Στοχαστικός Λογισμός
Εξέταση 9 Φεβρουαρίου 2015

Στα θέματα 3, 5, παρακάτω, $(B_t)_{t\geq 0}$ είναι μια τυπική (μονοδιάστατη) κίνηση Brown ορισμένη σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

1. (20 Βαθμοί) Έστω $(X_n)_{n\geq 0}, (Y_n)_{n\geq 0}$ martingales ως προς μία διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ οι οποίες επιπλέον ικανοποιούν $X_0 = Y_0 = 0$ και $\mathbf{E}(X_n^2), \mathbf{E}(Y_n^2) < \infty$ για κάθε $n \geq 1$. Δείξτε ότι για κάθε $n \geq 1$ ισχύει

$$\mathbf{E}(X_n Y_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}\{(X_k - X_{k-1})(Y_k - Y_{k-1})\}.$$

[Υπόδειξη: $X_n = \sum_{k=1}^{n}(X_k - X_{k-1})$.]

2. (15 Βαθμοί) Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ μία στοχαστική ανέλιξη με τιμές στο $\mathbb{R}$ και προσαρμοσμένη σε μία διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. Θέτουμε $T = \inf\{k \geq 1 : X_k > 0\}$ Να δειχθεί ότι ο T είναι χρόνος στάσης. Υπενθυμίζεται η σύμβαση $\inf \emptyset = \infty$.

3. (20 Βαθμοί) Να υπολογιστεί η μέση τιμή καθεμιάς από τις εξής τυχαίες μεταβλητές:
(α) $B_1 B_3$
(β) $B_1 B_2 B_3$
(γ) $B_1 B_3 B_6 B_{10}$

4. (20 Βαθμοί) Έστω B, W ανεξάρτητες τυπικές μονοδιάστατες κινήσεις Brown. Να υπολογιστούν τα διαφορικά
(α) $d(e^{tB_t})$,
(β) $d(B_t^2)$,
(γ) $d(\log(B_t^2 + W_t^2))$.

5. (20 Βαθμοί) Να βρεθεί μιά λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$\begin{aligned} dX_t &= X_t \sqrt{t}\, dB_t, \\ X_0 &= 1. \end{aligned}$$

Είναι μοναδική;
[Υπόδειξη: Υπολογίστε το $d(\log X_t)$.]

6. (10 Βαθμοί) Μία μετοχή σήμερα στις 9 Φεβρουαρίου έχει τιμή 12 Ευρώ στην αγορά. Ένας επενδυτής έχει τέσσερα European options σε αυτή τη μετοχή με ημερομηνία άσκησης σήμερα. Πιο συγκεκριμένα, έχει ένα call με τιμή άσκησης 14, ένα call με τιμή άσκησης 11, ένα put με τιμή άσκησης 10, και ένα put με τιμή άσκησης 15. Ποιά είναι η συνολική αξία αυτών των τεσσάρων προϊόντων σήμερα;

Μία $Z \sim N(0,1)$ έχει ροπές περιττής τάξης ίσες με μηδέν και $\mathbf{E}(Z^2) = 1, \mathbf{E}(Z^4) = 3$.

Άριστα είναι το 100. Η διάρκεια της εξέτασης είναι $2\frac{1}{2}$ ώρες.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Απαντήσεις

1. Γράφουμε $X_n = \sum_{k=1}^n (X_k - X_{k-1}), Y_n = \sum_{k=1}^n (Y_k - Y_{k-1})$, οπότε

$$\mathbf{E}(X_n Y_n) = \mathbf{E}\left\{ \sum_{j,k=1}^n (X_k - X_{k-1})(Y_j - Y_{j-1}) \right\} = \sum_{j,k=1}^n \mathbf{E}\{(X_k - X_{k-1})(Y_j - Y_{j-1})\}.$$

Θα δείξουμε ότι στο τελευταίο άθροισμα όλοι οι όροι με $j \neq k$ ισούνται με 0 και άρα θα πάρουμε το ζητούμενο.
Έστω $j < k$. Τότε

