Στοχαστικός Λογισμός
Τελική Εξέταση, 3 Ιουλίου 2012

Στις παρακάτω ασκήσεις, $(B_t)_{t\geq 0}$ είναι μια τυπική (μονοδιάστατη) κίνηση Brown ορισμένη σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Οι martingales και local martingales αναφέρονται στην διήθηση που παράγει η κίνηση Brown.

1. (20 Βαθμοί) Έστω $(X_i)_{i\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με

$$\mathbf{P}(X_1 = 0) = \mathbf{P}(X_1 = 2) = \frac{1}{2}.$$

Θέτουμε $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ για κάθε $n \geq 1$, και

$$\begin{aligned} R_0 &:= 1, \\ R_n &:= X_1 X_2 \cdots X_n \text{ για } n \geq 1, \\ M_0 &:= 1, \\ M_n &:= R_n^2 - (R_1^2 + \cdots + R_{n-1}^2) \text{ για } n \geq 1. \end{aligned}$$

Να δειχθεί ότι η $(M_n)_{n\geq 0}$ είναι martingale ως προς την $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

2. (20 Βαθμοί) Για $t > 0$ θέτουμε $X_t := \int_0^t \mathbf{1}_{B_s > 0}\, dB_s$. Ποιά είναι η διασπορά της X_t;

3. (30 Βαθμοί) (α) Έστω $u \in C^{2,1}(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ ώστε

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0$$

για κάθε $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$. Να δειχθεί ότι η ανέλιξη $M_t := u(B_t, t), t \geq 0$ είναι local martingale.

(β) Να βρεθούν συνθήκες στις παραγωγίσιμες συναρτήσεις $\alpha, \gamma : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ ώστε η ανέλιξη $Z_t = \alpha(t) e^{\gamma(t) B_t^2}$ να είναι local martingale.

4. (30 Βαθμοί) (α) Έστω $a \in \mathbb{R}$, και $f, g : [0, 1) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες με συνεχή παράγωγο, και με $f(t) \neq 0$ για κάθε $t \in [0, 1)$. Θεωρούμε την ανέλιξη

$$X_t := f(t)\left\{a + \int_0^t g(s)\, dB_s\right\}, \ t \in [0, 1).$$

Να δειχθεί ότι

$$dX_t = \frac{f'(t)}{f(t)} X_t\, dt + Z_t\, dB_t$$

για κατάλληλη ανέλιξη $(Z_t)_{t\geq 0}$.

(β) Για $k > 0$, να λυθεί η στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$\begin{aligned} dX_t &= -\frac{k}{1-t} X_t\, dt + dB_t, \text{ για } t \in [0, 1). \\ X_0 &= 0. \end{aligned}$$

(γ) Για την λύση X από το προηγούμενο ερώτημα, να υπολογιστεί η $\mathrm{Var}(X_t)$ για $t \in [0, 1)$.

Άριστα είναι το 100. Η διάρκεια της εξέτασης είναι $2\frac{1}{2}$ ώρες.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Λύσεις

1. Προφανώς η $(M_n)_{n\geq 0}$ είναι προσαρμοσμένη, και

$$\mathbf{E}|M_n| \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(R_k^2) \leq n2^n < \infty.$$

Επίσης, για $n \geq 1$ έχουμε

$$M_{n+1} - M_n = R_{n+1}^2 - 2R_n^2 = X_{n+1}^2 R_n^2 - 2R_n^2,$$

και παρατηρούμε ότι η ίδια σχέση ισχύει και για $n = 0$. Άρα για $n \geq 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(M_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n) - M_n = \mathbf{E}(M_{n+1} - M_n\,|\,\mathcal{F}_n) &= R_n^2 \mathbf{E}(X_{n+1}^2\,|\,\mathcal{F}_n) - 2R_n^2 \\ &= R_n^2 \mathbf{E}(X_{n+1}^2) - 2R_n^2 = 0,\end{aligned}$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο. Χρησιμοποιήσαμε το ότι η R_n είναι $\mathcal{F}_n$-μετρήσιμη, η X_{n+1} είναι ανεξάρτητη της $\mathcal{F}_n$, και $\mathbf{E}(X_{n+1}^2) = 2$.

