_1 = 4\pi_0 \\ 2\pi_1 = 2\pi_2 &\Rightarrow \quad \pi_2 = \pi_1 = 4\pi_0 \\ \pi_2 = 4\pi_3 &\Rightarrow \quad \pi_3 = \frac{1}{4}\pi_2 = \pi_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} \pi_0 &= \frac{1}{10} \\ \pi_1 = \pi_2 &= \frac{4}{10} \\ \pi_3 &= \frac{1}{10} \end{aligned}$$

(c) Το ποσοστό πελατών πού χάνονται επειδή
δε μπαίνουν στην ουρά είναι ίσο με

$$\pi_{balk} = 0\cdot\pi_0 + \frac{1}{2}\cdot\pi_1 + \frac{3}{4}\cdot\pi_2 + 1\cdot\pi_3$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{10} + \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{10} + \frac{1}{10} = \frac{6}{10} = 60\%.$$

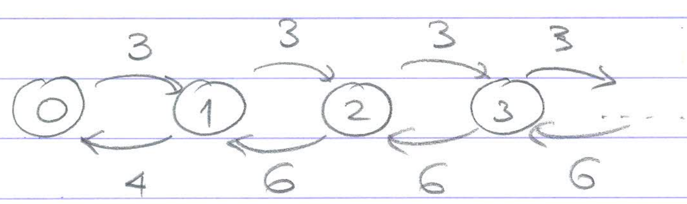
(d) $L = \pi_1 + 2\pi_2 + 3\pi_3 = \frac{15}{10} = 1,5$

$L_q = \pi_2 + 2\pi_3 = \frac{6}{10} = 0,6.$

17.5-10 $\quad \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{3}\,hr \Rightarrow \lambda = 3/hr$

$\mu_1 = 4/hr \quad , \quad \mu_2 = \mu_3 = \dots = 6/hr.$

(a)



(b) $3\pi_0 = 4\pi_1 \Rightarrow \pi_1 = \frac{3}{4}\pi_0$

$3\pi_1 = 6\pi_2 \Rightarrow \pi_2 = \frac{1}{2}\pi_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\pi_0$

$3\pi_2 = 6\pi_3 \Rightarrow \pi_3 = \frac{1}{2}\pi_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{3}{4}\pi_0$

$\vdots$

$\pi_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{3}{4}\pi_0 \qquad n = 2, 3, \dots$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\pi_0 = \pi_0 + \pi_1 + \sum_{n=2}^{\infty}\pi_n = \pi_0 + \frac{3}{4}\pi_0 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\pi_0 =$$

$$= \left[1+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k\right]\pi_0 = \left[1+\frac{3}{4}+\frac{1/2}{1-1/2}\right]\pi_0 =$$

$$= \frac{11}{4}\pi_0 = 1 \Rightarrow \quad \pi_0 = \frac{4}{11}$$

$$\pi_1 = \frac{3}{11}$$

$$\pi_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{3}{11} \qquad n = 2,3,\dots$$

c) $L = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n = \pi_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n\pi_n = \pi_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\pi_1 =$

Το άθροισμα γράφεται:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\cdot 2 = 2\sum_{n=2}^{\infty} n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

Έχουμε δείξει ότι $\sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$ επομένως για $\rho = 1/2$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}}{(1-1/2)^2} = 2 \Rightarrow 0 + 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \sum_{n=2}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L = \pi_1 + 3\pi_1 = 4\pi_1 = \frac{12}{11}$$

$$\bar{\lambda} = \lambda \Rightarrow \quad W = \frac{L}{\lambda} = \frac{12}{11}\cdot\frac{1}{3} = \frac{4}{11}$$

$$L_q = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\pi_n = \sum_{k=0}^{\infty} k\pi_{k+1} = \pi_2 + 2\pi_3 + 3\pi_4 + \dots =$$

$$= \frac{3}{11}\cdot\left[1\cdot\left(\frac{1}{2}\right) + 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots\right] =$$

