17.6-15 $M|M|1 \quad \lambda = 15, \quad \mu = 20, \quad \rho = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$

Έστω N ο αριθμός πελατών στο σύστημα σε στάσιμη κατάσταση. Γνωρίζουμε ότι
$P(N=0) = 1-\rho, \quad P(N>0) = \rho.$

Επομένως ένας πελάτης που φτάνει στο σύστημα θα χρειαστεί να περιμένει με πιθ. $1-\rho$.

Η αναμενόμενη τιμή της βενζίνης που θα πληρώσει είναι $1 \cdot P(N>0) + 1.2\, P(N=0) =$
$= \rho + 1.2(1-\rho) = 1.2 - 0.2\rho = 1.2 - 0.2\frac{3}{4} = 1.05$

17.6-19 Σε ένα σύστημα $M|M|2$ η ουρά είναι άδεια στις καταστάσεις $0, 1, 2$.
Συγκεκριμένα στην κατάσταση 0 ο ρυθμός εξόδου είναι 0, στην κατάσταση 1 είναι μ κ' στην κατάσταση 2, 2μ.
Οι πιθανότητες των καταστάσεων $0,1,2$ είναι

$$\pi_0 = \frac{1}{1+\frac{\lambda}{\mu}+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\frac{1}{1-\frac{\lambda}{2\mu}}} = \frac{1}{1+\frac{4}{3}+\frac{16}{9}\frac{1}{1-\frac{4}{6}}} =$$

$$= \frac{1}{1+\frac{4}{3}+\frac{16}{9}\cdot 3} = \frac{3}{23}$$

$$\pi_1 = \pi_0 \cdot \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{23}\cdot\frac{4}{3} = \frac{4}{23}$$

$$\pi_2 = \pi_0 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{23}\cdot\frac{16}{9}\cdot\frac{1}{2} = \frac{8}{69}$$

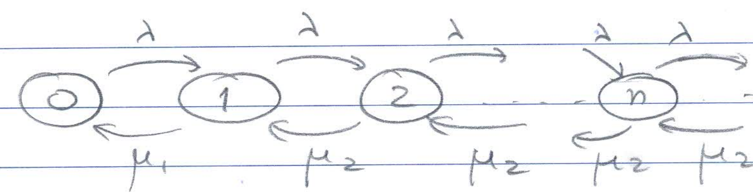
Το ποσοστό του χρόνου που το σύστημα βρίσκεται στις καταστάσεις 0,1,2 είναι $\pi_0+\pi_1+\pi_2$.

Δεδομένου ότι δεν υπάρχει ουρά, δηλ. ότι βρίσκεται σε μια από τις 0, 1, 2, η πιθ. να βρίσκεται στη 0 είναι $\frac{\pi_0}{\pi_0+\pi_1+\pi_2}$, στην 1: $\frac{\pi_1}{\pi_0+\pi_1+\pi_2}$ κ' στη 2: $\frac{\pi_2}{\pi_0+\pi_1+\pi_2}$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω ο μέσος ρυθμός εξόδου δεδομένου ότι δεν υπάρχουν πελάτες στην ουρά είναι ίσος με $0\cdot\frac{\pi_0}{\pi_0+\pi_1+\pi_2}+\mu_1\frac{\pi_1}{\pi_0+\pi_1+\pi_2}+\frac{2\mu}{\pi_0+\pi_1+\pi_2}$

17.6-24

(a)



(b)

