Εργασία 2 Στοχ. Λογισμός Βαγγέλης Θωμάς 1112200800017 (1)

7.3 $A = a_1 B(t_1) + a_2 B(t_2) + \dots + a_n B(t_n) =$

$= B(t_1)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=2}^{n} a_i\right) + \left(\sum_{i=2}^{n} a_i - \sum_{i=3}^{n} a_i\right) B(t_2) + \dots + (a_{n-1} + a_n - a_n) B(t_{n-1}) +$

$+ a_n B(t_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i B(t_1) + \sum_{i=2}^{n} a_i \big(B(t_2) - B(t_1)\big) + \sum_{i=3}^{n} a_i \big(B(t_3) - B(t_2)\big) + \dots +$

$+ \sum_{i=n-1}^{n} a_i \big(B(t_{n-1}) - B(t_{n-2})\big) + a_n \big(B(t_n) - B(t_{n-1})\big)$

$B(t_1),\ B(t_2) - B(t_1),\ B(t_3) - B(t_2),\ \dots,\ B(t_n) - B(t_{n-1})$

ανεξάρτητες κανονικές με κατανομές:

$N(0, t_1),\ N(0, t_2 - t_1),\ \dots,\ N(0, t_n - t_{n-1})$ αντίστοιχα

Θέτουμε $X_j = \sum_{i=j}^{n} a_i \big(B(t_j) - B(t_{j-1})\big)$, $A = \sum_{j=1}^{n} X_j$

και $X_j \sim N\left(0, \left(\sum_{i=j}^{n} a_i\right)^2 (t_j - t_{j-1})\right)$ και ανεξάρτητες για $j = 1, \dots, n$. Άρα το άθροισμα είναι κανονική με μέση τιμή 0 και διασπορά $\sum_{j=1}^{n} \left[\left(\sum_{i=j}^{n} a_i\right)^2 (t_j - t_{j-1})\right]$

ΑΝΔΡΙΟΠΟΥΛΟΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ   Α.Μ: 1112200800008

7.5 Να υπολογιστεί η μέση τιμή και η διασπορά της τυχαίας μεταβλητής $Y=\int_0^t B^2(s)ds$

<u>ΛΥΣΗ</u>

$$E(Y)=E\left(\int_0^t B^2(s)ds\right)=\int\int_0^t B^2(s)\,ds\,dP=\int_0^t E(B^2(s))ds=\int_0^t V(B(s))ds=$$

$$=\int_0^t s\,ds=\left(\frac{s^2}{2}\right)\Bigg|_0^t=\frac{t^2}{2}\Rightarrow \boxed{E(Y)=\frac{t^2}{2}}$$

$$V(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2$$

• $E(Y^2)=E\left(\left(\int_0^t B^2(s)ds\right)^2\right)=E\left(\int_0^t\int_0^t B^2(x)B^2(y)\,dx\,dy\right)=$

$$=\int_0^t\int_0^t E(B^2(x)B^2(y))\,dx\,dy=\int_0^t\int_0^t\left\{Cov(B^2(x),B^2(y))+E(B^2(x))E(B^2(y))\right\}dx\,dy \quad (1)$$

• Υπολογίζουμε την $Cov(B^2(t),B^2(s))$ για $s,t\geq 0$. Έστω $t\geq s$.

$$Cov(B^2(t),B^2(s))=E(B^2(t)B^2(s))-E(B^2(t))E(B^2(s))=$$

$$=E\left((B(t)-B(s)+B(s))^2B^2(s)\right)-st=$$

$$=E\left((B(t)-B(s))^2B^2(s)\right)+2E\left((B(t)-B(s))B^3(s)\right)+E(B^4(s))-st=$$

$$=E\left((B(t)-B(s))^2\right)E(B^2(s))+2\underbrace{E(B(t)-B(s))}_{0}E(B^3(s))+E(B^4(s))-st=$$

$$=(t-s)s+E(B^4(s))-st$$

Τώρα $B(s)\sim N(0,s)\Rightarrow \frac{B(s)}{\sqrt{s}}\sim N(0,1)\Rightarrow E\left(\left(\frac{B(s)}{\sqrt{s}}\right)^4\right)=1\cdot 3=3$

από γνωστό Λήμμα στο Παράρτημα Α άρα $E\left(\frac{B^4(s)}{s^2}\right)=3\Rightarrow E(B^4(s))=3s^2$

$=t\cancel{s}-s^2+3s^2-\cancel{st}=2s^2\Rightarrow$ Άρα όταν $s<t$: $Cov(B^2(t),B^2(s))=2s^2$