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\{(X_k - X_{k-1})(Y_j - Y_{j-1})\} &= \mathbf{E}\big(\mathbf{E}\{(X_k - X_{k-1})(Y_j - Y_{j-1}) \mid \mathcal{F}_{k-1}\}\big) \\ &= \mathbf{E}\big((Y_j - Y_{j-1})\mathbf{E}\{(X_k - X_{k-1}) \mid \mathcal{F}_{k-1}\}\big) \\ &= \mathbf{E}((Y_j - Y_{j-1}) \times 0) = 0.\end{aligned}$$

Η ισότητα $\mathbf{E}\{(X_k - X_{k-1}) \mid \mathcal{F}_{k-1}\} = 0$ ισχύει γιατί η $(X_n)_{n\geq 1}$ είναι martingale. Επίσης, αφού $j \leq k-1$, η $Y_j - Y_{j-1}$ είναι $\mathcal{F}_{k-1}$-μετρήσιμη, οπότε βγαίνει έξω από τη δεσμευμένη μέση τιμή (δεύτερη ισότητα).
Για $j > k$ δουλεύουμε όμοια, και χρησιμοποιούμε το ότι η $(Y_n)_{n\geq 1}$ είναι martingale.

Σημείωση: Δόθηκαν και άλλες λύσεις από παιδιά κατά την εξέταση.

2. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ με $k \geq 1$ έχουμε

$$\{T \leq k\} = \cup_{j=1}^k \{X_j > 0\}.$$

Για $1 \leq j \leq k$, επειδή η X_j είναι $\mathcal{F}_j$-μετρήσιμη, έχουμε ότι $\{X_j > 0\} \in \mathcal{F}_j \subset \mathcal{F}_k$. Έπεται ότι $\{T \leq k\} \in \mathcal{F}_k$.

3. Το σκεπτικό σε αυτή την άσκηση είναι να δουλέψουμε με τις προσαυξήσεις της τυπικής κίνησης Brown. Είναι ανεξάρτητες και ξέρουμε την κατανομή της καθεμίας.
(α)

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(B_1 B_3) &= \mathbf{E}\{B_1(B_1 + B_3 - B_1)\} = \mathbf{E}\{B_1^2\} + \mathbf{E}\{B_1(B_3 - B_1)\} \\ &= 1 + \mathbf{E}\{B_1\}\mathbf{E}\{B_3 - B_1\} = 1.\end{aligned}$$

Εναλλακτικά, $\mathbf{E}(B_1 B_3) = \mathrm{Cov}(B_1, B_3) + \mathbf{E}(B_1)\mathbf{E}(B_3) = 1 \wedge 3 + 0 = 1$.
(β) Θέτουμε $X_1 = B_1, X_2 = B_2 - B_1, X_3 = B_3 - B_2$. Οι X_1, X_2, X_3 είναι ανεξάρτητες με κατανομή $N(0,1)$ η καθεμιά τους. Έπειτα

$$\begin{aligned}B_1 B_2 B_3 &= X_1(X_1 + X_2)(X_1 + X_2 + X_3) = X_1(X_1 + X_2)^2 + X_1(X_1 + X_2)X_3 \\ &= X_1^3 + X_1 X_2^2 + 2X_1^2 X_2 + X_1(X_1 + X_2)X_3.\end{aligned}$$

Όλοι οι όροι στο τελευταίο άθροισμα έχουν μέση τιμή 0. Π.χ.

$$\mathbf{E}\{X_1(X_1 + X_2)X_3\} = \mathbf{E}\{X_1(X_1 + X_2)\}\mathbf{E}\{X_3\} = 0$$

αφού η X_3 είναι ανεξάρτητη από τις X_1, X_2. Άρα $\mathbf{E}(B_1 B_2 B_3) = 0$.
(γ) Όμοια όπως στο (β) θέτουμε

$$\begin{aligned}X_1 &:= B_1 \\ X_2 &:= B_3 - B_1, \\ X_3 &:= B_6 - B_3, \\ X_2 &:= B_{10} - B_6.\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} B_1B_3B_6B_{10} &= X_1(X_1+X_2)(X_1+X_2+X_3)(X_1+X_2+X_3+X_4) \\ &= X_1(X_1+X_2)(X_1+X_2+X_3)^2 + X_1(X_1+X_2)(X_1+X_2+X_3)X_4. \end{aligned}$$