$\pi_0\lambda=\pi_1\mu_1$

$\pi_1\lambda=\pi_2\mu_2$

$\pi_2\lambda=\pi_3\mu_2$

$\vdots$

$\pi_n\lambda=\pi_{n+1}\mu_2$

$\vdots$

(c) Πρώτα θα λύσουμε τις εξισώσεις αναλυτικά

Έστω $\rho = \lambda/\mu_2$

$\rho_1 = \lambda/\mu_1$

$\pi_1 = \pi_0 \cdot \frac{\lambda}{\mu_1}$

$\pi_2 = \pi_1 \cdot \rho$

$\pi_3 = \pi_2 \rho = \pi_1 \rho^2$

$\vdots$

$\pi_n = \pi_1 \cdot \rho^{n-1}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = \pi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \pi_1 \rho^{n-1} = \pi_0 + \pi_1 \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{n-1} =$$

$$= \pi_0 + \pi_1 \frac{1}{1-\rho} = \pi_0 + \pi_0 \cdot \frac{\lambda}{\mu_1} \cdot \frac{1}{1-\rho} =$$

$$= \pi_0 \cdot \left[1 + \frac{\rho_1}{1-\rho} \right] = 1 \Rightarrow \pi_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho+\rho_1}$$

$$\pi_1 = \rho_1 \cdot \frac{1-\rho}{1-\rho+\rho_1}, \quad \pi_n = \frac{\rho_1(1-\rho)}{1-\rho+\rho_1} \rho^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Αν δε μπορούσαμε να λύσουμε τις εξισώσεις αναλυτικά (πράγμα που όντως είναι αδύνατο σε πολλά προβλήματα) θα μπορούσαμε προσεγγιστικά να υποθέσουμε ότι από κάποιο n_0 και πάνω ισχύει $\pi_n \approx 0$, οπότε έχουμε ένα γραμμικό σύστημα με πεπερασμένο αριθμό εξισώσεων και αγνώστων.

(d) $L = \sum_{n=0}^{\infty} n \pi_n$, $L_q = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) \pi_n$, $W = \frac{L}{\lambda}$, $W_q = \frac{L_q}{\lambda}$

17.6-28

Το σύστημα είναι $M|M|2|3$ με $\lambda = 15$, $\mu = 15$.

$$\rho = \frac{\lambda}{2\mu} = \frac{1}{2}\,, \qquad r = \frac{\lambda}{\mu} = 1$$

(a)

Από τους τύπους της στάσιμης κατανομής για το σύστημα $M|M|s|K$ παίρνουμε:

$$\pi_0 = \left(1 + r + \frac{r^2}{2} + \frac{r^2}{2}\cdot\rho\right)^{-1} = \frac{1}{2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{4}{11}$$

$$\pi_1 = r\cdot\pi_0 = \frac{4}{11}\,, \qquad \pi_2 = \frac{r^2}{2}\pi_0 = \frac{2}{11}\,, \qquad \pi_3 = \frac{r^3}{2!\,2}\pi_0 = \frac{1}{11}$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 1 \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 2 \arrow[l, bend left, "2\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & 3 \arrow[l, bend left, "2\mu"]
\end{tikzcd}$$

(b) (i) $\pi_0 + \pi_1 = \frac{8}{11}$

(ii) $\pi_2 = \frac{2}{11}$

(iii) $\pi_3 = \frac{1}{11}$

17.7-4

$$L_q = \frac{\lambda^2 \sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} , \quad L = \rho + L_q$$

$\lambda = 30/hr$

(a) Αν $S \sim \mathcal{E}xp(\mu)$ με $\frac{1}{\mu} = 75 sec = \frac{75}{3600} hr \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mu = \frac{3600}{75} = 48$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0{,}625 , \quad \sigma^2 = \left(\frac{1}{\mu}\right)^2 = \left(\frac{75}{3600}\right)^2 = \left(\frac{1}{48}\right)^2$$

$$\Rightarrow L_q = \frac{30^2 \cdot \left(\frac{1}{48}\right)^2 + \left(\frac{30}{48}\right)^2}{2\left(1 - \frac{30}{48}\right)} = \frac{\frac{30^2}{48^2}}{\frac{18}{48}} = 1{,}042$$

$$L = L_q + \rho = 1{,}042 + 0{,}625 = 1{,}67$$

$$W = \frac{L}{\lambda} = 0{,}056 \ hr = 3{,}33 \ min$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = 0{,}035 \ hr = 2{,}09 \ min.$$

