Στοχαστικός Λογισμός
Εργασία 1

Προθεσμία υποβολής: Τετάρτη 5 Νοεμβρίου 2014

1. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τυχαίες μεταβλητές σε κοινό χώρο πιθανότητας με τιμές στο $\mathbb{R}$. Θέτουμε $S_k = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$ για κάθε $1 \le k \le n$. Να δειχθεί ότι

$$\sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sigma(S_1, S_2, \ldots, S_n).$$

2. Έστω $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ με $X(\omega) \neq 0$ για κάθε $\omega \in \Omega$. Ισχύει απαραίτητα $\mathbf{E}(X \,|\, \mathcal{G}) \neq 0$ με πιθανότητα 1;

3. Έστω X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές ώστε $\mathbf{E}|X|, \mathbf{E}|Y| < \infty$ και $\mathbf{E}(X) = 0$. Να δειχθεί ότι $\mathbf{E}|X + Y| \ge \mathbf{E}|Y|$.

4. Έστω $(X_n)_{n\ge1}$ martingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\ge1}$ με τις X_n να παίρνουν τιμές[1] στο $[0, M]$ για κάθε $n \ge 1$ όπου $M > 0$ είναι μια σταθερά. Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{E}(X_n X_{n-1} \cdots X_2 X_1) \ge \mathbf{E}(X_1^n).$$

5. Έστω $(X_n)_{n\ge1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών σε κοινό χώρο πιθανότητας και με τιμές στο $[0, \infty)$. Θέτουμε

$$S_0 := 0, \qquad \mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\},$$
$$S_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \qquad \mathcal{F}_n := \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

για $n \ge 1$. Για $a > 0$ σταθερό θέτουμε $V := \sup\{n : S_n \le a\}$. Να δειχθεί ότι ο χρόνος $T := V + 1$ είναι χρόνος στάσης ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\ge0}$.

6. Έστω $(S_n)_{n\ge0}$ ο απλός τυχαίος περίπατος στο $\mathbb{Z}$ και $(\mathcal{F}_n)_{n\ge0}$ η διήθηση όπως στο Παράδειγμα 3.2 των σημειώσεων. Θέτουμε

$$J_0 = 0,$$
$$J_n := \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{1}_{S_k=0} \quad \text{για κάθε } n \ge 1.$$

Δηλαδή η J_n μετράει τον αριθμό των επισκέψεων του περιπάτου στο 0 ως το χρόνο $n-1$ (ξεκινώντας από το χρονο 0). Θέτουμε επίσης $M_n = |S_n| - J_n$ για κάθε $n \ge 0$.

(α) Να δειχθεί ότι η $(M_n)_{n\ge0}$ είναι martingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\ge0}$.

(β) Έστω a θετικός ακέραιος, και $T_a := \min\{k \ge 0 : |S_k| = a\}$. Να δειχθεί ότι $\mathbf{E}(J_{T_a}) = a$.

---

[1] Δηλαδή $X_n : \Omega \to [0, M]$.

Υποδείξεις

1. Χρησιμοποιούμε τον χαρακτηρισμό της σ-άλγεβρας παραγόμενης απο συναρτήσεις (ως η ελάχιστη που κάνει καθεμία από αυτές μετρήσιμες) και γνωστές ιδιότητες για πράξεις μεταξύ μετρήσιμων συναρτήσεων.

3. Το σκεπτικό είναι να σταθεροποιήσουμε το Y και να πάρουμε μέση τιμή πρώτα ως προς X για να εκμεταλευτούμε το $\mathbf{E}(X) = 0$.

$$\mathbf{E}|X+Y| = \mathbf{E}\{\mathbf{E}(|X+Y| \,|\, \sigma(Y))\} \geq \mathbf{E}\{|\mathbf{E}(X+Y \,|\, \sigma(Y))|\}$$

Χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα Jensen. Τώρα η δεσμευμένη μέση τιμή $\mathbf{E}(X+Y \,|\, \sigma(Y))$ στο δεξί μέλος ισούται με

$$\mathbf{E}(X \,|\, \sigma(Y)) + \mathbf{E}(Y \,|\, \sigma(Y)) = \mathbf{E}(X) + Y = Y$$

γιατί η X είναι ανεξάρτητη από την $\sigma(Y)$ ενώ η Y είναι $\sigma(Y)$-μετρήσιμη. Το ζητούμενο έπεται.

