Στοχαστικός Λογισμός 2020

Ασκήσεις II

Στις ασκήσεις πιο κάτω, B είναι μια τυπική μονοδιάστατη κίνηση Brown.

1. Έστω $M := \sup\{B_s : s \geqslant 0\}$.
(α) Να δειχθεί ότι $M \stackrel{\mathrm{d}}{=} aM$ για κάθε $a > 0$.
(β) Να δειχθεί ότι $\mathbf{P}(M \in \{0, \infty\}) = 1$.
[Χρησιμοποιήστε το (α) και όχι την Πρόταση 5.13 από τις σημειώσεις.]

2. Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ θέτουμε $T_a := \inf\{s \geqslant 0 : B_s = a\}$. Έστω $a, b > 0$ και X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές ώστε $X \stackrel{\mathrm{d}}{=} T_a$ και $Y \stackrel{\mathrm{d}}{=} T_b$. Να δειχθεί ότι

$$X + Y \stackrel{\mathrm{d}}{=} T_{a+b}$$

με τους εξής τρόπους:
(α) Με χρήση της ισχυρής ιδιότητας Markov.
(β) Με χρήση ιδιοτήτων που γνωρίζουμε ήδη για την T_a (μετασχηματισμό Laplace, πυκνότητα).
[Προαιρετικό ερώτημα. Βγαίνει τουλάχιστον με δυο τρόπους.]

3. Άσκηση 5.12 από τις σημειώσεις.

4. Έστω $a > 0$ και T_a όπως στη άσκηση 2 πιο πάνω. Θέτουμε $T = T_{-a} \wedge T_a$.
(α) Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{E}(e^{-\lambda T}) = \frac{1}{\cosh(a\sqrt{2\lambda})}$$

για κάθε $\lambda > 0$. [Υποδειξη: Για κάθε $r \in \mathbb{R}$, η ανέλιξη $e^{-r^2 t/2}\cosh(rB_t)$ είναι martingale.]
(β) Ας υποθέσουμε ότι η T έχει πυκνότητα f. Να δειχθεί ότι

$$f(t) = \frac{\pi}{2a^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(2k+1)\exp\left(-\frac{(2k+1)^2\pi^2}{8a^2}t\right)$$

για κάθε $t > 0$.

[Για την αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace, δείτε για παράδειγμα την παράγραφο 8.2 στο «Βασική Μιγαδική Ανάλυση» των Marsden-Hoffman, μετάφραση Λ. Παπαλουκά.]