ΑΝΔΡΙΟΠΟΥΛΟΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ Α.Μ: 1112200800008

(1.3) Αν στο Παράδειγμα 1.7 η διαμέριση $\mathcal{E}$ του X έχει υπεραριθμήσιμο πλήθος στοιχείων (δηλαδή το I είναι υπεραριθμήσιμο άρα το X υπεραριθμήσιμο) να δοθεί περιγραφή της σ-άλγεβρας $\sigma(\mathcal{E})$

<u>Λύση</u>: Έστω X σύνολο και $\mathcal{E}=\{A_i : i\in I\}$ διαμέριση του X (δηλαδή $A_i\neq\emptyset$, $\forall i\in I$, $A_i\cap A_j=\emptyset$, $\forall i\neq j$ και επιπλέον $\bigcup_{i\in I}A_i = X$), με I υπεραριθμήσιμο (άρα και X υπεραριθμήσιμο)

<u>Ισχυρισμός</u>:

$$\sigma(\mathcal{E}) = \overbrace{\left\{ \bigcup_{i\in J} A_i : J \text{ αριθμήσιμο ή } I\setminus J \text{ αριθμήσιμο} \subseteq I \right\}}^{\mathcal{A}}$$

Έστω $\mathcal{A}$ το σύνολο στο δεξί μέλος της παραπάνω σχέσης. Τότε έχουμε τα εξής:

• Η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα. Πράγματι, για $J=\emptyset$ (αριθμήσιμο σύνολο) παίρνουμε $\bigcup_{i\in\emptyset}A_i=\emptyset$ και για $J=I$ (έχει $I\setminus J = I\setminus I=\emptyset$ αριθμήσιμο συμπλήρωμα) παίρνουμε $\bigcup_{i\in I}A_i = X$. Επομένως $\emptyset, X\in\mathcal{A}$

Επίσης έστω $A\in\mathcal{A}$ δηλαδή $A=\bigcup_{i\in J}A_i$ για κάποιο $J\subseteq I$ αριθμήσιμο ή με αριθμήσιμο συμπλήρωμα

1) Αν το J είναι αριθμήσιμο τότε $X\setminus A=\bigcup_{i\in I\setminus J}A_i$ που είναι στοιχείο του $\mathcal{A}$ αφού το $I\setminus J$ έχει αριθμήσιμο συμπλήρωμα το J

2) Αν τώρα το J δεν είναι αριθμήσιμο θα έχει το $I\setminus J$ αριθμήσιμο άρα το $X\setminus A = \bigcup_{i\in I\setminus J} A_i\in\mathcal{A}$

Τέλος αν έχουμε $(B_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$ με $B_n=\bigcup_{i\in J_n}A_i$ όπου $J_n\subseteq I$ αριθμήσιμο ή με αριθμήσιμο συμπλήρωμα για κάθε $n\geq 1$. Θέτουμε τότε $J=\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ και έτσι θα είναι $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{i\in J}A_i$

διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1) Αν $J_n \subseteq I$ αριθμήσιμο για κάθε $n \geq 1$ τότε και το $J \subseteq I$ αριθμήσιμο (ως αριθμήσιμη ένωση αριθμησίμων) οπότε
$\bigcup_{i\in J} A_i \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}$

2) Έστω ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ($n_0 \geq 1$) ώστε το $J_{n_0} \subseteq I$ να μην είναι αριθμήσιμο άρα το $I \setminus J_{n_0} \subseteq I$ αριθμήσιμο τότε $I \setminus J \subseteq I \setminus J_{n_0}$ άρα και το $I \setminus J \subseteq I$ αριθμήσιμο (ως υποσύνολο αριθμησίμου)

Άρα $\bigcup_{i\in I\setminus J} A_i \in \mathcal{A} \Rightarrow X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα

• Η $\mathcal{A}$ περιέχει την $\mathcal{C}$. Επιλέγουμε $J = \{i_0\} \subset I$ πεπερασμένο αριθμήσιμο άρα $\bigcup_{i\in J} A_i = \bigcup_{i\in\{i_0\}} A_i = A_{i_0} \in \mathcal{A}$ άρα $A_{i_0} \in \mathcal{A}$, $\forall i_0 \in I$