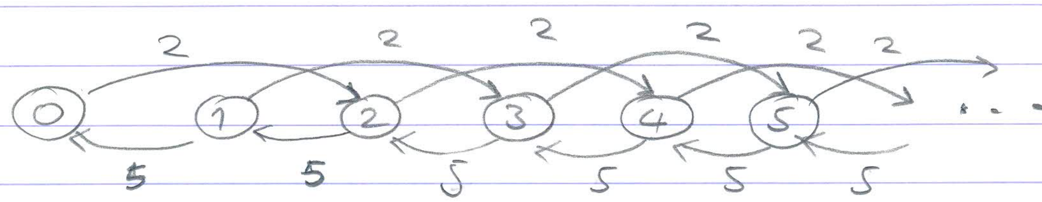
$$= \frac{3}{11} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{3}{11} \cdot 2 = \frac{6}{11}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{2}{11}$$

(Προσέξτε ότι εδώ δεν ισχύει $W = W_q + \frac{1}{\mu}$ γιατί ο ρυθμός εξυπηρέτησης αλλάζει με την κατάσταση).

17.5-13

ⓐ



ⓑ Γράφουμε τις εξισώσεις ολικής ισορροπίας ανά κατάσταση:

$2\pi_0 = 5\pi_1$

$3\pi_1 = 5\pi_2$

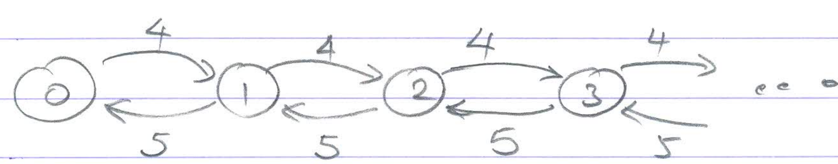
$3\pi_2 = 2\pi_0 + 5\pi_3$

$3\pi_3 = 2\pi_1 + 5\pi_4$

$\vdots$

$3\pi_n = 2\pi_{n-2} + 5\pi_{n+1} \quad n = 2, 3, \ldots$

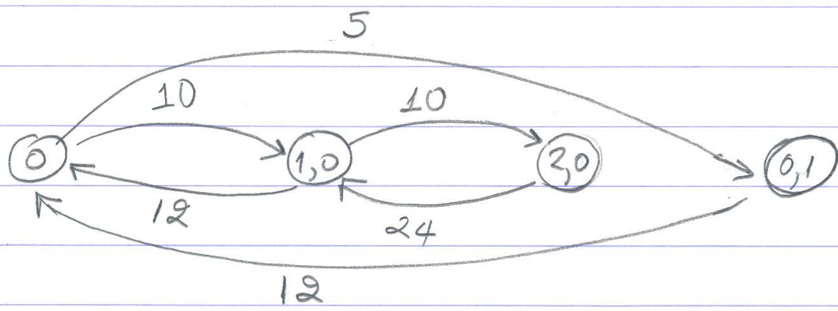
ⓒ



17.5-16 Ορίζουμε ως κατάσταση του συστήματος

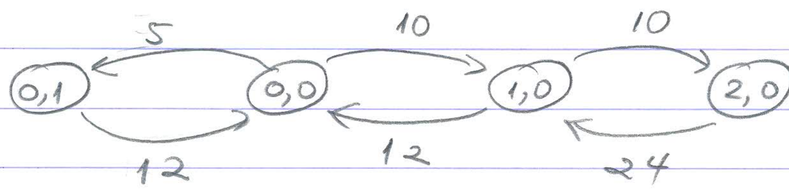
$$X(t) = \begin{cases} (0,0) & \text{άδειο σύστημα} \\ (1,0) & \text{υπάρχει ένας πελάτης κατηγορίας } 1 \\ (2,0) & \text{'' δύο '' '' } 1 \\ (0,1) & \text{'' ένας '' '' } 2 \end{cases}$$

(a)



(b)

Το διάγραμμα μπορεί να γραφτεί σε μορφή ισοδύναμη μιας διαδικασίας γεννήσεων-θανάτων:



(c) $12\pi_{01} = 5\pi_{00} \Rightarrow \pi_{01} = \frac{5}{12}\pi_{00}$

$10\pi_{00} = 12\pi_{10} \Rightarrow \pi_{10} = \frac{10}{12}\pi_{00}$

$10\pi_{10} = 24\pi_{20} \Rightarrow \pi_{20} = \frac{10}{24}\cdot\pi_{10} = \frac{10}{24}\cdot\frac{10}{12}\pi_{00}$

Λύνοντας βρίσκουμε $\pi_{00} = \frac{72}{187}$, $\pi_{01} = \frac{30}{187}$, $\pi_{10} = \frac{60}{187}$, $\pi_{20} = \frac{25}{187}$