4. Δείχνουμε με επαγωγή ότι

$$\mathbf{E}(X_k^{n-k+1} X_{k-1} \cdots X_2 X_1) \geq \mathbf{E}(X_1^n)$$

για $k = 1, 2, \ldots, n$. Για $k = 1$ ισχύει. Αν ισχύει για κάποιο $k < n$, τότε την δείχνουμε για το $k+1$. Έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X_{k+1}^{n-k} X_k \cdots X_2 X_1) &= \mathbf{E}\{\mathbf{E}(X_{k+1}^{n-k} X_k \cdots X_2 X_1 \,|\, \mathcal{F}_k)\} = \mathbf{E}\{X_k \cdots X_1 \mathbf{E}(X_{k+1}^{n-k} \,|\, \mathcal{F}_k)\} \\ &\geq \mathbf{E}\{X_k \cdots X_1 X_k^{n-k}\} = \mathbf{E}\{X_k^{n-k+1} X_{k-1} \cdots X_1\} \geq \mathbf{E}(X_1^n).\end{aligned}$$

Η πρώτη ανισότητα έπεται από την ανισότητα Jensen (η $x \mapsto x^{n-k}$ είναι κυρτή στο $[0, \infty)$) και το ότι οι X_i παίρνουν μη αρνητικές τιμές.

Όλες οι δεσμευμένες μέσες τιμές πιο πάνω ορίζονται γιατί οι $|X_i|$ είναι φραγμένες από το M.

5. Έχουμε $\{T \leq 0\} = \{V \leq -1\} = \emptyset \in \mathcal{F}_0$, και για $n \geq 1$ έχουμε

$$\{V + 1 \leq n\} = \{V \leq n-1\} = \{S_n > a\} \in \mathcal{F}_n.$$

Η δεύτερη ισότητα θέλει δικαιολόγηση. Το $\subset$ ισχύει από τον ορισμό του V. Το $\supset$ ισχύει γιατί επειδή οι X_i παίρνουν μόνο μη αρνητικές τιμές, αν η $S_n > a$ τότε και για όλους τους δείκτες $k > n$ θα ισχύει $S_k > a$, οπότε ο μεγαλύτερος δείκτης με τιμή $\leq a$ πρέπει να είναι $\leq n-1$ (Αν $S_1 > a$, τότε $V = 0 \leq a$).

6. Παρατηρούμε ότι $M_1 - M_0 = |X_1| - 1 = 0$, ενώ για $n \geq 1$ έχουμε

$$\begin{aligned}M_{n+1} - M_n = |S_{n+1}| - |S_n| - \mathbf{1}_{S_n=0} &= \begin{cases} 0 & \text{αν } S_n = 0, \\ X_{n+1} & \text{αν } S_n > 0, \\ -X_{n+1} & \text{αν } S_n < 0, \end{cases} \\ &= \operatorname{sign}(S_n) X_{n+1},\end{aligned}$$

όπου $\operatorname{sign}(z)$ ισούται με 1 αν $z > 0$, με -1 αν $z < 0$, και με 0 αν $z = 0$. Έτσι,

$$\mathbf{E}(M_{n+1} - M_n \,|\, \mathcal{F}_n) = \operatorname{sign}(S_n)\mathbf{E}(X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n) = \operatorname{sign}(S_n)\mathbf{E}(X_{n+1}) = 0.$$

Χρησιμοποιήσαμε το ότι η $\operatorname{sign}(S_n)$ είναι $\mathcal{F}_n$-μετρήσιμη ενώ η X_{n+1} είναι ανεξάρτητη από την $\mathcal{F}_n$.