Στοχαστικός Λογισμός
Εργασία 2

Προθεσμία υποβολής: Τετάρτη 15 Δεκεμβρίου 2014

1. Έστω $x \in \mathbb{R}$ και $(B_t)_{t\geq 0}$ κίνηση Brown με $B_0 = x$.

(i) Ποιά η πυκνότητα της τυχαίας μεταβλητής B_t;

(ii) Έστω $p_t(x,\cdot)$ η πυκνότητα από το προηγούμενο ερώτημα. Να δειχθεί ότι ως συνάρτηση των (t,y) ικανοποιεί στο $(0,\infty)\times\mathbb{R}$ τη μερική διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial p_t}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 p_t}{\partial y^2}.$$

2. Έστω $u : [0,\infty)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση παραγωγίσιμη ως προς t και δύο φορές παραγωγίσιμη ως προς y με τις $\partial u/\partial t, \partial^2 u/\partial y^2$ συνεχείς που ικανοποιεί στο $(0,\infty)\times\mathbb{R}$ τη μερική διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,y) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,y).$$

Επιπλέον υποθέτουμε ότι υπάρχουν σταθερά C και συνάρτηση $R(t)$ ώστε $|\partial u/\partial y(t,y)| \leq R(t)\, e^{C|y|}$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$ και $t \geq 0$. Τότε η συνάρτηση $A(t) = \mathbf{E}_x u(t,B_t), (t \geq 0)$ είναι σταθερή ως προς t. $\mathbf{E}_x$ είναι η μέση τιμή όταν η B είναι κίνηση Brown με $B_0 = x$.

3. Έστω B τυπική κίνηση Brown και $(a_k)_{k\geq 0}$ ακολουθία θετικών αριθμών. Για $n \geq 1$ θέτουμε $A_n := \{|B_{k+1} - B_k| \leq a_k \text{ για κάθε } k = 0,1,\ldots,n-1\}$. Να δειχθεί ότι $\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}(A_n) > 0$ αν και μόνο αν

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}\, e^{-\frac{a_n^2}{2}} < \infty.$$

4. Έστω B τυπική κίνηση Brown και $t > 0$. Να δειχθεί ότι η τυχαία μεταβλητή $X = \int_0^t B_s\, ds$ ακολουθεί την κατανομή $N(0, t^3/3)$.

5. Έστω B τυπική κίνηση Brown. Να υπολογιστεί η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής

$$X := \int_0^1 B_t B_{1-t}\, dt.$$

6. Έστω B τυπική κίνηση Brown και $a > 0$. Να δειχθεί ότι η ανέλιξη X με $X(t) := B(a-t) - B(a)$ για κάθε $t \in [0,a]$ είναι τυπική κίνηση Brown στο $[0,a]$.

7. Έστω ανελίξεις $(X_t)_{t\geq 0}, (Y_t)_{t\geq 0}$ οι οποίες με πιθανότητα 1 έχουν συνεχή μονοπάτια, και σε κάθε πεπερασμένο διάστημα η X έχει φραγμένη κύμανση, ενώ η Y έχει τετραγωνική κύμανση (πεπερασμένη ή άπειρη). Να δειχθεί ότι η $X+Y$ έχει τετραγωνική κύμανση

$$\langle X+Y, X+Y\rangle_{[0,t]} = \langle Y, Y\rangle_{[0,t]}$$

για κάθε $t > 0$.

Υποδείξεις

2. (ii) Δείξτε ότι η A έχει παράγωγο μηδέν. $A(t) = \int_{\mathbb{R}} u(t,y) p_t(x,y)\, dy$. Η παράγωγος ως προς t περνάει μέσα από το ολοκλήρωμα. Χρησιμοποιήστε την προηγούμενη άσκηση.

3. Πότε ένα απειρογινόμενο συγκλίνει σε θετικό αριθμό;

4. Υπόδειξη για αυτή την άσκηση υπάρχει στις σημειώσεις.