και συμμετρικά αν $s>t$: $Cov(B^2(t),B^2(s))=2t^2$. Άρα

για κάθε $s,t\geq 0$: $Cov(B^2(t),B^2(s))=2(s\wedge t)^2$

Άρα από την (1) έχουμε: $E(Y^2)=\int_0^t\int_0^t\left\{2(x\wedge y)^2+xy\right\}dx\,dy=$

$$=2\int_0^t\int_0^t(x\wedge y)^2\,dx\,dy+\int_0^t\int_0^t xy\,dx\,dy=2\int_0^t\left(\int_0^y(x\wedge y)^2dx+\int_y^t(x\wedge y)^2dx\right)dy+\int_0^t\int_0^t xy\,dx\,dy=$$

$$= 2\int_0^t \left(\int_0^y x^2\,dx + \int_y^t y^2\,dx \right) dy + \left(\int_0^t x\,dx\right)\left(\int_0^t y\,dy\right) =$$

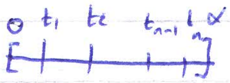
$$= 2\int_0^t \left[\frac{y^3}{3} + y^2(t-y)\right] dy + \frac{t^2}{2}\cdot\frac{t^2}{2} = 2\left[\frac{y^4}{12} + \frac{y^3}{3}t - \frac{y^4}{4}\right]_0^t + \frac{t^4}{4} =$$

$$= \frac{\overset{2}{t^4}}{6} + \frac{\overset{4}{2t^4}}{3} - \frac{\overset{6}{t^4}}{2} + \frac{\overset{3}{t^4}}{4} = \frac{7t^4}{12}$$

Άρα $V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{7t^4}{12} - \left(\frac{t^2}{2}\right)^2 = \frac{7t^4}{12} - \frac{\overset{3}{t^4}}{4} = \frac{4t^4}{12} = \frac{t^4}{3}$

$$\boxed{V(Y) = \frac{t^4}{3}}$$

7.6 Έστω απο. Να δειχθεί ότι η ανέλιξη X με $X(t) = B(a-t) - B(a)$ για κάθε $t \in [0,a]$ είναι κίνηση Brown στο $[0,a]$.



Λύση. i) Έστω $0 \le t_1 < t_2 < \dots \le t_n \le a$. Έχουμε τις προσαυξήσεις: $X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$:

$B(a-t_2) - \cancel{B(a)} - B(a-t_1) + \cancel{B(a)}, \dots, B(a-t_n) - \cancel{B(a)} - B(a-t_{n-1}) + \cancel{B(a)}$ δηλ.

$B(a-t_2) - B(a-t_1), \dots, B(a-t_n) - B(a-t_{n-1})$ ή αλλιώς

$-(B(a-t_1) - B(a-t_2)), \dots, -(B(a-t_{n-1}) - B(a-t_n))$ $\quad (a-t_2 < a-t_1, \dots, a-t_n < a-t_{n-1})$

Τώρα αφού η B είναι τυπική κίνηση Brown θα είναι και η $-B$ τυπική κίνηση Brown επομένως οι παραπάνω είναι προσαυξήσεις της $-B$ άρα θα είναι ανεξάρτητες

ii) Για $0 \le s < t$: $X(t) - X(s) = B(a-t) - \cancel{B(a)} - B(a-s) + \cancel{B(a)} = B(a-t) - B(a-s) =$

$= -(B(a-s) - B(a-t)) \sim N(0, \cancel{a} - s - \cancel{a} + t)$ άρα $X(t) - X(s) \sim N(0, t-s)$

iii) $X(t) = B(a-t) - B(a)$ συνεχής με πιθανότητα 1 αφού η B είναι συνεχής με πιθανότητα 1

~~Δε~~ύτερη εργασία στο Στοχαστικό Λογισμό

Αβεκλαούρης Άγγελος

1112200800001

$\boxed{\S 1}$ α) $M_t = \phi(X_t) = e^{-2\mu X_t} = e^{-2\mu(x+B_t+\mu t)}$

• Η M_t προσαρμοσμένη γιατί B_t είναι F_t-μετρήσιμη $\Rightarrow M_t$ είναι F_t μετρ.

