**Στοχαστικός Λογισμός**
**1ο φυλλάδιο ασκήσεων**

**1.** Αν στο Παράδειγμα 1.7 η διαμέριση $\mathcal{C}$ του $X$ έχει υπεραριθμήσιμο πλήθος στοιχείων (δηλαδή το $I$ είναι υπεραριθμήσιμο, άρα και το $X$ υπεραριθμήσιμο), να δοθεί περιγραφή της παραγόμενης σ-άλγεβρας $\sigma(\mathcal{C})$.

**2.** Να δειχθεί ότι η $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ δεν παράγεται από διαμέριση.

**3.** Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών. Για $\varepsilon > 0$ και $n \geq 1$ θέτουμε $A_n^\varepsilon := \{|X_n| \geq \varepsilon\}$. Να δειχθεί ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) $\mathbf{P}(\lim_{n\to\infty} X_n = 0) = 1$.

(β) $\mathbf{P}(\limsup_n A_n^\varepsilon) = 0$ για κάθε $\varepsilon > 0$.

[Υποδειξη: Για τα $\omega$ στο σύνολο $\limsup_n A_n^\varepsilon$ έχουμε $|X_n| \geq \varepsilon$ για άπειρα $n$, και άρα $\limsup_n A_n^\varepsilon \subset \Omega \setminus \{\lim_{n\to\infty} X_n = 0\}$. Για το ότι το (β) δίνει το (α), χρησιμοποιούμε το (β) για τα $\varepsilon$ της μορφής $\varepsilon = 1/k$ με $k \in \mathbb{N}^+$ και την Άσκηση 1.8 (α).]

**4.** Έστω $X$ τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(|X| > n) = 0$.

**5.** Αν $(X_n)_{n\geq 1}$ είναι ακολουθία τυχαίων μεταβλητών με τιμές στο $\mathbb{R}$, τότε υπάρχει ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών $(a_n)_{n\geq 1}$ ώστε $\lim_{n\to\infty} X_n/a_n = 0$ με πιθανότητα 1.

**6.** Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών, καθεμία με κατανομή την ομοιόμορφη στο $(0,1)$, και $M_n := \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ για κάθε $n \geq 1$. Να δειχθεί ότι με πιθανότητα 1 ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} M_n = 1. \tag{1}$$

**7.** Έστω $X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή 0 και διασπορά 1. Θέτουμε $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}, \mathcal{F}_k := \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$ για $1 \leq k \leq n$. Έστω και τυχαίες μεταβλητές $a_1, a_2, \dots, a_n$ ώστε η $a_k$ να είναι $\mathcal{F}_{k-1}$-μετρήσιμη και φραγμένη για $1 \leq k \leq n$. Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{E}\left\{\left(\sum_{k=1}^n a_k X_k\right)^2\right\} = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}(a_k^2)$$

**8.** Έστω $(X_n)_{n\geq 0}$ supermartingale ως προς την διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

(α) Να δειχθεί ότι για $A \in \mathcal{F}_m$ και $n > m$ ισχύει

$$\int_A X_n \, d\mathbf{P} \leq \int_A X_m \, d\mathbf{P}\,.$$

(β) Υποθέτοντας ότι $X_n \geq 0$ για όλα τα $n$, να δειχθεί ότι για σταθερά $m \geq 0$, $i \geq 1$ έχουμε ότι

$$\text{σχεδόν παντού στο } \{X_m = 0\} \text{ ισχύει } X_{m+i} = 0.$$

(γ) Με την υπόθεση του (β), να δειχθεί ότι για σταθερό $m \geq 0$ έχουμε ότι

$$\text{σχεδόν παντού στο } \{X_m = 0\} \text{ ισχύει } X_{m+i} = 0 \text{ για κάθε } i \geq 1.$$

**9.** Έστω $(S_n)_{n\geq 0}$ ο ασυμμετρικός τυχαίος περίπατος όπως ορίστηκε στην Παρατήρηση 3 (Παράγραφος 5.5), και ορίζουμε την διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ ως $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}, \mathcal{F}_n := \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ για $n \geq 1$. Να δειχθεί ότι οι ακολουθίες $(W_n)_{n\geq 0}, (M_n)_{n\geq 0}$ με

$$W_n := S_n - (p-q)n, M_n := (q/p)^{S_n}$$

είναι martingales ως προς την $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.