(d) Οι πελάτες κλάσης 1 χάνονται στην κατάσταση (0,1)

επομένως το ποσοστό χαμένων είναι $\pi_{01} = \frac{30}{187} = 16\%$

Οι πελάτες κλάσης 2 χάνονται στις καταστάσεις (1,0), (2,0), (0,1)
επομένως το ποσοστό χαμένων είναι

$$\pi_{01} + \pi_{10} + \pi_{20} = 1 - \pi_{00} = \frac{115}{187} = 61,5\%.$$

17.6-2 $\quad M/M/1 \quad \lambda = 10 \quad \mu = 15 \quad \rho = \frac{2}{3}$

$$\pi_0 = 1-\rho = \frac{1}{3}$$

$$\pi_1 = (1-\rho)\rho = \frac{2}{9}$$

Η ουρά είναι άδεια στις καταστάσεις 0, 1 επομένως
το αντίστοιχο ποσοστό χρόνου είναι $\pi_0 + \pi_1 = \frac{5}{9} = 55,5\%$

17.6-5 Έστω K ο αριθμός θέσεων που έχουν προβλεφθεί για αναμονή των εργασιών, μέσα στο εργοστάσιο
Ο συνολικός αριθμός εργασιών στο σύστημα (μαζί με αυτές που περιμένουν στην εξωτερική τοποθεσία) αποτελεί σύστημα $M/M/1$ με $\lambda = 3$, $\mu = 4$, $\rho = 3/4$.

Επομένως $\pi_n = (1-\rho)\rho^n$, $n = 0, 1, \ldots$

Αν έχουν προβλεφθεί K θέσεις μέσα στο εργοστάσιο, η πιθανότητα να μη χρειαστεί να μετακινηθούν εργασίες στην εξωτερική τοποθεσία είναι ίση με $P(X \leq k)$ όπου X ο αριθμός στο σύστημα

Δηλαδή $P(X \leq k) = \pi_0 + \cdots + \pi_k = \sum_{n=0}^{k} (1-\rho)\rho^n =$

$= (1-\rho) \sum_{n=0}^{k} \rho^n = 1 - \rho^{N+1}$

(a) Για $\rho = \frac{3}{4}$ κ' $P(X \leq k) = 0,5 \Rightarrow 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{k+1} = 0,5 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{k+1} = 0,5 \Rightarrow k+1 = \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,75)} = 2,41$

επομένως απαιτούνται τουλάχιστον 3 θέσεις

(β) Για $P(X \leq k) = 0,9 \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{k+1} = 0,1 \Rightarrow k+1 = \frac{\ln(0,1)}{\ln(0,75)} = 8$

επομένως απαιτούνται 8 θέσεις

(γ) Για $P(X \leq k) = 0,99 \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{k+1} = 0,01 \Rightarrow k+1 = \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,75)} = 16$

17.6-10 Ο διάδρομος προσγείωσης αποτελεί ένα σύστημα M/M/1 με $\lambda = 10/hr$, $\mu = 20/hr$ $\rho = 1/2$.

(a) Ο μέσος αριθμός αεροπλάνων που περιμένουν άδεια προσγείωσης είναι ο μέσος αριθμός ατόμων στην ουρά, δηλαδή $L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{10\cancel{0}}{20 \cdot \cancel{10}} = \frac{1}{2} \leq 1$

(i) Ο αριθμός πελατών στο σύστημα ακολουθεί κατανομή

$\pi_n = (1-\rho)\rho^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

(ii) Για να υπάρχουν το πολύ 4 αεροπλάνα που περιμένουν στην ουρά θα πρέπει να υπάρχουν το πολύ 5 αεροπλάνα στο σύστημα δηλαδή

$$P(X \leq 5) = \pi_0 + \cdots + \pi_5 = (1-\rho)\sum_{n=0}^{5}\rho^n = (1-\rho)\cdot\frac{1-\rho^6}{1-\rho} = 1-\rho^6$$
$$= 1-(1/2)^6 = \frac{63}{64} = 0,984 = 98,4\% > 95\%$$

δηλαδή με πιθανότητα 98,4% υπάρχουν το πολύ 4 αεροπλάνα που περιμένουν άδεια.

