

Στοχαστικός Λογισμός

Ασκήσεις 1

Προθεσμία υποβολής: Ιανουάριος 2016

1. Άσκηση 3.12 από τις σημειώσεις.

2. Έστω $(X_n)_{1 \leq k \leq n}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με $\mathbf{E}|X_1| < \infty$. Θέτουμε $\mathcal{G} := \sigma(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$. Να δειχθεί ότι

(α) $\mathbf{E}(X_i | \mathcal{G}) = \mathbf{E}(X_1 | \mathcal{G})$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$

(β)

$$\mathbf{E}(X_1 | \mathcal{G}) = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}.$$

3. Έστω X τυχαία μεταβλητή με κατανομή την εκθετική με παράμετρο 1. Για $t > 0$ θέτουμε $Y = X \wedge t$, $Z = X \vee t$. Να βρεθούν οι $\mathbf{E}(X | Y)$, $\mathbf{E}(X | Z)$.

4. Έστω $(X_n)_{n \geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών, καθεμία με κατανομή εκθετική με παράμετρο 1. Για κάθε $n \geq 1$, θέτουμε

$$M_n := \max \left\{ X_1, \frac{X_1 + X_2}{2}, \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}, \dots, \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \right\}.$$

Να δειχθεί ότι

$$E(M_n) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$