που είναι μια περιγραφή των στοιχείων της $\mathcal{C}$. Άρα $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{C}$

• Δείξαμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα που περιέχει την $\mathcal{C}$. Αρκεί να δείξουμε ότι είναι η μικρότερη με αυτή την ιδιότητα. Έστω $\mathcal{A}_1$ σ-άλγεβρα που περιέχει την $\mathcal{C}$. Άρα περιέχει όλα τα A_i, $i \in I$. Τώρα το I ως άπειρο σύνολο θα περιέχει αριθμήσιμο υποσύνολο δεικτών έστω $J \subseteq I$. Άρα $\bigcup_{i\in J} A_i \in \mathcal{A}_1$

και επίσης $X \setminus \bigcup_{i\in J} A_i \in \mathcal{A}_1 \Rightarrow \bigcup_{i\in I\setminus J} \in \mathcal{A}_1$. Άρα σε κάθε

περίπτωση η $\mathcal{A}_1$ περιέχει τα $\bigcup_{i\in J} A_i$, $J \subseteq I$ αριθμήσιμο ή $I \setminus J \subseteq I$ αριθμήσιμο. Άρα $\mathcal{A}_1 \supseteq \mathcal{A}$

Άρα η $\mathcal{A}$ είναι η ~~μικρό~~τερη σ-άλγεβρα που περιέχει το $\mathcal{C}$ άρα $\boxed{\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}}$

~~Άσκηση 1.5.~~

~~Έστω ότι $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(C)$ με C διαμέριση. $= \{A_i \mid i \in I\}$~~

~~Αν $A_{i_0} \in C$ και $a \neq b$ με $a, b \in A_{i_0}$ τότε αφού $\{a\}, \{b\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(C)$ θα πρέπει $\{a\} = \bigcup_{i \in J} A_i$, για~~

ζάλληλο ~~$J \subseteq I$ (δείκτες), οπότε $\exists j_0 \in J$ τώστε $\{a\} = A_{j_0} \Rightarrow A_{j_0} \subsetneq A_{i_0}$, άτοπο.~~

Άσκηση 1.5.

Έστω $C = \{A_i \mid i \in I\}$, ξένα ανά δύο σύνολα τέτοια ώστε $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(C)$.

Αρχικά θα δείξουμε ότι $\forall i \in I$, A_i μονοσύνολο.

Πράγματι έστω τυχαίο $i \in I$ και $a \in A_i$. Θ.δ.ο $A_i = \{a\}$.

Είναι $a \in \mathbb{R}$ ~~$\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$~~ $\Rightarrow \{a\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(C) \Rightarrow \exists J \subseteq I$ τέτοιο ώστε $a = \bigcup_{j \in J} A_j \overset{\oplus}{\Rightarrow} \exists j_0 \in J$ με $a \in A_{j_0}$

και $a = \bigcup_{j \in J} A_j \supseteq A_{j_0}$, οπότε $A_{j_0} = \{a\}$

$\xRightarrow{C \text{ διαμέριση}} j_0 = i$, και $A_i = \{a\}$, όπως θέλαμε.

Συνεπώς κάθε A_i είναι μονοσύνολο.

Όμως από την προηγούμενη άσκηση το $\sigma(C)$ είναι ακριβώς οι αριθμήσιμες ενώσεις μονοσυνόλων ή τα συμπληρώματά τους.

Όμως το $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ περιέχει για παράδειγμα το $(0,1)$ που δεν είναι ούτε αριθμήσιμο ούτε συμπλήρωμα αριθμησίμου.

Συνεπώς έχουμε την ζητούμενη αντίφαση.

<u>Άσκηση 2.9.</u>

(a) $\Rightarrow$ (b).

Έστω $\varepsilon > 0$.

Τότε αν $\omega \in \limsup_n A_n^{\varepsilon}$ τότε $\exists\, k_n \uparrow \mathbb{N}$ με $|X_{k_n}(\omega)| \geq \varepsilon$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow X_n(\omega) \not\to 0$.

