

Στοχαστικός Λογισμός
Εξέταση 2 Οκτωβρίου 2014

Στις ασκήσεις 2-5, B είναι μια τυπική μονοδιάστατη κίνηση Brown.

1. (20 Βαθμοί) Έστω $(X_n)_{n \geq 1}$ martingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ ώστε οι $X_n \geq 0$ για κάθε $n \geq 1$. Ναδειχθεί ότι

$$\mathbf{E}(X_3 X_2 X_1) \geq \mathbf{E}(X_1^3).$$

2. (20 Βαθμοί) Για $t > 0$, να βρεθεί η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $B_{2t} + B_t$.

3. (20 Βαθμοί) Ποιές από τις παρακάτω ανελίξεις είναι και ποιές δεν είναι τυπικές κινήσεις Brown;

(α) $X_1(t) := \frac{1}{3}B_{3t}$.

(β) $X_2(t) := \frac{1}{2}B_{4t}$.

(γ) $X_3(t) := B_{t^2+t} - B_{t^2}$.

(δ) $X_4(t) := -B_t$.

4. (20 Βαθμοί) Να εκφραστεί το στοχαστικό ολοκλήρωμα $\int_0^t B_s^3 dB_s$ ως συνάρτηση του $\int_0^t B_s^2 ds$ και της τιμής B_t .

5. (20 Βαθμοί) (α) Έστω $a \in \mathbb{R}$ με $a \neq 0$. Να λυθεί η στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dX_t = aX_t dt + \sqrt{t} dB_t,$$

$$X_0 = 1.$$

Υποδ.: Υπολογίστε το $d(e^{-at} X_t)$.

(β) Για τη λύση X από το (α), να υπολογιστεί η $\text{Var}(X_t)$ για κάθε $t \geq 0$.

Άριστα είναι το 100. Η διάρκεια της εξέτασης είναι $2\frac{1}{2}$ ώρες.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Απαντήσεις

2. Ειδική περίπτωση άσκησης από τις σημειώσεις. $B_{2t} + B_t = (B_{2t} - B_t) + 2B_t \sim N(0, 2t - t + 4t)$. Οι $(B_{2t} - B_t), 2B_t$ είναι ανεξάρτητες.

3. Οι $(\beta), (\delta)$ είναι. Οι $(\alpha), (\gamma)$ δεν είναι.

4. Τύπος Ito στην B_t^4 .

$$d(B_t^4) = 4B_t^3 dB_t + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4B_t^2 dt.$$

Σε ολοκληρωτική μορφή, αφού $B_0 = 0$, γράφεται

$$B_t^4 = 4 \int_0^t B_s^3 dB_s + 6 \int_0^t B_s^2 ds.$$

5. (α)

$$d(e^{-at} X_t) = \dots = \sigma e^{-at} \sqrt{t} dB_t$$

Ολοκληρώνοντας, βρίσκουμε

$$X_t = e^{at} + e^{at} \int_0^t e^{-as} \sqrt{s} dB_s.$$

(β)

$$\text{Var}(X_t) = \frac{e^{2at} - 1 - 2at}{(2a)^2}$$