Στοχαστικός Λογισμός

Ενδιάμεση εξέταση 17 Απριλίου 2021

1. (25 Βαθμοί) (α) Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $\mathbf{E}(X_i) = 0$ για κάθε $i \in \mathbb{N}^+$. Θέτουμε

$$S_0 := 0,$$
$$S_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}^+.$$

Επίσης, θεωρούμε τη διήθηση $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}, \mathcal{F}_n := \sigma(\{X_1, \ldots, X_n\}), n \in \mathbb{N}^+$. Να δειχθεί ότι η ανέλιξη $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι martingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
(β) Αν στο ερώτημα (α) αντικαταστήσουμε την υπόθεση «$\mathbf{E}(X_i) = 0$ για κάθε $i \in \mathbb{N}^+$» με την «$\mathbf{E}(X_1) = 3$ για κάθε $i \in \mathbb{N}^+$», να βρεθεί σταθερά c ώστε η ανέλιξη $Y_n := S_n + cn$ (για κάθε $n \in \mathbb{N}$) να είναι martingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. (25 Βαθμοί) Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}, (Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ submartingales ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Να δειχθεί ότι οι ανελίξεις
(α) $(X_n \vee Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$
(β) $(e^{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$
είναι submartingales ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Για το (β) υποθέτουμε επιπλέον ότι $\mathbf{E}(e^{X_n}) < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

3. (30 Βαθμοί) Έστω B μονοδιάστατη τυπική κίνηση Brown.
(α) Ποια η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $B(2) + B(3) - 2B(6)$;
(β) Να υπολογιστεί η διασπορά της τυχαίας μεταβλητής $B(1)B(3)$.
(γ) Να υπολογιστεί η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής $\int_0^1 B(s)e^{B(2s)}\,ds$.

4. (25 Βαθμοί) Έστω $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty)}$ διήθηση σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.
(α) Πότε μια συνάρτηση $T : \Omega \to [0, \infty]$ λέγεται χρόνος διακοπής; Να δειχθεί ότι κάθε χρόνος διακοπής είναι μετρήσιμη συνάρτηση.
(β) Αν οι S, T είναι χρόνοι διακοπής και $a \in [1, \infty)$, να δειχθεί ότι χρόνοι διακοπής είναι επίσης και οι χρόνοι $S \wedge T, aS$.

Για μια $Z \sim N(0, 1)$ ισχύει $\mathbf{E}(e^{tZ}) = e^{t^2/2}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και $\mathbf{E}(Z^4) = 3$.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι $1\frac{1}{2}$ ώρα. Άριστα είναι το 100. **Καλή επιτυχία!**

Απαντήσεις

1. (β) $c = -3$.

3. (α) $N(0, 13)$. (β) 4. (γ) 1.