Οπότε $\limsup_n A_n^{\varepsilon} \subseteq \Omega \setminus \{\lim X_n = 0\}$

$$\Rightarrow P(\limsup_n A_n^{\varepsilon}) \leq P(\Omega \setminus \{\lim X_n = 0\}) = 1 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{P(\limsup_n A_n^{\varepsilon}) = 0.}$$

(b) $\Rightarrow$ (a)

Για $A_k = \limsup_n A_n^{1/k}$ $\forall k \in \mathbb{N}$ έχουμε $P(A_k) = 0$

~~και $A_k \subset A_{k+1}$, $\forall k \in \mathbb{N}$~~ ~~$\omega \in A_k$ τ.ω.~~
~~Το τελευταίο γιατί αν για άπειρα $n \in \mathbb{N}$ $|X_n(\omega)| \geq 1/k$~~
~~τότε αφού $1/k > \frac{1}{k+1}$, $|X_n(\omega)| > \frac{1}{k+1} \Rightarrow \omega \in A_{k+1}$.~~

Οπότε $P(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k) \leq \sum_k^{\infty} P(A_k) = 0$, και άρα

$$P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = 0. \Rightarrow P(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k^c) = 1.$$

~~Συνεπώς~~ Όμως αν $\omega \in \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k^c$ τότε $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists$ πεπερασμένα $n \in \mathbb{N}$ με $|X_n(\omega)| \geq 1/k$. Οπότε αν $\varepsilon > 0$ αφού $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ με $1/k_0 < \varepsilon$, θα υπάρχει λόγω $\omega \in A_{k_0}^c$, ένα n_0 τ.ω.

$\forall n \geq n_0, \ |X_n(\omega)| \leq 1/k_0 < \varepsilon$, και άρα $X_n(\omega) \to 0$

Συνεπώς $\bigcap_{n\geq 1}^{\infty} A_k^c \subset \{X_n \to 0\} \Rightarrow P(\{X_n \to 0\}) = 1$, όπως θέλαμε.

2.13: Έστω $A_n = \{|X| > n\}$, $n \geq 1$. Η ακολουθία $(A_n)_{n\geq 1}$ είναι φθίνουσα με τομή το $\emptyset$. Άρα $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} P(|X|>n) = 0$.

Άσκηση 3.6.

Έστω $A_n = \{ \omega / n|X_n(\omega)| = +\infty \}$, $n \in \mathbb{N}$.

Τότε $P(A_n) = P(\{|X_n| = +\infty\}) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Συνεπώς $\exists m_n \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε, $P(\{n|X_n(\omega)| > m_n\}) \leq 1/n^2$.

Αυτό γιατί αν $T_{m,n} = \{n|X_n| > m\}$, τότε ~~$T_{m,n} \uparrow_{m\to+\infty} A_n$~~ και $T_{m,n} \downarrow A_n$

άρα $\lim_m P(T_{m,n}) = P(A_n) = 0$.

Συνεπώς $\forall n \in \mathbb{N}$, έχουμε $m_n \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε,

$P(\{n|X_n| > m_n\}) \leq 1/n^2$.

Αυτό όμως δίνει και ότι $\sum_n P(\underbrace{\{|X_n|/m_n > 1/n\}}_{S_n}) \leq \sum 1/n^2 < +\infty$

και άρα από Borel - Cantelli, $P(\limsup S_n) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow P((\limsup S_n)^c) = 1$.

Έστω τώρα $\omega \in (\limsup S_n)^c$. Τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για $n > n_0$, $\left|\frac{X_n(\omega)}{m_n}\right| \leq 1/n$ και άρα $\frac{|X_n(\omega)|}{m_n} \to 0$.

Συνεπώς $(\limsup S_n)^c \subseteq \{ \frac{X_n}{m_n} \to 0 \}$ και άρα για $c_n = m_n$, έχουμε το ζητούμενο.

Άσκηση 3.9.

Αρχικά παρατηρούμε ότι $\forall \omega \in \Omega$, $M_n(\omega) \leq M_{n+1}(\omega)$, άμεσα από τον ορισμό. Οπότε $\lim M_n = 1 \Leftrightarrow \overline{\lim} M_n = 1$

Συνεπώς μας αρκεί να δείξουμε ότι $\underline{\lim} M_n = 1$, με πιθανότητα 1.

Έστω $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$ και $X_{n,m} = \{ M_n \leq 1 - 1/m \}$.

