Στοχαστικός Λογισμός
Εργασία 3

Προθεσμία υποβολής: Παρασκευή 23 Ιανουαρίου 2015

Στις πιο κάτω ασκήσεις, εκτός αν αναφέρεται κάτι διαφορετικό,$(B_t)_{t\geq 0}$ είναι μία τυπική (μονοδιάστατη) κίνηση Brown.

1. Για $t \in (0,1)$ να υπολογιστεί η συνδιακύμανση των τυχαίων μεταβλητών $B_t, \int_0^1 B_s \, dB_s$.

2. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ στοιχείο του $L^2[0,1]$. Να δειχθεί ότι η τυχαία μεταβλητή

$$X := \int_0^1 f(t)\{\sin B_t + \cos B_t\} \, dB_t$$

έχει διασπορά $\mathrm{Var}(X) = \int_0^1 f^2(t) \, dt$.

3. Άσκηση 11.3 των σημειώσεων.

4. Έστω $u, g : \mathbb{R}^d \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ φραγμένες σε κάθε σύνολο της μορφής $\mathbb{R}^d \times [0,T]$ με $T>0$, με την g συνεχή, και την $u = u(x,t)$ στοιχείο του $C^{2,1}(\mathbb{R}^d \times [0,\infty))$, και που επιπλέον ικανοποιούν

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{2}\Delta_x u + g \qquad \text{στο } \mathbb{R}^d \times (0,\infty), \\ u(x,0) &= f(x) \qquad\qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

όπου f είναι μιά δεδομένη φραγμένη, συνεχής συνάρτηση (Δ_x είναι η Λαπλασιανή ως προς τις μεταβλητές $x_1, x_2, \ldots, x_d$). Να δειχθεί ότι, για B μια d-διάστατη κίνηση Brown και $t>0$ σταθερό, έχουμε:

(α) Η $(M_s)_{s\in[0,t]}$ με

$$M_s := u(B_s, t-s) + \int_0^s g(B_r, t-r) \, dr$$

για κάθε $s \in [0,t]$ είναι martinlgale.

(β)

$$u(x,t) = \mathbf{E}_x \left\{ f(B_t) + \int_0^t g(B_s, t-s) \, ds \right\}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$.

5. Δειξτε ότι η ανέλιξη

$$X_t := e^{tB_t} - \int_0^t e^{sB_s} \left\{ B_s + \frac{s^2}{2} \right\} ds, \; t \geq 0$$

είναι martingale.

6. Άσκηση 14.4 των σημειώσεων.

7. Έστω δύο European calls στη τιμή της μετοχής $(S_t)_{t\geq 0}$ με κοινό χρόνο άσκησης T και τιμή άσκησης K_1 και K_2 αντίστοιχα. Ονομάζουμε $C_1(t), C_2(t)$ την αξία τους το χρόνο $t \in [0,T]$. Υποθέτουμε ότι $K_1 < K_2$. Να δειχθεί ότι αν στην αγορά δεν υπάρχει δυνατότητα arbitrage, τότε ισχύει

$$0 \leq C_1(t) - C_2(t) \leq (K_2 - K_1)e^{-r(T-t)}$$

για κάθε $t \in [0,T]$. r είναι το επιτόκιο της τράπεζας.

Λύσεις

1. Και οι δύο τυχαίες μεταβλητές έχουν μέση τιμή 0 και πεπερασμένη δεύτερη ροπή. Άρα η συνδιακύμανση τους είναι

$$\mathrm{Cov}\left(B_t, \int_0^1 B_s\,dB_s\right) = \mathbf{E}\left(B_t \int_0^1 B_s\,dB_s\right) = \mathbf{E}\left(\int_0^1 \mathbf{1}_{[0,t]}(s)\,dB_s \cdot \int_0^1 B_s\,dB_s\right)$$

$$= \int_0^1 \mathbf{E}\{\mathbf{1}_{[0,t]}(s)B_s\}\,ds = \int_0^1 \mathbf{1}_{[0,t]}(s)\mathbf{E}\{B_s\}\,ds = 0.$$

Η τρίτη ισότητα έπεται από την Άσκηση 8.4.

