Στοχαστικός Λογισμός

Εξέταση 25 Ιανουαρίου 2016

Στα θέματα 3, 5, 6, 7 παρακάτω, $(B_t)_{t\geq 0}$ είναι μια τυπική (μονοδιάστατη) κίνηση Brown ορισμένη σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

1. (15 Βαθμοί) Έστω $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ διήθηση σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ και $(X_k)_{k\geq 0}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών στον ίδιο χώρο με τιμές στο $\{-1, 1\}$ και προσαρμοσμένη στην $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\varepsilon \in (0, 1)$ ώστε $\mathbf{E}(X_k \,|\, \mathcal{F}_{k-1}) \geq \varepsilon$ για καθε $k \geq 1$. Θέτουμε $A_0 = 0, A_n = \sum_{k=1}^n X_k$ για καθε $n \geq 1$.

(α) Να δειχθεί ότι η $(A_n)_{n\geq 0}$ είναι submartingale ως προς την $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

(β) Θέτουμε $c = (1-\varepsilon)/(1+\varepsilon)$. Να δειχθεί ότι η $Y_n := c^{A_n}$ είναι supermartingale ως προς την $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

2. (20 Βαθμοί) Έστω B τυπική κίνηση Brown και $\mathcal{F}_t := \sigma(\{B_r : s \in [0, t]\})$ για κάθε $t \geq 0$. Για κάθε $0 \leq s < t$ να υπολογιστεί η δεσμευμένη μέση τιμή $\mathbf{E}\left(B_t e^{B_t} \,|\, \mathcal{F}_s\right)$ ως συνάρτηση των B_s, s, t.

3. (15 Βαθμοί) Έστω $T := \max\{s \in [0, 1] : B_s = 0\}$.

(β) Να δειχθεί ότι $\mathbf{P}(T < 1) = 1$.

(β) Είναι η ανέλιξη $X_t = B_{T+t} - B_T$ τυπική κίνηση Brown; [Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε το (α) και κάντε ένα σχήμα.]

4. (20 Βαθμοί) Έστω B, W δυό ανεξάρτητες κινήσεις Brown και

$$\Delta_n := \{0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots < t_n^{(n)} = 1\}, n \geq 1$$

ακολουθία διαμερίσεων του $[0, 1]$ με $\lim_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0$. Θέτουμε

$$T_n := \sum_{k=1}^{n} (B_{t_k^{(n)}} - B_{t_{k-1}^{(n)}})(W_{t_k^{(n)}} - W_{t_{k-1}^{(n)}})$$

για κάθε $n \geq 1$. Να δειχθεί ότι $T_n \to 0$ στον L^2 καθώς $n \to \infty$.

5. (10 Βαθμοί) Να βρεθεί η μέση τιμή και η διασπορά της τυχαίας μεταβλητής $X := \int_1^2 \sqrt{t} e^{B_t} \, dB_t$.

6. (15 Βαθμοί) Να δειχθεί ότι

$$\int_0^t e^{s/2} \cos B_s \, dB_s = e^{t/2} \sin B_t$$

για κάθε $t > 0$.

7. (15 Βαθμοί) Για $m \in \mathbb{R}$ με $m^2 > 1/2$, θεωρούμε τη στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$\begin{aligned} dX_t &= X_t^{4m^2-1} \, dt + \frac{1}{m} X_t^{2m^2} \, dB_t, \\ X_0 &= 1. \end{aligned}$$

(α) Να βρεθεί μια λύση της.

(β) Να εξεταστεί αν η λύση που βρέθηκε στο (α) μπορεί να οριστεί για κάθε $t \geq 0$.

[Υπόδειξη: Υπολογίστε το διαφορικό $d(X_t^r)$ για κάθε σταθερά $r \in \mathbb{R}$.]

Κάθε $X \sim N(0, \sigma^2)$ έχει ροπογεννήτρια $\mathbf{E}(e^{rX}) = e^{\sigma^2 r^2/2}$ και επομένως $\mathbf{E}(X e^{rX}) = \sigma^2 r e^{\sigma^2 r^2/2}$ για κάθε $r \in \mathbb{R}$.

