Στοχαστικός Λογισμός
Εξέταση 3 Σεπτεμβρίου 2015

Στα θέματα 3, 5, 6 παρακάτω, $(B_t)_{t\geq 0}$ είναι μια τυπική (μονοδιάστατη) κίνηση Brown ορισμένη σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

1. (20 Βαθμοί) Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας, και $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ μια σ-άλγεβρα. Για $X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ και $Y \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$, να δειχθεί ότι
(α) $\mathbf{E}(X\mathbf{E}(X\,|\,\mathcal{G})) = \mathbf{E}\{\mathbf{E}(X\,|\,\mathcal{G})^2\}$,
(β)
$$\mathbf{E}\{(X-Y)^2\} = \mathbf{E}\{(X-\mathbf{E}(X\,|\,\mathcal{G}))^2\} + \mathbf{E}\{(\mathbf{E}(X\,|\,\mathcal{G})-Y)^2\}.$$

2. (15 Βαθμοί) Έστω $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών σε χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ με $\mathbf{E}(X_n) = 0, \mathbf{E}(X_n^2) = 1$ για κάθε $n \geq 1$. Θέτουμε $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ για κάθε $n \geq 1$, και
$$\begin{aligned} &S_0 := 0, \\ &S_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n \qquad \text{για } n \geq 1, \\ &A_n := S_n^2 - n \qquad \text{για } n \geq 0. \end{aligned}$$
Να δειχθεί ότι η $(A_n)_{n\geq 0}$ είναι martingale ως προς την $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

3. (30 Βαθμοί) (α) Να υπολογιστεί η συνδιακύμανση $\mathrm{Cov}(B_t, B_s^3)$ για $0 \leq s < t$.
(β) Ποιά η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $B_1 + B_2 + B_3$;
(γ) Για την τυχαία μεταβλητή $Y := \int_0^1 t^2\,dB_t$ να υπολογιστούν οι μέσες τιμές $\mathbf{E}(Y), \mathbf{E}(Y^2)$.

4. (15 Βαθμοί) Έστω B, W ανεξάρτητες τυπικές μονοδιάστατες κινήσεις Brown. Να υπολογιστούν τα διαφορικά
(α) $d(\cos B_t)$,
(β) $d(B_t^2 W_t)$,

5. (15 Βαθμοί) Να δειχθεί ότι η ανέλιξη $X_t := t^2 B_t - 2\int_0^t sB_s\,ds, t \geq 0$ είναι martingale ως προς την συνήθη διήθηση $\mathcal{F}_t := \sigma(\{B_s : s \in [0,t]\}), t \geq 0$.

6. (15 Βαθμοί) Να βρεθεί μιά λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης
$$\begin{aligned} dX_t &= -\frac{1}{1+t}X_t\,dt + \frac{1}{1+t}dB_t, \\ X_0 &= 0, \end{aligned}$$
[Υπόδειξη: Υπολογίστε το $d((1+t)X_t)$.]

Μία $Z \sim N(0,1)$ έχει ροπές περιττής τάξης ίσες με μηδέν και $\mathbf{E}(Z^2) = 1, \mathbf{E}(Z^4) = 3$.

Άριστα είναι το 100. Η διάρκεια της εξέτασης είναι $2\frac{1}{2}$ ώρες.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!