Τότε $P(X_{n,m}) = (P(X_1 \leq 1 - 1/m))^n = (1/m)^n$ $1 - \frac{1}{m}$

$\Rightarrow \sum_n P(X_{n,m}) = \sum_n (1/m)^n < +\infty$

$\Rightarrow P(\limsup_n X_{n,m}) = 0.$

Θεωρώ τώρα το $S = \Omega \setminus \left(\bigcup_m (\limsup X_{n,m}) \right)$.

Τότε ~~το S έχει~~ $P(S) \geq 1 - \sum_m P(\limsup X_{n,m}) = 1 \Rightarrow P(S) = 1$

και αν $\omega \in S$, τότε $\forall m > 1, m \in \mathbb{N}$, τελικά $M_n > 1 - 1/m$

και άρα $\underline{\lim} M_n > 1 - 1/m$.

Στέλνοντας τώρα το m στο άπειρο έπεται ότι $\underline{\lim} M_n \geq 1$

Επειδή όμως $X_n \in (0,1)$ $\forall n$, $M_n \leq 1$ $\forall n$, $\Rightarrow \overline{\lim} M_n \leq 1$.

Από τα παραπάνω έπεται ότι για $\omega \in S$, $\lim M_n = 1$ και αφού $P(S) = 1$, είμαστε ο.κ.

Άσκηση 4.6.

$\forall k$, $1\le k\le n$ έχουμε $E(a_k^2 X_k^2) = E(a_k^2)E(X_k^2)$ γιατί

η a_k είναι F_{k-1}-μετρήσιμη και η X_k ανεξάρτητη

με τις $X_1,\dots,X_{k-1}$ που την παράγουν.

Οπότε $E(a_k^2 X_k^2) = E(a_k^2)E(X_k^2) = E(a_k^2)\cdot V(X_k) = E(a_k^2)$

Τώρα για $i<j$, $1\le i,j\le n$ έχουμε

$E(a_iX_i a_j X_j) = E((a_i a_j X_i)\cdot X_j) = E(a_i a_j X_i)E(X_j) = 0$

γιατί για τον ίδιο λόγο $a_i a_j X_j$, F_{j-1}-μετρήσιμη ενώ

X_j ανεξάρτητη από τις $X_1,\dots,X_{j-1}$ που την

παράγουν.

Οπότε σύμφωνα με τα παραπάνω:

$E((\sum_k a_k X_k)^2) = E(2\sum_{k<m} a_k a_m X_k X_m + \sum_k a_k^2 X_k^2) =$

$= 2\sum_{k<m} E(a_k a_m X_k X_m) + \sum_k E(a_k^2 X_k^2)$

$= 2\cdot 0 + \sum_k E(a_k^2) = \sum_k E(a_k^2)$

5.4. a) $E(X_n|\mathcal{F}_m) \leq X_m$. Άρα για $A \in \mathcal{F}_m$ έχουμε

$$\int_A X_n dP = \int_A E(X_n|\mathcal{F}_m) dP \leq \int_A X_m dP.$$

β) Για $A = \{X_m = 0\} \in \mathcal{F}_m$, από το προηγ. ερώτημα

$$\underset{\substack{\downarrow \\ X_n \geq 0 \\ \forall n}}{0 \leq} \int_A X_{m+i} dP \leq \int_A X_m dP = 0.$$

Άρα $X_{m+i} = 0$ με πιθ. 1 στο A δηλαδή

$P(1_A X_{m+i} > 0) = 0$. Άρα $A \setminus \{X_{m+i} = 0\} \subset \{1_A X_{m+i} > 0\} \Rightarrow$

$P(A \setminus \{X_{m+i} = 0\}) = 0$. Δηλ. $X_{m+i} = 0$ σχεδόν παντού στο A.

γ) Έστω $A_i = A \setminus \{X_{m+i} = 0\}$, $i \geq 1$

Τότε $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = 0$, αφού $P(A_i) = 0$ $\forall i$ από το β)

Όμως $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A \setminus \{X_{m+i} = 0, \forall i \geq 1\}$ άρα $X_{m+i} = 0$ σχεδόν παντού στο A $\forall i$.