2. Έστω $Y_t := f(t)\{\sin B_t + \cos B_t\}$ για κάθε $t \in [0,1]$. Η Y ικανοποιεί

$$\mathbf{E}\left(\int_0^1 Y_t^2\,dt\right) = \int_0^1 \mathbf{E}\{f(t)^2(\sin B_t + \cos B_t)^2\}\,dt = \int_0^1 f(t)^2\mathbf{E}(1 + 2\sin B_t \cos B_t)\,dt$$

$$= \int_0^1 f(t)^2\mathbf{E}(1 + \sin 2B_t)\,dt \le 2\int_0^1 f(t)^2\,dt < \infty$$

αφού $f \in L^2[0,1]$. Με βάση την Πρόταση 8.10 (ii) έχουμε ότι το στοχαστικό ολοκλήρωμα $X = \int_0^1 Y_t\,dB_t$ έχει μέση τιμή 0. Άρα η διασπορά του είναι

$$\mathbf{E}(X^2) = \mathbf{E}\left(\int_0^1 Y_t^2\,dt\right) = \int_0^1 f(t)^2\mathbf{E}(1 + \sin 2B_t)\,dt = \int_0^1 f(t)^2\,dt.$$

Χρειάζεται να δικαιολογήσουμε την τελευταία ισότητα. Έστω f_t η πυκνότητα της τ.μ. $N(0,t)$ ($f_t(x) = e^{-x^2/2t}/\sqrt{2\pi t}, x \in \mathbb{R}$). Η f_t είναι άρτια συνάρτηση, και

$$\mathbf{E}(\sin 2B_t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_t(x)\sin(2x)\,dx = 0$$

αφού είναι ολοκλήρωμα της περιττής συνάρτησης $\sin(2x)f_t(x)$ σε συμμετρικό διάστημα.

5. Θα υπολογίσουμε το dX_t. Υπολογίζουμε πρώτα το $d(e^{tB_t})$. Ένας τρόπος είναι ως εξής. Έστω $Y_t := tB_t$. Η Y είναι ανέλιξη Ito με

$$dY_t = dtB_t + tdB_t + dtdB_t = B_tdt + tdB_t.$$

Ο τύπος Ito (έκδοση IV) δίνει ότι

$$d(e^{tB_t}) = d(e^{Y_t}) = e^{Y_t}dY_t + \frac{1}{2}e^{Y_t}(dY_t)^2 = e^{Y_t}(B_tdt + tdB_t) + \frac{1}{2}e^{Y_t}t^2dt$$

$$= e^{Y_t}\left(B_t + \frac{1}{2}t^2\right)dt + te^{Y_t}dB_t.$$

Άρα $dX_t = te^{Y_t}dB_t$, δηλαδή

$$X_t = X_0 + \int_0^t se^{sB_s}\,dB_s = 1 + \int_0^t se^{sB_s}\,dB_s$$

Με βάση το Θεώρημα 9.2, για να είναι η ανέλιξη

$$\left(\int_0^t se^{sB_s}\,dB_s\right)_{t\ge 0}$$

martingale αρκεί να ισχύει

$$\mathbf{E}\left(\int_0^t (se^{sB_s})^2\,ds\right) < \infty$$

για κάθε $t > 0$. Αυτή η μέση τιμή ισούται με

$$\int_0^t s^2 \mathbf{E}(e^{2sB_s})\, ds = \int_0^t s^2 \mathbf{E}(e^{2s\sqrt{s}Z})\, ds = \int_0^t s^2 e^{2s^3}\, ds < \infty.$$

Z είναι μια τυχαία μεταβλητή με κατανομή $N(0,1)$, και στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε τον τύπο για τη ροπογεννήτρια της Z.