2. Η ανέλιξη $(\mathbf{1}_{B_s>0})_{s\in[0,t]}$ είναι στοιχείο του $\mathcal{H}^2[0,t]$ αφού είναι φραγμένη από το 1. Άρα $\mathbf{E}(X_t) = 0$, και

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X_t) = \mathbf{E}(X_t^2) - \{\mathbf{E}(X_t)\}^2 &= \mathbf{E}\left\{\left(\int_0^t \mathbf{1}_{B_s>0}\,dB_s\right)^2\right\} = \mathbf{E}\left\{\int_0^t \left(\mathbf{1}_{B_s>0}\right)^2\,ds\right\} \\ &= \int_0^t \mathbf{P}(B_s > 0)\,ds = \int_0^t \frac{1}{2}\,ds = \frac{t}{2}.\end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε την ισομετρία Itô, και το ότι η B_s έχει κατανομή $N(0,s)$ (η οποία είναι συμμετρική ως προς το 0).

3. (α) Ο τύπος Itô, και με χρήση της υπόθεσης, δίνει ότι

$$dM_t = \frac{\partial f}{\partial t}(B_t,t)\,dt + \frac{\partial u}{\partial x}(B_t,t)\,dB_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(B_t,t)\,dt = \frac{\partial u}{\partial x}(B_t,t)\,dB_t.$$

Επειδή με πιθανότητα 1 η $t \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(B_t,t)$ είναι συνεχής, έχουμε ότι η ανέλιξη $(t,\omega) \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(B_t,t)$ είναι στοιχείο του $\mathcal{H}^2_{LOC}$. Και το συμπέρασμα έπεται από γνωστό θεώρημα (Πρόταση 12.5 στις σημειώσεις).

(β) Θα χρησιμοποιήσουμε την ικανή συνθήκη του (α). Έχουμε ότι $Z_t = u(B_t,t)$ με $u(x,t) = \alpha(t)e^{\gamma(t)x^2}$. Ζητάμε λοιπόν οι α, γ να είναι συνεχώς παραγωγίσιμες, και έπειτα για κάθε $(x,t) \in \mathbb{R}\times(0,\infty)$ να ισχύει

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \\ &= \alpha'(t)e^{\gamma(t)x^2} + \alpha(t)e^{\gamma(t)x^2}\gamma'(t)x^2 + \alpha(t)\gamma(t)\{e^{\gamma(t)x^2} + 2x^2\gamma(t)e^{\gamma(t)x^2}\} \\ &= e^{\gamma(t)x^2}\{\alpha'(t) + \alpha(t)\gamma(t)\} + e^{\gamma(t)x^2}x^2\{\alpha(t)\gamma'(t) + 2\alpha(t)\gamma^2(t)\},\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\{\alpha'(t) + \alpha(t)\gamma(t)\} + x^2\alpha(t)\{\gamma'(t) + 2\gamma^2(t)\} = 0.$$

Αυτό ισοδυναμεί με το να έχουμε

$$\begin{aligned}\alpha'(t) + \alpha(t)\gamma(t) &= 0 \\ \alpha(t)\{\gamma'(t) + 2\gamma^2(t)\} &= 0\end{aligned}$$

για κάθε $t > 0$. Και αυτό είναι δεκτή απάντηση στο θέμα.

Εδώ όμως θα λύσουμε αυτές τις εξισώσεις. Η πρώτη, ισοδυναμεί με $(\alpha(t)e^{\int_0^t \gamma(s)\,ds})' = 0$, δηλαδή υπάρχει σταθερά $C_1 \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\alpha(t) = C_1 e^{-\int_0^t \gamma(s)\,ds}$$

για κάθε $t \geq 0$.

• Αν $C_1 = 0$ τότε έχουμε $\alpha \equiv 0$, γ μπορεί να είναι οποιαδήποτε συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση, και $Z_t = 0$ για κάθε $t \geq 0$.

