Στοχαστικός Λογισμός

Εξέταση 1 Σεπτεμβρίου 2016

Στα θέματα 3-7 παρακάτω, $(B_t)_{t\geq 0}, (W_t)_{t\geq 0}$ είναι ανεξάρτητες τυπικές (μονοδιάστατες) κινήσεις Brown ορισμένες σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

1. (15 Βαθμοί) Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας, $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ σ-άλγεβρες ώστε $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}$ και $X : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή με $\mathbf{E}|X| < \infty$. Να δειχθεί ότι:
(α) $\mathbf{E}(\mathbf{E}(X \,|\, \mathcal{F}_1) \,|\, \mathcal{F}_2) = \mathbf{E}(X \,|\, \mathcal{F}_1)$,
(β) $\mathbf{E}(\mathbf{E}(X \,|\, \mathcal{F}_2) \,|\, \mathcal{F}_1) = \mathbf{E}(X \,|\, \mathcal{F}_1)$.

2. (15 Βαθμοί) Έστω $(\mathcal{F})_{n\geq 0}$ διήθηση στον χώρο πιθανοτητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ και $(X_n)_{n\geq 0}$ προσαρμοσμένη ακολουθία τυχαίων μεταβλητών με $\mathbf{E}|X_n| < \infty$ και $\mathbf{E}(X_n) = 1$ για κάθε $n \geq 0$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχουν $a, b \in (0, 1)$ ώστε $\mathbf{E}(X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n) = aX_n + bX_{n-1}$ για κάθε $n \geq 1$.

(α) Να δειχθεί ότι $a + b = 1$.

(β) Να βρεθεί $c \in \mathbb{R}$ ώστε η ακολουθία $M_n := cX_n + X_{n-1}, n \geq 1$ να είναι martingale ως προς την $(\mathcal{F})_{n\geq 1}$.

3. (20 Βαθμοί) (α) Έστω $t > 0$, $n \geq 1$ φυσικός, και $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$ διαμέριση του $[0, t]$ με $n - 1$ ενδιάμεσα σημεία. Να δειχθεί ότι

$$\mathbf{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{n}(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2\right)^2\right] = t^2 + 2\sum_{j=1}^{n}(t_j - t_{j-1})^2.$$

(β) Έστω $t > 0$ και $(\Delta_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία διαμερίσεων του $[0, t]$ με $\Delta_n := \{0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots < t_n^{(n)} = t\}$ και $\lim_{n\to\infty} \max\{t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)} : j = 1, 2, \dots, n\} = 0$. Να δειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{n}(B_{t_j^{(n)}} - B_{t_{j-1}^{(n)}})^2\right)^2\right] = t^2.$$

4. (15 Βαθμοί) Να δειχθεί ότι η τυχαία μεταβλητή $X := \int_0^1 |B_t|^{1/2}\, dB_t$ είναι καλώς ορισμένη και να βρεθεί η μέση τιμή και η διασπορά της.

5. (20 Βαθμοί) Να βρεθούν τα διαφορικά
(α) $d(B_t^3)$.
(β) $d(e^{t/2}\sin(B_t))$.
(γ) $d(\sin(B_t W_t))$.

6. (20 Βαθμοί) Να βρεθεί μια λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$dX_t = \sqrt{1 - X_t^2}\, dB_t - \frac{1}{2}X_t\, dt,$$
$$X_0 = 0.$$

[Υπόδειξη: Η $X_t = f(B_t)$ ικανοποιεί την πρώτη σχέση αρκεί η f να ικανοποιεί δυο διαφορικές εξισώσεις.]

Υπενθυμίσεις: 1) Για κάθε τυχαία μεταβλητή $Z \sim N(0, 1)$ ισχύει $\mathbf{E}|Z| = \sqrt{2/\pi}$ και $\mathbf{E}(Z^4) = 3$.
2) $(\sin^{-1} x)' = 1/\sqrt{1 - x^2}$, όπου $\sin^{-1} : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ είναι η αντίστροφη συνάρτηση της sin.

Άριστα είναι το 100. Η διάρκεια της εξέτασης είναι $2\frac{1}{2}$ ώρες.

Καλή επιτυχία!