6. (α) Υπολογίζουμε το διαφορικό της X_t χρησιμοποιώντας τον κανόνα για διαφορικό γινομένου (Πρόταση 11.10 των σημειώσεων). Θέτουμε $Y_t = f(t), Z_t = a + \int_0^t g(s)\, dB_s$, οπότε $X_t = Y_t Z_t$ και

$$dX_t = (dY_t)Z_t + Y_t dZ_t + dY_t dZ_t = f'(t)Z_t dt + f(t)g(t)dB_t = f'(t)\frac{X_t}{f(t)}dt + f(t)g(t)dB_t$$

(β) Αναζητούμε f, g ώστε

$$\begin{aligned} \frac{f'(t)}{f(t)} &= -\frac{k}{1-t}, \\ f(t)g(t) &= 1. \end{aligned}$$

Η πρώτη εξίσωση έχει λύση $f(t) = C(1-t)^{-k}$ με $C \neq 0$ σταθερά. Επιλέγουμε $C = 1$. Έπειτα $g(t) = (1-t)^k$. Αυτές οι f, g ικανοποιούν τις προϋποθέσεις του ερωτήματος (α), οπότε η

$$X_t = (1-t)^{-k}\left(a + \int_0^t (1-s)^k\, dB_s\right),$$

λύνει τη ΣΔΕ. Η αρχική συνθήκη $X_0 = 0$ επιβάλλει $a = 0$, οπότε η λύση είναι η

$$X_t = (1-t)^{-k} \int_0^t (1-s)^k\, dB_s.$$

(γ) $\mathbf{E}(X_t) = 0$ με το γνωστό επιχείρημα, και άρα

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X_t) = \mathbf{E}(X_t^2) &= (1-t)^{-2k}\mathbf{E}\left\{\left(\int_0^t (1-s)^k\, dB_s\right)^2\right\} = (1-t)^{-2k}\int_0^t \mathbf{E}\{(1-s)^{2k}\}\, ds \\ &= (1-t)^{-2k}\frac{1}{2k+1}\{1-(1-t)^{2k+1}\} = \frac{1}{2k+1}\{(1-t)^{-2k} - (1-t)\}. \end{aligned}$$

Στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την ισομετρία του Ito.

7. Για την ανισότητα $C_1(t) - C_2(t) \leq (K_2 - K_1)e^{-r(T-t)}$, το χρόνο $t \in [0, T)$, θεωρούμε ένα χαρτοφυλάκιο που περιέχει

- -1 call 1
- 1 call 2
- ποσό $(K_2 - K_1)e^{-t(T-t)}$ στην τράπεζα.

Δηλαδή ο επενδυτής πουλάει ένα call 1, αγοράζει ένα call 1, και βάζει το ποσό $(K_2 - K_1)e^{-t(T-t)}$ στην τράπεζα. Η αξία του χαρτοφυλακίου αυτού το χρόνο t είναι

$$A(t) = C_2(t) - C_1(t) + (K_2 - K_1)e^{-r(T-t)}.$$

Το χρόνο T το ποσό στην τράπεζα έχει αυξηθεί σε

$$(K_2 - K_1)e^{-r(T-t)}e^{r(T-t)} = K_2 - K_1$$

οπότε το χρόνο T το χαρτοφυλάκιο πλέον έχει αξία

$$(S_T - K_2)^+ - (S_T - K_1)^+ + K_2 - K_1 = \begin{cases} K_2 - K_1 & \text{αν } S_T \leq K_1, \\ K_2 - S_T & \text{αν } K_1 < S_T \leq K_2, \\ 0 & \text{αν } K_2 < S_T. \end{cases}$$

η οποία είναι πάντοτε θετική. Άρα πρέπει η αρχική αξία του χαρτοφυλακίου να είναι θετική, αλλιώς θα υπήρχε ευκαιρία για arbitrage.

Για την ανισότητα $C_1(t) - C_2(t) \geq 0$, το χρόνο $t \in [0, T)$, θεωρούμε ένα χαρτοφυλάκιο που περιέχει

- 1 call 1
- -1 call 2.

Όπως πιο πάνω, δείχνουμε ότι το χαρτοφυλάκιο έχει τιμή ≥ 0 το χρόνο T όποια και να είναι τιμή S_T, και το συμπέρασμα έπεται.