(b) Αν $S = 75 \ sec \Rightarrow \mu = 48 , \quad \sigma^2 = 0$

τότε $L_q = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{\frac{30^2}{48^2}}{2 \cdot \frac{18}{48}} = 0{,}521$

$$L = L_q + \rho = 1{,}146$$

$$W = \frac{L}{\lambda} = 0{,}038 \ hr = 2{,}29 \ min$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = 0{,}017 \ hr = 1{,}04 \ min$$

(c) $\dfrac{L_q^{(b)}}{L_q^{(a)}} = \dfrac{0,521}{1,042} = \dfrac{1}{2}$ δηλ. ο αναμ. αριθμός ατόμων στην ουρά έπεσε στο μισό όταν μηδενίστηκε η διασπορά του S.

(d) Αν υποθέσουμε ότι ο χρόνος S παραμένει εκθετική τυχαία μεταβλητή με διαφορετική τιμή του μ, τότε τόσο το $E(S)$ όσο κ' το $Var(S) = \sigma^2$ εξαρτώνται από το μ, συγκεκριμένα αν $E(S) = \theta$, τότε $\sigma^2 = \theta^2$. και $\rho = \lambda E(S) = \lambda\theta$.

Σ' αυτή την περίπτωση το L_q ως συνάρτηση του θ είναι:

$$L_q(\theta) = \frac{\lambda^2\theta^2 + \lambda^2\theta^2}{2(1-\lambda\theta)} = \frac{\lambda^2\theta^2}{1-\lambda\theta}$$

Για $\theta = \theta_0 = 75$ sec βρήκαμε $L_q = L_{q0} = 1,042$
Για να πετύχουμε $L_q = \frac{1}{2} L_{q0}$ όπως στο b, αλλά τώρα με εκθετική κατανομή του S, θα πρέπει

$$\frac{\lambda^2\theta^2}{1-\lambda\theta} = \frac{1}{2}\,\frac{\lambda^2\theta_0^2}{1-\lambda\theta_0} = \frac{1}{2}L_{q0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\lambda^2\theta^2 = L_{q_0}(1-\lambda\theta) = 2\lambda^2\theta^2 + \lambda L_{q0}\theta - L_{q0} = 0$$

Λύνοντας ως προς θ βρίσκουμε

$$\theta = \frac{-\lambda L_{q0} \pm \sqrt{\lambda^2 L_{q0}^2 + 8\lambda^2 L_{q0}}}{4\lambda^2} =$$

$$= \frac{-\lambda L_{q0} \pm \lambda \sqrt{L_{q0}^2 + 8L_{q0}}}{4\lambda^2}$$

Η αρνητική ρίζα απορρίπτεται και παίρνουμε:

$$\theta = \frac{-L_{q0} + \sqrt{L_{q0}^2 + 8L_{q0}}}{4\lambda}$$

Για $\lambda = 30$, $L_{q0} = 1{,}042$ προκύπτει $\theta = 0{,}017$ hrs

$= 1{,}01$ min $= 60{,}8$ sec.

Αυτό σημαίνει ότι για να επιτευχθεί η μείωση του L_q στο επίπεδο που αντιστοιχεί στην αυτόματη μηχανή, ο μέσος χρόνος παρασκευής του καφέ με το χέρι θα πρέπει να μειωθεί από 75 σε 60,8 sec.

17.7-6 Κάτω από την υπάρχουσα πολιτική το σύστημα είναι M/M/1 με $\lambda = 1/\text{day}$, $\mu = 2/\text{day}$, $\rho = 1/2$

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} = 1, \quad W = \frac{L}{\lambda} = 1,$$ δηλαδή

κατά μέσο όρο βρίσκεται ένα αεροπλάνο για συντήρηση στο σταθμό, ενώ ο μέσος χρόνος παραμονής εκτός πτήσης ενός αεροπλάνου που έρχεται για συντήρηση είναι 1 μέρα.

