Στοχαστικός Λογισμός

Εργασία 1

Προθεσμία υποβολής: Πέμπτη 19 Ιουνίου

1. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίες μεταβλητές σε κοινό χώρο πιθανότητας με τιμές στο $\mathbb{R}$. Θέτουμε $S_k = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$ για κάθε $1 \le k \le n$. Να δειχθεί ότι

$$\sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sigma(S_1, S_2, \ldots, S_n).$$

2. Έστω $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ με $X(\omega) \neq 0$ για κάθε $\omega \in \Omega$. Ισχύει απαραίτητα $\mathbf{E}(X \,|\, \mathcal{G}) \neq 0$ με πιθανότητα 1;

3. Έστω $(X_n)_{1 \le k \le n}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με $\mathbf{E}|X_1| < \infty$. Θέτουμε $\mathcal{G} := \sigma(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$. Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{E}(X_1 \,|\, \mathcal{G}) = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}.$$

[Υπόδειξη: $\mathbf{E}(X_i \,|\, \mathcal{G}) = \mathbf{E}(X_1 \,|\, \mathcal{G})$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$]

4. (α) Έστω $\{X_{n,k} : n \ge 0, k \ge 1\}$ ανεξάρτητες ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\mathbb{N}$ και μέση τιμή $\mu > 0$. Θέτουμε $Z_0 := 1$, και για $n \ge 0$,

$$Z_{n+1} := \begin{cases} \sum_{k=1}^{Z_n} X_{n,k} & \text{αν } Z_n > 0, \\ 0 & \text{αν } Z_n = 0, \end{cases}$$

Επίσης, θέτουμε

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}, \\ &\mathcal{F}_n := \sigma(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n) \quad \text{για } n \ge 1. \end{aligned}$$

Η ακολουθία Z_n καταγράφει την ανάπτυξη ενός γενεαλογικού δένδρου. Z_n είναι ο αριθμός των ατόμων που αποτελούν την n γεννιά. Το k-στο άτομο της n γενιάς γεννάει $X_{n,k}$ άτομα. Έτσι η $n+1$ γενιά έχει $\sum_{k=1}^{Z_n} X_{n,k} = Z_{n+1}$ άτομα. Αν όλα τα άτομα μιάς γενιάς δεν αφήσουν απόγονο, τότε όλες οι μετέπειτα γεννιές έχουν 0 άτομα.

(α) Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{E}(Z_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n) = \mu Z_n$$

για κάθε $n \ge 0$.

(β) Να δειχθεί ότι η $(Z_n/\mu^n)_{n \ge 0}$ είναι martingale ως προς την $(\mathcal{F}_n)_{n \ge 0}$.

5. Έστω $(S_n)_{n \ge 0}$ ο απλός τυχαίος περίπατος στο $\mathbb{Z}$ και $(\mathcal{F}_n)_{n \ge 0}$ η διήθηση όπως στο Παράδειγμα 3.2 των σημειώσεων. Θέτουμε

$$\begin{aligned} &J_0 = 0, \\ &J_n := \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{S_k = 0} \quad \text{για κάθε } n \ge 0. \end{aligned}$$

Δηλαδή η J_n μετράει τον αριθμό των επισκέψεων του περιπάτου στο 0 ως το χρόνο $n-1$ (ξεκινώντας από το χρονο 0). Θέτουμε επίσης $M_n = |S_n| - J_n$ για κάθε $n \ge 0$.

(α) Να δειχθεί ότι η $(M_n)_{n \ge 0}$ είναι martingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n \ge 0}$.

(β) Έστω a θετικός ακέραιος, και $T := \min\{k \ge 0 : |S_k| = a\}$. Να δειχθεί ότι $\mathbf{E}(J_{T_a}) = a$.

6. Έστω B τυπική κίνηση Brown, $\mu > 0$, και $x \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε την ανέλιξη X με

$$X_t := x + B_t + \mu t$$

για κάθε $t \geq 0$. Η X ονομάζεται κίνηση Brown με τάση μ που ξεκινάει απο το x. Για $r \in \mathbb{R}$, ορίζουμε $T_r := \inf\{s \geq 0 : X_s = r\}$ και $\phi(r) := e^{-2\mu r}$. Να δειχθεί ότι:

(α) Η ανέλιξη $M_t := \phi(X_t)$ είναι martingale ως προς τη διήθηση $\mathcal{F}_t := \sigma(\{B_s : s \in [0, t]\})$.

(β) $\mathbf{P}(T_a \wedge T_b < \infty) = 1$.

(γ) Για $a < x < b$ ισχύει

$$\mathbf{P}(T_a < T_b) = \frac{\phi(b) - \phi(x)}{\phi(b) - \phi(a)}.$$

(δ) Για $x = 0$ και $a < 0$ ισχύει $\mathbf{P}(T_a < \infty) = e^{2\mu a}$. Δηλαδή όταν προσθέσουμε μια θετική τάση στην κίνηση Brown, εκείνη ενδέχεται να παραμείνει για πάντα δεξιά του αριθμού $a < 0$, σε αντίθεση με την τυπική κίνηση Brown.

(ε) Έστω $x = 0, a < 0$, και $R := \inf\{X_t : t \geq 0\} \in [-\infty, 0]$. Να δειχθεί ότι η $-R$ ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο 2μ. Παρατηρήστε ότι $R > -\infty$ με πιθανότητα 1.

Παρατήρηση: Στα ερωτήματα 4(α) και 5(α) χρησιμοποιήστε πρακτικα το τι σημαίνει δέσμευση ως προς μια σ-άλγεβρα, και υπολογίστε δεσμευμένες μέσες τιμές όπως κάναμε στις Πιθανότητες Ι.