• $E|M_t| = E\left|e^{-2\mu(x+B_t+\mu t)}\right| = e^{-2\mu(x+\mu t)} E\left|e^{-2\mu\sqrt{t}B_1}\right| < \infty$, όπου $B_1 \sim N(0,1)$

• Για $s<t$ $\quad E(M_t|F_s) = E\left(e^{-2\mu(x+B_t+\mu t)}\Big|F_s\right) =$

$$= e^{-2\mu(x+\mu t)} E\left(e^{-2\mu B_t}|F_s\right) = e^{-2\mu(x+\mu t)} E\left(e^{-2\mu(B_t-B_s+B_s)}\Big|F_s\right)$$

$$= e^{-2\mu(x+\mu t)} E\Big(e^{-2\mu(B_t-B_s)} \cdot \underbrace{e^{-2\mu B_s}}_{F_s\ \mu\epsilon\tau\rho} \Big| F_s\Big) =$$

$$= e^{-2\mu(x+\mu t)} \cdot e^{-2\mu B_s} E\Big(\underbrace{e^{-2\mu(B_t-B_s)}\Big|F_s}_{\alpha\nu\epsilon\xi}\Big) = e^{-2\mu(x+\mu t)-2\mu B_s} E\left(e^{-2\mu(B_t-B_s)}\right)$$

$$= e^{-2\mu(x+\mu t)-2\mu B_s} E\left(e^{-2\mu\sqrt{t-s}\,B_1}\right) = e^{-2\mu(x+\mu t)-2\mu B_s} \cdot e^{2\mu^2(t-s)}$$

$$= e^{-2\mu(x+B_s+\mu s)} = M_s \Rightarrow M_t \text{ martingale.}$$

10.5

· Έστω $X(s,\omega) = s$ και $t_j^{(n)} = \frac{j}{2^n} t$, $0 \le j \le 2^n$, $n \geq 1$

και $X_n(s,\omega) = \sum_{j=0}^{2^n-1} t_{j+1}^{(n)} \mathbb{1}_{(t_j^{(n)}, t_{j+1}^{(n)}]}$ όπου $(s,\omega) \in [0,t] \times \Omega$

Ν.δ.ο. $X_n \to X$ στον $L^2(\lambda \times P)$

$$\|X - X_n\|^2_{L^2(\lambda \times P)} = \int_0^t E\Big(\sum_{j=0}^{2^n-1} \big(s - t_{j+1}^{(n)}\big)\Big)^2 ds = \int_0^t \sum_{j=0}^{2^n-1} \big(s - t_{j+1}^{(n)}\big)^2 ds$$

$$= \sum_{j=0}^{2^n-1} \int_{t_j^{(n)}}^{t_{j+1}^{(n)}} \big(s - t_{j+1}^{(n)}\big)^2 ds = \frac{1}{3} \sum_{j=0}^{2^n-1} \big(t_{j+1}^{(n)} - t_j^{(n)}\big)^3 =$$

$$= \frac{1}{3} 2^n \left(\frac{t}{2^n}\right)^3 = \frac{1}{3} \frac{t^3}{2^{2n}} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

ώρα $I(X_n) = \sum_{j=0}^{2^n-1} t_{j+1}^{(n)} \left(B_{t_{j+1}^{(n)}} - B_{t_j^{(n)}}\right) = \sum_{j=0}^{2^n-1} \frac{(j+1)}{2^n} t \cdot \left(B_{t_{j+1}^{(n)}} - B_{t_j^{(n)}}\right)$

$$= \frac{t}{2^n} \sum_{j=0}^{2^n-1} (j+1)\left(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}\right) = -\frac{t}{2^n}\sum_{j=0}^{2^n-1} B_{t_j^{(n)}} + \frac{2^n t}{2^n} B_{t_{2^n}^{(n)}}$$

$$= t \cdot B_t - \frac{t}{2^n}\sum_{j=0}^{2^n-1} B_{t_j} \xrightarrow{n\to\infty} t\cdot B_t - \int_0^t B_s \, ds$$

Άρα $\int_0^s s \, dB_s = t \cdot B_t - \int_0^t B_s \, ds$.

11.2

Αρχικά θα δείξουμε ότι είναι martingale.

Από θεωρία $\int_0^t X(s,\omega)\,dB_s$, F_t - μετρήσιμο $\Rightarrow \left(\int_0^t X(s,\omega)\,dB_s\right)^2$, F_t - μετρήσιμη

~~Επίσης $\int_0^t X(s,\omega)^2 ds$ προσεγγίζεται από F_t-μετρήσιμες (π.χ. από $\frac{t}{n}\sum_{i=0}^{n-1} X(\frac{ti}{n},\omega)$)~~

~~όπως και $\int_0^t (X(s,\omega))^2 ds$.~~

Τώρα το ολοκλήρωμα F_t - μετρήσιμης είναι F_t - μετρήσιμο και άρα και $\int_0^t X(s,\omega)^2 ds$, F_t - μετρήσιμο.

