

Στοχαστικός Λογισμός 2020

Επανάληψη. Παλιά θέματα

1. (Ιούν. 2012, Τεστ εξάσκησης, 1) Έστω $(X_n)_{n \geq 0}$ martingale ως προς την διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ με $\mathbf{E}(X_n^2) < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Για $0 \leq i < j < k$ θετικών ακεραίων, να δειχθούν τα εξής.

(α) $\mathbf{E}((X_k - X_j)X_i) = 0$.

(β) $\mathbf{E}\{(X_k - X_j)^2 \mid \mathcal{F}_i\} = \mathbf{E}(X_k^2 \mid \mathcal{F}_i) - \mathbf{E}(X_j^2 \mid \mathcal{F}_i)$.

2. (Απρ. 2017, 6) Έστω $(B_t)_{t \geq 0}$ τυπική (μονοδιάστατη) κίνηση Brown.

(α) Ποια η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής $B_1^2 B_3 B_6$;

(β) Να εξεταστεί αν η ανέλιξη $(B_t^2)_{t \geq 0}$ είναι martingale, supermartingale ή submartingale ως προς τη διήθηση που παράγει η $(B_t)_{t \geq 0}$.

(γ) Να υπολογιστεί η $\mathbf{E}(|B_1| \mid B_1^2)$;

3. (Νοεμ. 2017, 3) Έστω $z, p \in (0, 1)$, $a \neq 0$, και $(X_i)_{i \geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $\mathbf{P}(X_1 = 1) = p$, $\mathbf{P}(X_1 = -1) = 1 - p$. Θέτουμε

$$\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\},$$

$$\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad \text{για κάθε } n \geq 1$$

$$S_0 := 0,$$

$$S_n := X_1 + X_2 + \dots + X_n \quad \text{για κάθε } n \geq 1,$$

και $M_n := a^{S_n} z^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Να δειχθεί ότι η ακολουθία $(M_n)_{n \geq 0}$ είναι martingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ αν και μόνο αν

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4p(1-p)z^2}}{2pz}.$$

4. (Νοεμ. 2017, 4) Έστω $(X_i)_{i \geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $\mathbf{P}(X_1 = i) = 1/6$ για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$. Θέτουμε

$$\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\},$$

$$\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad \text{για κάθε } n \geq 1$$

$$S_0 := 0,$$

$$S_n := X_1 + X_2 + \dots + X_n \quad \text{για κάθε } n \geq 1.$$

Έστω T ο μοναδικός ακέραιος k ώστε $S_{k-1} < 100 \leq S_k$. Να δειχθεί ότι ο T είναι φραγμένος χρόνος διακοπής ως προς την $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ και ότι $S_T \leq 105$.

5. (Φεβρ. 2015, 3) Να υπολογιστεί η μέση τιμή καθεμιάς από τις εξής τυχαίες μεταβλητές:

(α) $B_1 B_3$

(β) $B_1 B_2 B_3$

(γ) $B_1 B_3 B_6 B_{10}$

6. (Νοεμ. 2017, 6) Έστω $(B_t)_{t \geq 0}$, $(W_t)_{t \geq 0}$ ανεξάρτητες τυπικές (μονοδιάστατες) κινήσεις Brown και $a \in (0, 1)$.

(α) Ποια η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $B_1 - 4B_3 + 2B_6$;

(β) Για ποιες τιμές του $c \in \mathbb{R}$ είναι η ανέλιξη $(aB_t + cW_t)_{t \geq 0}$ τυπική κίνηση Brown;

7. (2020. Φυλλάδιο 2) Έστω $M := \sup\{B_s : s \geq 0\}$.

(α) Να δειχθεί ότι $M \stackrel{d}{=} aM$ για κάθε $a > 0$.

(β) Να δειχθεί ότι $\mathbf{P}(M \in \{0, \infty\}) = 1$.

8. (Νοεμ. 2017, 5) Έστω $(B_t)_{t \geq 0}$ τυπική (μονοδιάστατη) κίνηση Brown. Για κάθε $t \geq 0$ θέτουμε $M_t := \max\{B_s : s \in [0, t]\}$. Να δειχθεί ότι

(α) $M_t \stackrel{d}{=} \sqrt{t}M_1$

(β) $\mathbf{E}(M_t^2) = t$.