Άριστα είναι το 100. Η διάρκεια της εξέτασης είναι $2\frac{1}{2}$ ώρες.

Καλή επιτυχία!

Απαντήσεις

2. Θέτουμε $X := B_s, Y := B_t - B_s$. Η X είναι $\mathcal{F}_s$-μετρήσιμη ενώ η Y είναι ανεξάρτητη από την $\mathcal{F}_s$ και έχει κατανομή $N(0, t-s)$. Έτσι η ζητούμενη δεσμευμένη μέση τιμή ισούται με

$$\begin{aligned}\mathbf{E}((X+Y)e^{X+Y} \mid \mathcal{F}_s) &= Xe^X\mathbf{E}(e^Y \mid \mathcal{F}_s) + e^X\mathbf{E}(Ye^Y \mid \mathcal{F}_s) \\ &= Xe^X\mathbf{E}(e^Y) + e^X\mathbf{E}(Ye^Y) = Xe^X e^{(t-s)/2} + e^X(t-s)e^{(t-s)/2}.\end{aligned}$$

3. (α) Επειδή $T \le 1$ από τον ορισμό, το συμπλήρωμα του $\{T < 1\}$ είναι το $\{T = 1\}$ το οποίο είναι το $\{B_1 = 0\}$. Αυτό έχει πιθανότητα 0 γιατί η B_1 έχει κατανομή με πυκνότητα.

(β) Η X δεν είναι κίνηση Brown. Ανάλογη με την ιδέα της Άσκησης 5.9 των σημειώσεων.

5. Ισχύει $\mathbf{E}(X) = 0$ γιατί η $(\sqrt{t}e^{B_t})_{t\in[1,2]}$ είναι στοιχείο του $\mathcal{H}^2[1,2]$ (το δείχνουμε εύκολα αλλά θα φανεί και πιο κάτω). Άρα

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}(X))^2 = \mathbf{E}(X^2) = \int_1^2 te^{2B_t}\,dt = \cdots = \frac{3}{4}e^4 - \frac{1}{4}e^2.$$

Στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την ισομετρία Itô.

6. Με χρήση του κανόνα γινομένου (ή του τύπου του Itô) βρίσκουμε ότι $d(e^{s/2}\sin B_s) = e^{s/2}\cos B_s$, οπότε ολοκληρώνοντας αυτή τη σχέση στο $[0,t]$ και χρησιμοποιώντας το ότι $e^{0/2}\sin B_0 = 0$, παίρνουμε τη ζητούμενη.

7. Η άσκηση αυτή είναι γενίκευση του Παραδείγματος 14.3 των σημειώσεων.

(α) Με χρήση του τύπου του Itô βρίσκουμε ότι

$$d(X_t^r) = \cdots = rX_t^{r-2+4m^2}\left(1 + \frac{r-1}{2m^2}\right)dt + \frac{r}{m}X_t^{r-1+2m^2}\,dB_t.$$

Η επιλογή $r = 2m^2 - 1$ μετατρέπει αυτή την ισότητα σε

$$d(X_t^r) = \frac{r}{m}\,dB_t$$

και ολοκληρώνοντας βρίσκουμε

$$X_t^r = 1 + \frac{r}{m}B_t$$

Ο περιορισμός στο m δίνει ότι $r < 0$. Για μικρά t το δεξί μέλος της εξίσωσης είναι θετικό και βρίσκουμε

$$X_t = \left(1 + \frac{r}{m}B_t\right)^{1/r}. \tag{1}$$

(β) Επειδή ο εκθέτης $1/r$ είναι αρνητικός, ο τύπος δεν έχει νόημα όταν $B_t = -m/r < 0$. Θέτουμε $T := \inf\{t : -m/r\}$, το οποίο είναι πεπερασμένο με πιθανότητα 1. Ο τύπος (1) δίνει λύση μόνο για $t \in [0, T)$.