Συνεπώς $\forall t \geq 0$, Y_t, F_t - μετρήσιμη

Τώρα $\forall t \geq 0$, $E\left(\int_0^t X^2(s,\omega)\,ds\right) < \infty$ και ~~επίσης~~ άρα

$$E\left(\left|\left(\int_0^t X(s,\omega)\,dB_s\right)^2 - \int_0^t X^2(s,\omega)\,ds\right|\right) \leq E\left(\left(\int_0^t X(s,\omega)\,dB_s\right)^2\right) + E\left(\int_0^t X^2(s,\omega)\,ds\right) \underset{\text{Ito}}{\overset{\text{ισομετρία}}{=}} 2E\left(\int_0^t X^2(s,\omega)\,ds\right) < \infty$$

Τέλος $\forall\, 0 \leq r < t$,

$$E\left(\left(\int_0^t X(s,\omega)\,dB_s\right)^2 - \int_0^t X^2(s,\omega)\,ds \,\Big|\, F_r\right) = E\left(\left(\int_0^t X(s,\omega)\,dB_s\right)^2 \Big| F_r\right) -$$

$$E\left(\int_0^t X^2(s,\omega)\,ds \,\Big|\, F_r\right) = E\left(\left(\int_0^r X(s,\omega)\,dB_s + \int_r^t X(s,\omega)\,dB_s\right)^2 \Big| F_r\right) - E\left(\int_0^r X^2(s,\omega)\,ds \,\Big|\, F_r\right)$$

$$- E\left(\int_r^t X^2(s,\omega)\,ds \,\Big|\, F_r\right) = E\left(\left(\int_0^r X(s,\omega)\,dB_s\right)^2 \Big| F_r\right) + 2E\left(\int_0^r X(s,\omega)\,dB_s \int_r^t X(s,\omega)\,dB_s \,\Big|\, F_r\right)$$

$$+ E\left(\left(\int_r^t X(s,\omega)\,dB_s\right)^2 \Big| F_r\right) - E\left(\int_0^r X^2(s,\omega)\,ds \,\Big|\, F_r\right) - E\left(\int_r^t X^2(s,\omega)\,ds \,\Big|\, F_r\right)$$

$\left(\int_0^r X(s,\omega)\,dB_s\right.$ F_r μετρ.), $\left(\int_0^r X^2(s,\omega)\,dB_s\right.$ F_r-μετρ)

$E\left(\int_r^t X^2(s,\omega)\,dB_s \,|\, F_r\right) = 0$, $\left(E\left(\left(\int_r^t X(s,\omega)\,dB_s\right)^2 \Big| F_r\right) = E\left(\int_r^t X^2(s,\omega)\,ds \,|\, F_r\right)\right)$

$$\left(\int_0^r X(s,\omega)\,dB_s\right)^2 \cancel{E\left(\int_0^r X^2(s,\omega)\,dB_s \,|\, F_r\right)} + 0 + \cancel{E\left(\int_r^t X^2(s,\omega)\,dB_s \,|\, F_r\right)}$$

$$- \int_0^r X^2(s,\omega)\,ds - \cancel{E\left(\int_r^t X^2(s,\omega)\,ds \,|\, F_r\right)}$$

$$= \left(\int_0^r X(s,\omega)\,dB_s\right)^2 - \int_0^r X^2(s,\omega)\,ds = Y_r.$$

$\Rightarrow E(Y_t \,|\, F_r) = Y_r$, όπως θέλαμε.

~~Η συνέχεια απορρέει από το θεώρημα 11.2. και την ισομετρία Ito.~~

~~αφού~~ $\cancel{E\left(\int_0^x X^2(s,\omega)\right)}$ ~~αυτό 11.2.~~ $\cancel{\int_0^t X(s,\omega)\,dB_s}$ ~~συνεχώς~~

~~και~~ $\cancel{\forall x,y \geq 0,\ (x>y)}$ $\cancel{E\left(\int_0^x X^2(s,\omega)\,ds - \int_0^y X^2(s,\omega)\,ds\right) = E\left(\int_0^\infty X^2(s,\omega) 1_{\{y<s<x\}}\,ds\right)}$

$\cancel{= E\left(\left(\int_0^\infty X(s,\omega) 1_{\{y<s<x\}}\,dB_s\right)^2\right)}$

$\cancel{= E\left(\left(\int_0\right.\right.}$

Για την συνέχεια:

Η $\int_0^t X(s,\omega)\,dB_s$ είναι συνεχής και άρα και η $\left(\int_0^t X^2(s,\omega)\,dB_s\right)^2$.

Τώρα η $\int_0^t X^2(s,\omega)\,ds$ είναι αύξουσα οπότε είναι επίσης σχεδόν παντού συνεχής. Άρα και η διαφορά συνεχής. Είναι συνεχής παντού από κυριαρχημένης σύγκλισης