Στοχαστικός Λογισμός
Εξέταση 22 Ιουλίου 2014

1. (25 Βαθμοί) Έστω $p \in (1/2, 1)$ δεδομένο, και $(X_k)_{k \geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με

$$P(X_1 = 1) = p,\ P(X_1 = -1) = 1 - p =: q.$$

Θεωρούμε την ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $(S_n)_{n \geq 0}$, με $S_0 := 0, S_n := X_1 + \cdots + X_n$ για $n \geq 1$, και την διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ με $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}, \mathcal{F}_n := \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ για $n \geq 1$. Επίσης, για $r \in \mathbb{Z}$ θέτουμε $T_r := \min\{k \geq 0 : S_k = r\}$.

(α) Να δειχθεί ότι η ακολουθία $(W_n)_{n \geq 0}$ με $W_n := S_n - (p - q)n$ είναι martingale ως προς την $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$.

(β) Να δειχθεί ότι για κάθε θετικό ακέραιο r ισχύει $\mathbf{P}(T_r < \infty) = 1$.

2. (30 Βαθμοί) Έστω B τυπική μονοδιάστατη κίνηση Brown.

(α) Να δειχθεί ότι για κάθε $s, t \geq 0$ ισχύει ότι

$$\mathrm{Cov}(B_s, B_t) = s \wedge t.$$

(β) Για κάθε $t \geq 0$ θέτουμε $X_t := B_{2t} - B_t$. Για $t > 0$ δεδομένο, ποιά είναι η κατανομή της X_t; Είναι η ανέλιξη $(X_t)_{t \geq 0}$ τυπική κίνηση Brown;

3. (25 Βαθμοί) Έστω B, W ανεξάρτητες μονοδιάστατες τυπικές κινήσεις Brown. Για κάθε $t \geq 0$ θεωρούμε τη σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_t := \sigma(\{B_s, W_s : s \in [0, t]\})$.

(α) Να δειχθεί ότι η ανέλιξη $(B_t W_t)_{t \geq 0}$ είναι martingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.

(β) Να δειχθεί ότι η $(B_t^2 W_t^2)_{t \geq 0}$ είναι ανέλιξη Ito, και να προσδιοριστούν τα τμήματα τάσης και διάχυσης.

4. (25 Βαθμοί) (α) Έστω $a, b, x_0 \in \mathbb{R}$ με $a \neq 0$. Να λυθεί η στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$\begin{aligned} dX_t &= (-aX_t + b)\, dt + \sigma\, dB_t, \\ X_0 &= x_0. \end{aligned}$$

Υποδ.:Υπολογίστε το $d(e^{at} X_t)$.

(β) Για τη λύση X από το (α), να δειχθεί ότι

$$\mathbf{E}(X_t) = e^{-at} x_0 + \frac{b}{a}(1 - e^{-at})$$

για κάθε $t \geq 0$.

Άριστα είναι το 100. Η διάρκεια της εξέτασης είναι $2\frac{1}{2}$ ώρες.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Σκιαγράφημα λύσεων

1. (β) Από το θεώρημα επιλεκτικής στάσης, για κάθε $n \geq 1$ ισχύει

$$(p-q)\mathbf{E}(T_r \wedge n) = \mathbf{E}(W_{T_t \wedge n}) \leq r.$$

Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε $\mathbf{E}(T_r) \leq r/(p-q) < \infty$ (χρησιμοποιούμε το ότι $p-q > 0$). Άρα ...

2. (β) $X_t \sim N(0,t)$ αφού $2t - t = t$. Η X δεν είναι κίνηση Brown. Χρησιμοποιώντας τη διγραμμικότητα της Cov και το (α), υπολογίζουμε

$$\mathrm{Cov}(X_s, X_t) = (2s) \wedge (2t) - (2s) \wedge t - s \wedge (2t) + s \wedge t = 3(s \wedge t) - (2s) \wedge t - s \wedge (2t)$$

Για την επιλογή $t = 2s > 0$ η τελευταία ποσότητα ισούται με 0 (και όχι $s \wedge t = s$), το οποίο είναι αναμενόμενο αφού $X_s = B_{2s} - B_s, X_{2s} = B_{4s} - B_{2s}$ είναι προσαυξήσεις της B σε ξένα διαστήματα, και άρα ανεξάρτητες.

3. (α) Για $0 \leq s \leq t$ έχουμε

$$\begin{aligned} B_t W_t &= (B_s + B_t - B_s)(W_s + W_t - W_s) \\ &= B_s W_s + B_s(W_t - W_s) + W_s(B_t - B_s) + (W_t - W_s)(B_t - B_s) \end{aligned}$$

Έπειτα $\mathbf{E}(B_s W_s \,|\, \mathcal{F}_s) = B_s W_s$, και

$$\mathbf{E}(B_s(W_t - W_s) \,|\, \mathcal{F}_s) = B_s \mathbf{E}(W_t - W_s \,|\, \mathcal{F}_s) = B_s \mathbf{E}(W_t - W_s) = 0$$

αφού η $W_t - W_s$ είναι ανεξάρτητη από την $\mathcal{F}_s$. Όμοια και οι άλλοι δύο όροι εχουν δεσμευμένη μέση τιμή μηδέν ως προς την $\mathcal{F}_s$.

(β)

$$\begin{aligned} d(B_s^2 W_s^2) &= d(B_s^2) W_s^2 + B_s^2 d(W_s^2) + d(B_s^2) d(W_s^2) \\ &= (2B_s \, dB_s + ds) W_s^2 + B_s^2 (2W_s \, dW_s + ds) + 0 \\ &= (B_s^2 + W_s^2) \, ds + 2B_s W_s^2 \, dB_s + 2W_s B_s^2 \, dW_s \end{aligned}$$

Στην δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε τον τύπο του Ito και τους γνωστούς κανόνες πολλαπλασιασμού διαφορικών (π.χ., $dB_s dW_s = 0$). Σε ολοκληρωτική μορφή η παραπάνω σχέση γράφεται

$$B_t^2 W_t^2 = \int_0^t (B_s^2 + W_s^2) \, ds + 2 \int_0^t B_s W_s^2 \, dB_s + 2 \int_0^t W_s B_s^2 \, dW_s$$

4. (α)

$$d(e^{at} X_t) = ... = b e^{at} \, dt + \sigma e^{at} \, dB_t$$

Ολοκληρώνοντας, βρίσκουμε

$$X_t = e^{-at} x_0 + \frac{b}{a}(1 - e^{-at}) + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} \, dB_s.$$