5.6 Ασυμμετρικός τυχαίος περίπατος: Έστω $(X_i)_{i\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $P(X_1=1)=p$, $P(X_1=-1)=1-p=:q$, $p\in(0,1)$. Ορίζουμε τις $(S_n)_{n\geq 0}$, $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ όπως στο Παράδειγμα 5.2. Να δειχθεί ότι οι $(W_n)_{n\geq 0}$, $(M_n)_{n\geq 0}$ με $W_n:=S_n-(p-q)n$, $M_n:=\left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}$ είναι martingales ως προς την $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

Λύση: (i) $W_n := S_n-(p-q)n$

• Η $(W_n)_{n\geq 0}$ είναι προσαρμοσμένη στην $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ αφού για κάθε $n\geq 0$ η S_n είναι $\mathcal{F}_n$-μετρήσιμη (όπως είχαμε δεί στον απλό τυχαίο περίπατο)

• $E|W_n| = E|S_n-(p-q)n| \leq E|S_n| + E|(p-q)n| \leq E|n| + E|(p-q)n| =$
$= n+(p-q)n = (1+p-q)n < \infty$

• Ελέγχουμε τώρα την τρίτη συνθήκη: $E(W_{n+1}|\mathcal{F}_n) = E(S_{n+1}-(p-q)(n+1)|\mathcal{F}_n) =$
$= E(S_n+X_{n+1}-(p-q)(n+1)|\mathcal{F}_n) = E(S_n-(p-q)(n+1)|\mathcal{F}_n) + E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) =$
$= S_n-(p-q)(n+1)+E(X_{n+1}) = S_n-(p-q)(n+1) + 1\cdot p - 1\cdot q =$
$= S_n-(p-q)(n+1)+(p-q) = S_n-(p-q)n = W_n$ άρα
όντως $E(W_{n+1}|\mathcal{F}_n)=W_n$, $\forall n\geq 0$

(ii) $M_n := \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}$

• Η $(M_n)_{n\geq 0}$ είναι προσαρμοσμένη στην $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ και θα το δείξουμε με ένα ισοδύναμο ορισμό της μετρησιμότητας. Έστω $\alpha\in\mathbb{R}$ τότε
$[M_n\leq \alpha] = [\ln M_n \leq \ln\alpha] = [\ln\left(\frac{q}{p}\right)^{S_n} \leq \ln\alpha] =$
$= [S_n \ln\frac{q}{p} \leq \ln\alpha] = [S_n \leq \frac{\ln\alpha}{\ln\frac{q}{p}}] \in \mathcal{F}_n$ αφού η S_n είναι $\mathcal{F}_n$-μετρήσιμη για κάθε $n\geq 0$.

• $E|M_n| = E\left|\left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}\right| = E\left|\left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n}\right| < 1 < \infty$

• Ελέγχουμε τώρα την τρίτη συνθήκη: $E(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) = E\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{S_{n+1}}|\mathcal{F}_n\right) =$
$= E\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{S_n+X_{n+1}}|\mathcal{F}_n\right) = E\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}\cdot\left(\frac{q}{p}\right)^{X_{n+1}}|\mathcal{F}_n\right) =$

$$= \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n} E\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{X_{n+1}} \mid \mathcal{F}_n\right) = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n} \boxed{E\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{X_{n+1}}\right)} =$$

(*)

(αφού η X_{n+1} ανεξάρτητη ως προς την $\mathcal{F}_n$ και επομένως η μετρήσιμη συνάρτησή της $\left(\frac{q}{p}\right)^{X_{n+1}}$)

(*)
$$= \left(\frac{q}{p}\right)^{1} P(X_{n+1}=1) + \left(\frac{q}{p}\right)^{-1} P(X_{n+1}=-1) = \frac{q}{\cancel{p}} \cdot \cancel{p} + \frac{p}{\cancel{q}} \cdot \cancel{q} =$$

$$= p + q = p + 1 - \cancel{p} = 1 .$$

Επομένως $E(M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n} \cdot 1 = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n} = M_n$ άρα όντως
$E(M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = M_n \quad , \forall n \geq 0$

Άρα και στις δύο περιπτώσεις $(W_n)_{n \geq 0}$, $(M_n)_{n \geq 0}$ είναι martingales ως προς την $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$