• Αν $C_1 \neq 0$, τότε $\alpha(t) \neq 0$, και η δεύτερη εξίσωση του συστήματος γίνεται

$$\gamma'(t) + 2\gamma^2(t) = 0.$$

Κατά τα γνωστά από διαφορικές εξισώσεις, η εξίσωση έχει ως λύσεις την $\gamma \equiv 0$, και τις $(\gamma_C)_{C>0}$ όπου

$$\gamma_C(t) = \frac{1}{2t + C}$$

για κάθε $t \geq 0$. [Πρακτικά, αν $\gamma(t) \neq 0$ για κάθε $t > 0$, τότε η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$\gamma^{-2}(t)\gamma'(t) = -2 \Leftrightarrow (1/\gamma(t))' = 2 \Leftrightarrow 1/\gamma(t) = 2t + C \Leftrightarrow \gamma(t) = \frac{1}{2t + C},$$

και επειδή η γ ορίζεται στο $[0, \infty)$ έπεται ότι $C > 0$.] Τότε $\int_0^t \gamma_C(s)ds = \{\log(2t + C) - \log C\}/2$. Στην περίπτωση λοιπόν που $C_1 \neq 0$ έχουμε για το ζευγάρι α, γ τις λύσεις

$$\alpha(t) = \frac{C_2}{\sqrt{2t + C}},$$
$$\gamma(t) = \frac{1}{2t + C},$$

για σταθερές $C > 0, C_2 \neq 0$.

4. (α) Εφαρμόζοντας τον κανόνα για διαφορικό γινομένου (Πρόταση 13.7), βρίσκουμε

$$\begin{aligned} dX_t &= f'(t)\left\{a + \int_0^t g(s)\,dB_s\right\} dt + f(t)g(t)dB_t + f'(t)g(t)dtdB_t \\ &= \frac{f'(t)}{f(t)} X_t dt + f(t)g(t)dB_t, \end{aligned}$$

που είναι η ζητούμενη με $Z_t = f(t)g(t)$.

(β) Με βάση το (α), η

$$X_t := f(t)\left\{a + \int_0^t g(s)\,dB_s\right\}$$

ικανοποιεί την πρώτη εξίσωση αρκεί οι f, g να ικανοποιούν

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = -\frac{k}{1-t},\ f(t)g(t) = 1.$$

Η πρώτη από αυτές έχει λύσεις ακριβώς τις συναρτήσεις της μορφής $f(t) = C(1-t)^k$ με $C \neq 0$ σταθερά [Η επίλυση ξεκινάει παρατηρώντας ότι εξίσωση γράφεται $(\log|f(t)|)' = k(\log(1-t))'$]. Άρα $g(t) = (1-t)^{-k}/C$, και η X_t γίνεται

$$X_t = C(1-t)^k\left\{a + C^{-1}\int_0^t (1-s)^{-k}\,dB_s\right\}.$$

Επίσης, ισχύει $X_0 = 0$ αν $a = 0$. Οπότε μία λύση της δοσμένης στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης είναι η

$$X_t = (1-t)^k \int_0^t (1-s)^{-k}\,dB_s,\ t \in [0, 1).$$

Είναι μάλιστα η μοναδική λύση γιατί οι συνθήκες του θεωρήματος μοναδικότητας ικανοποιούνται.

(γ) Για $t \in [0,1)$ η ανέλιξη $((1-s)^{-k})_{s\in[0,t]}$ είναι στοιχείο του $\mathcal{H}^2[0,t]$, οπότε $\mathbf{E}(X_t) = 0$. Άρα χρησιμοποιώντας την ισομετρία Itô, έχουμε

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(X_t) = \mathbf{E}(X_t^2) = (1-t)^{2k}\mathbf{E}\left\{\left(\int_0^t (1-s)^{-k}\, dB_s\right)^2\right\} = (1-t)^{2k}\mathbf{E}\left\{\int_0^t (1-s)^{-2k}\, ds\right\} \\ = (1-t)^{2k}\int_0^t (1-s)^{-2k}\, ds.\end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό του τελευταίου ολοκληρώματος, διακρίνουμε τις περιπτώσεις $k \neq 1/2$ και $k = 1/2$.