Αν υιοθετηθεί η προτεινόμενη πολιτική το σύστημα θα είναι M/G/1, με $\lambda_1 = 1/4$ και service time $S = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 \sim \text{Gamma}(4, \mu)$

δηλαδή $E(S) = \frac{4}{\mu} = 2$, $\sigma_1^2 = \frac{4}{\mu^2} = 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu_1} = 2 \Rightarrow \mu_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$$

$$L_q = \frac{\lambda_1^2 \sigma_1^2 + \rho_1^2}{2(1-\rho_1)} = \frac{\frac{1}{16} \cdot 1 + \frac{1}{4}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{5}{16}$$

$$L_1 = L_q + \rho_1 = \frac{5}{16} + \frac{1}{2} = \frac{13}{16}, \quad W_1 = \frac{L_1}{\lambda_1} = \frac{\frac{13}{16}}{\frac{1}{4}} = \frac{52}{16}$$

$$= \frac{13}{4}$$

a,b

	M/M/1	M/G/1
L	1	5/16
W	1	13/4

(c) Η σύγκριση είναι πιο σωστό να γίνει ως προς το L, γιατί αυτό το κριτήριο παίρνει υπόψη και πόσο συχνά έρχονται αεροπλάνα για επισκευή και πόσο παραμένουν εκτός πτήσης, ενώ το κριτήριο του W θα παίρνει υπόψη ότι ένα αεροπλάνο μπορεί μεν να καθυστερεί περισσότερο αλλά έρχεται λιγότερο συχνά για επισκευή.

17.7-12

Σύστημα $M/G/1$, $\lambda = 1/hr$

$$S \sim \begin{cases} Exp(2) & \text{με πιθ } 0.9 \\ Exp(1/5) & \text{" " } 0.1 \end{cases}$$

Για $T \sim Exp(\mu)$ γνωρίζουμε ότι $E(T) = 1/\mu$, $E(T^2) = \frac{2}{\mu^2}$, $Var(T) = \frac{1}{\mu^2}$

$$E(S) = \frac{1}{2} \cdot 0{,}9 + 5 \cdot 0{,}1 = 0{,}95 \text{ days}$$

$$E(S^2) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 0{,}9 + 2 \cdot 5^2\, 0{,}1 = 5{,}45$$

$$Var(S) = \sigma^2 = E(S^2) - [E(S)]^2 = 5{,}45 = 4{,}55$$

$$\mu = \frac{1}{E(S)} = \frac{1}{0{,}95} \Rightarrow \rho = \frac{\lambda}{\mu} = 1 \cdot 0{,}95 = 0{,}95$$

$$L_q = \frac{\lambda^2 \sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} = 54{,}53$$

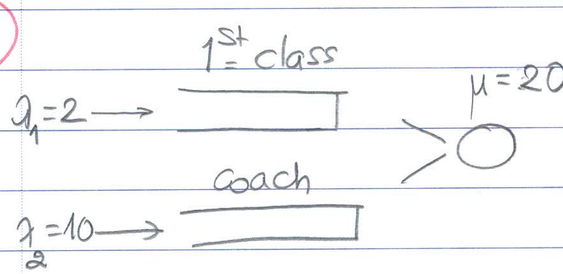
$$L = L_q + \rho = 55{,}48$$

$$W = \frac{L}{\lambda} = 55{,}48 \qquad W_q = \frac{L_q}{\lambda} = 54{,}53$$

$$\Pi_0 = 1 - \rho = 0{,}05$$

©NEXT Co GREECE

17.8-1



non-preemptive priority

$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 10$, $\mu = 20$, $s=1$

(b) $$A = \frac{\mu-\lambda}{r}\cdot 1 + \mu = \frac{\mu-\lambda}{\frac{\lambda}{\mu}} + \mu = \mu\,\frac{\mu-\lambda}{\lambda} + \mu = \frac{\mu^2}{\lambda}$$

$$B_0 = 1,\quad B_1 = 1-\frac{\lambda_1}{\mu},\quad B_2 = 1-\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\mu},$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές $\lambda_1, \lambda_2, \mu$ βρίσκουμε:

$\lambda_1+\lambda_2 = 12 < \mu = 20 \Rightarrow$ ευστάθεια

$$A = \frac{20^2}{12} = 33{,}33,\quad B_0=1,\quad B_1=0{,}9,\quad B_2=0{,}4$$

άρα, $$W_1 = \frac{1}{AB_0B_1} + \frac{1}{\mu} = 0{,}083\text{ hr} = 5 \text{ min}$$

$$W_2 = \frac{1}{AB_1B_2} + \frac{1}{\mu} = 0{,}133\text{ hr} = 8 \text{ min.}$$

$$W_1^q = W_1 - \frac{1}{\mu} = 2\text{ min},\qquad W_2^q = W_2 - \frac{1}{\mu} = 5\text{ min}$$

$$L_1 = \lambda_1 W_1 = 2\cdot 0{,}083 = 0{,}166,\qquad L_{q1} = \lambda_1 W_1^q = 0{,}067$$

$$L_2 = \lambda_2 W_2 = 10\cdot 0{,}133 = 1{,}33,\qquad L_{q2} = \lambda_2 W_2^q = 0{,}833$$

(c) $\frac{W_{q1}}{W_{q2}} = \frac{2}{5} = 40\%$.

(d) Συνολικός ρυθμός εισόδου $= \lambda = 12$

$\mu = 20$

$\Rightarrow \rho = \frac{12}{20} = \frac{6}{10}, \quad \Rightarrow \pi_0 = 1-\rho = 0{,}4$

δηλ. ο server είναι idle στο 40% του χρόνου

Επομένως σε 12 εργάσιμες ώρες το γκισέ θα είναι άεργο κατά μέσο όρο τις $0{,}4 \cdot 12 = 4{,}8$ ώρες και απασχολημένο τις 7,2 ώρες

17.9-4 (a) Λύνουμε πρώτα τις εξισώσεις για τα λ_j:

$\lambda_1 = a_1 + p_{11}\lambda_1 + p_{21}\lambda_2 + p_{31}\lambda_3 \Rightarrow \lambda_1 = 10 + 0.3\lambda_2 + 0.4\lambda_3$

$\lambda_2 = 15 + 0.5\lambda_1 + 0.5\lambda_3$

$\lambda_3 = 3 + 0.3\lambda_1 + 0.2\lambda_2$

Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε: $\lambda_1 = 30, \lambda_2 = 40, \lambda_3 = 20$

(b) System 1: M|M|1 $\lambda_1 = 30, \mu_1 = 40, \rho_1 = \frac{3}{4}$

$\pi_n^1 = (1-\rho_1)\rho_1^n = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

System 2 M|M|1, $\lambda_2 = 40, \mu_2 = 50, \rho_2 = \frac{4}{5}$

$$\pi^2_n = \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

System 3 $\quad M/M/1, \quad \lambda_3 = 20, \quad \mu_3 = 30, \quad \rho_3 = \frac{2}{3}$

$$\pi^3_n = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(c) $P(N_1 = 0, N_2 = 0, N_3 = 0) = \pi^1_0 \, \pi^2_0 \, \pi^3_0 =$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{60} = 1{,}67\,\%$$

(d) $L_1 = \frac{\rho_1}{1-\rho_1} = 3, \quad L_2 = \frac{\rho_2}{1-\rho_2} = 4, \quad L_3 = \frac{\rho_3}{1-\rho_3} = 2$

$$L = L_1 + L_2 + L_3 = 9$$

$$W = \frac{L}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} = \frac{9}{8} = 1{,}125$$