Ο δεύτερος όρος έχει μέση τιμή μηδέν γιατί η X_4 έχει μέση τιμή 0 και είναι ανεξάρτητη από τις X_1, X_2, X_3. Ο πρώτος όρος ισούται με

$$\begin{aligned} X_1(X_1+X_2)\{(X_1+X_2)^2 + 2X_3(X_1+X_2) + X_3^2\} &= X_1(X_1+X_2)^3 + 2X_1(X_1+X_2)^2X_3 \\ &\quad + X_1(X_1+X_2)X_3^2. \end{aligned}$$

Πάλι ο δεύτερος όρος του τελευταίου αθροίσματος έχει μέση τιμή μηδέν. Το άθροισμα των δύο άλλων είναι

$$X_1^4 + 3X_1^3X_2 + 3X_1^2X_2^2 + X_1X_2^3 + X_1^2X_3^2 + X_1X_2X_3^2.$$

Επειδή X_1, X_2, X_3, X_4 είναι ανεξάρτητες και $X_1 \sim N(0,1), X_2 \sim N(0,2), X_3 \sim N(0,3), X_4 \sim N(0,4)$, η μέση τιμή του τελευταίου αθροίσματος είναι

$$3 + 3\times 0 + 3\times 2 + 0 + 3 + 0 = 12.$$

4. (α) Υπάρχει στη λύση της Άσκησης 5 από την Εργασία 3.

(β) Είναι το Παράδειγμα 11.2 των σημειώσεων. Συνοπτικά, ο τύπος Ito δίνει

$$d(B_t^2) = 2B_t\,dB_t + \frac{1}{2}2(dB_t)^2 = 2B_t\,dB_t + dt$$

(γ) Ένας τρόπος είναι ως εξής. Θέτουμε $X_t = B_t^2 + W_t^2$. Τότε με βάση το (β) έχουμε

$$dX_t = 2B_t\,dB_t + 2W_t\,dW_t + 2dt.$$

Άρα η X_t είναι ανέλιξη Ito, και για να βρούμε το $d(\log X_t)$ εφαρμόζουμε την έκδοση IV του τύπου του Ito.

$$\begin{aligned} d(\log X_t) &= \frac{1}{X_t}\,dX_t - \frac{1}{2X_t^2}(dX_t)^2 = \frac{1}{X_t}\,dX_t - \frac{1}{2X_t^2}\{4B_t^2dt + 4W_t^2dt\} \\ &\overset{X_t=B_t^2+W_t^2}{=} \frac{1}{X_t}\,dX_t - \frac{2}{X_t}\,dt = \frac{2}{X_t}\{B_t\,dB_t + W_t\,dW_t\} \end{aligned}$$

5. Ανάλογη του Παραδείγματος 13.1. Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} d(\log X_t) &= \frac{1}{X_t}\,dX_t - \frac{1}{2X_t^2}(dX_t)^2 = \sqrt{t}\,dB_t - \frac{1}{2X_t^2}X_t^2 t dt \\ &= \sqrt{t}\,dB_t - \frac{1}{2}t\,dt. \end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας έχουμε

$$\log X_t - \log X_0 = \int_0^t \sqrt{s}\,dB_s - \frac{t^2}{4},$$

έτσι

$$X_t = e^{-t^2/4}e^{\int_0^t \sqrt{s}\,dB_s}.$$

Για τη μοναδικότητα επικαλούμαστε το Θεώρημα 13.4. Η λύση είναι μοναδική γιατί ο συντελεστής διάχυσης της ΣΔΕ είναι $\sigma(t,x) = x\sqrt{t}$ η οποία σε κάθε σύνολο της μορφής $[0,T]\times\mathbb{R}$ είναι Lipschitz με σταθερά $\sqrt{T}$ και φραγμένη απολύτως από το $\sqrt{T}|x|$. Ο συνελεστής τάσης ισούται με 0.

6. Οι αξίες των τεσσάρων παραγώγων έχουν ως εξής:

- Το call με τιμή άσκησης 14 έχει αξία 0. Δεν ασκείται.
- Το call με τιμή άσκησης 11 έχει αξία 1 (=12-11). Ασκείται.

- Το put με τιμή άσκησης 10 έχει αξία 0. Δεν ασκείται.
- Το put με τιμή άσκησης 15 έχει αξία 3 (=15-12). Ασκείται.

Έτσι η συνολική τους αξία είναι 4.