9. (Σεπτ. 2018, 3) Για κάθε $t \in (0, \infty)$ θέτουμε $X_t := \int_0^t \mathbf{1}_{B_s > 0} ds = \lambda(\{s \in [0, t] : B_s > 0\})$.

(α) Να δειχθεί ότι υπάρχει σταθερά $a > 0$ ώστε να ισχύει $X_t \stackrel{d}{=} t^a X_1$ για κάθε $t > 0$.

(β) Να υπολογιστεί η $\mathbf{E}(X_t)$.

10. (Σεπτ. 2018, 5) Για $a > 0$, έστω $T = \inf\{t \geq 0 : |B_t| = a\}$. Να δειχθεί ότι $\mathbf{P}(T < \infty) = 1$ και έπειτα να υπολογιστεί η $E(T)$.

11. (Ιουν. 2012, Τεστ εξάσκησης, 3)

Να υπολογιστούν οι συνδιακυμάνσεις

(α) $\text{Cov}(tB_{t+1}^2, B_t)$ με $t > 0$.

(β)

$$\text{Cov}\left(\int_0^1 tB_t dB_t, \int_0^1 B_t^7 dB_t\right).$$

12. (Σεπτ. 2018, 6) Να δειχθεί ότι για κάθε $t > 0$ ισχύει

$$\mathbf{E}\{\log(1 + B_t^2)\} = \int_0^t \mathbf{E}\left(\frac{1 - B_s^2}{(1 + B_s^2)^2}\right) ds.$$

13. (Φεβρ. 2018, 5) Έστω $(B_t)_{t \geq 0}, (W_t)_{t \geq 0}$ δύο ανεξάρτητες τυπικές μονοδιάστατες κινήσεις Brown. Να υπολογιστούν τα διαφορικά των ανελίξεων

(α) $\cos(tB_t)$,

(β) $B_t^2 e^{\int_0^t s dB_s}$,

(γ) $B_t^2 W_t$.

14. (Σεπτ. 2018, 7) Θεωρούμε τη στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$\begin{aligned} dX_t &= i\sqrt{2t}X_t dB_t - t^2 X_t dt, \\ X_0 &= 1. \end{aligned} \tag{1}$$

(α) Να βρεθεί μια λύση της (1). [Υποδ.: Υπολογίστε το $d(\log X_t)$.]

(β) Για τη λύση που βρέθηκε στο (α), να υπολογιστεί η $\mathbf{E}(X_t)$.

15. (Σεπτ. 2017, 6) Έστω B τυπική κίνηση Brown και $T := \inf\{t > 0 : B_t + t^{-1/2} = 0\}$. Θέτουμε

$$X_t := \frac{1}{t^{-1/2} + B_t}$$

για κάθε $t \in (0, T)$, και $X_0 = 0$. (α) Να δειχθεί ότι η X ικανοποιεί στοχαστική διαφορική εξίσωση της μορφής

$$dX_t = a(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$$

για κατάλληλες συναρτήσεις a, σ .

(β) Να δειχθεί ότι $\mathbf{P}(T < \infty) = 1$.

16. (Σεπτ. 2016, 3) Έστω B τυπική κίνηση Brown.

(α) Έστω $t > 0$, $n \geq 1$ φυσικός, και $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ διαμέριση του $[0, t]$ με $n - 1$ ενδιάμεσα σημεία. Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{E} \left[\left(\sum_{j=1}^n (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2 \right)^2 \right] = t^2 + 2 \sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1})^2.$$

(β) Έστω $t > 0$ και $(\Delta_n)_{n \geq 1}$ ακολουθία διαμερίσεων του $[0, t]$ με $\Delta_n := \{0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \dots < t_n^{(n)} = t\}$ και $\lim_{n \rightarrow \infty} \max\{t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)} : j = 1, 2, \dots, n\} = 0$. Να δειχθεί ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[\left(\sum_{j=1}^n (B_{t_j^{(n)}} - B_{t_{j-1}^{(n)}})^2 \right)^2 \right] = t^2.$$