(ii) Η κατανομή του χρόνου παραμονής στην ουρά W_q είναι $P(W_q > t) = \rho e^{-\mu(1-\rho)t}$, $t \geq 0$

Επομένως η πιθανότητα ένα αεροπλάνο να χρειαστεί να παραμείνει στην ουρά για πάνω από 30 min ($t = 1/2\ hr$) είναι

$$P(W^q > 1/2) = \frac{1}{2} e^{-20 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} e^{-5} = 0{,}0033$$

$$\Rightarrow P(W^q \leq 1/2) = 0{,}9966 = 99{,}66\% \quad > 99\%$$

δηλ. ένα αεροπλάνο με πιθανότητα 99,66% θα περιμένει λιγότερο από 30 λεπτά.

Με βάση τα παραπάνω όλες οι απαιτήσεις ικανοποιούνται.

(β) Αν ο ρυθμός αφίξεων αυξηθεί σε 15 και $\rho = \frac{3}{4}$,

τότε $L_q = \frac{15^2}{20 \cdot 5} = 2{,}25 > 1$

$$P(X \leq 5) = 1 - \rho^6 = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^6 = 82{,}2\% < 95\%$$

$$P(W^q \leq 1/2) = 1 - \frac{3}{4} e^{-20 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}} = 93{,}8\% < 99\%$$

δηλαδή τώρα κανένα από τα κριτήρια δεν ικανοποιείται.

(γ) Αν προστεθεί κ' δεύτερος διάδρομος προσγείωσης το σύστημα γίνεται M/M/2 με $\lambda = 25$, $\mu = 20$, $s = 2$

$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{25}{20} = 1{,}25$, $\rho = \frac{25}{40} = 0{,}625$

Τώρα έχουμε:

$$\Pi_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{(\lambda/\mu)^2}{2} \cdot \frac{1}{1-\rho}} = \frac{1}{1 + 1.25 + \frac{1}{2}(1.25)^2 \frac{1}{0{,}375}}$$

$\pi_0 = 0{,}231$

$$L_q = \frac{\pi_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \rho}{2 \cdot (1-\rho)^2} = \underline{0{,}801 \quad < \quad 1}$$

$P(X \leq 5) = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 =$

$\pi_0 = 0{,}231$

$\pi_1 = \frac{\lambda}{\mu} \pi_0 = 0{,}289$

$\pi_2 = \frac{(\lambda/\mu)^2}{2 \cdot 2^0} \pi_0 = 0{,}180$

$\pi_3 = \frac{(\lambda/\mu)^3}{2 \cdot 2^1} \cdot \pi_0 = 0{,}113$

$\pi_4 = \frac{(\lambda/\mu)^4}{2 \cdot 2^2} \cdot \pi_0 = 0{,}070$

$\pi_5 = \frac{(\lambda/\mu)^5}{2 \cdot 2^3} \pi_0 = 0{,}044$

$\Rightarrow \quad P(X \leq 5) = \underline{0{,}927 < 0{,}95}$

$$P(W^q > t) = \left(1 - P(W^q = 0)\right) e^{-s\mu(1-\rho)t}$$

$P(W^q = 0) = \pi_0 + \pi_1 = 0{,}231 + 0{,}289 = 0{,}52$

$\Rightarrow P(W^q > 1/2) = (1 - 0{,}52)\, e^{-2 \cdot 20 \cdot 0{,}375 \cdot \frac{1}{2}} = 0{,}0003$

$\Rightarrow P(W^q \leq 1/2) = \underline{0{,}9997 > 0{,}99}$

Επομένως σ' αυτή την περίπτωση δεν ικανοποιείται το κριτήριο 2.

17.6-14 Σύστημα $M/M/1$ με $\lambda=20$, $\mu=30$, $\rho=\frac{2}{3}$

Στη στάσιμη κατανομή ο αριθμός αεροπλάνων που περιμένουν απογείωση είναι

$$L_q=\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}=\frac{20^2}{30\cdot 10}=\frac{400}{300}=1,33.$$

Επομένως κατά τη στιγμή της απαγόρευσης περιμένουν κατά μέσο τρόπο 1,33 αεροπλάνα.
Κατά τη διάρκεια του επόμενης μισής ώρας ο αναμενόμενος αριθμός νέων αεροπλάνων που θα φτάσουν για απογείωση είναι $\lambda\cdot\frac{1}{2}=20\cdot\frac{1}{2}=10$

άρα ο συνολικός αριθμός στο τέλος της καταιγίδας θα είναι κατά μέσο όρο 11,33.