Στοχαστικός Λογισμός
21 Σεπτεμβρίου 2012

Στις παρακάτω ασκήσεις, $(B_t)_{t\geq 0}$ είναι μια τυπική (μονοδιάστατη) κίνηση Brown ορισμένη σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

1. (25 Βαθμοί) Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ μια σ-άλγεβρα, και $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ με $X(\omega) > 0$ για κάθε $\omega \in \Omega$. Να δειχθεί ότι:

(α) $\mathbf{E}(X \mid \mathcal{G}) > 0$ με πιθανότητα 1.

(β) $\mathbf{E}\left(\frac{X}{\mathbf{E}(X \mid \mathcal{G})}\right) = 1$.

2. (20 Βαθμοί) Έστω $f, g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ πυκνότητες (δηλαδή μη αρνητικές, Borel μετρήσιμες συναρτήσεις με $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)\, dx = 1$), και $(X_i)_{i\geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων ισόνομων τυχαίων μεταβλητών καθεμία με πυκνότητα g. Θέτουμε $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ για κάθε $n \geq 1$, και

$$
\begin{aligned}
M_0 &:= 1, \\
M_n &:= \frac{f(X_1)f(X_2)\cdots f(X_n)}{g(X_1)g(X_2)\cdots g(X_n)} \qquad \text{για } n \geq 1.
\end{aligned}
$$

Να δειχθεί ότι η $(M_n)_{n\geq 0}$ είναι martingale ως προς την $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

3. (25 Βαθμοί) Για τις διάφορες τιμές του $c \in \mathbb{R}$, να υπολογιστεί το όριο $\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}(B_t > t^c)$.

4. (20 Βαθμοί) Έστω $a \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε την ανέλιξη X με $X_t := e^{-at}e^{B_t}$ για κάθε $t > 0$.

(α) Για ποιά $a \in \mathbb{R}$ είναι η X στοιχείο του $\mathcal{H}^2$;

(β) Για τα a του προηγούμενου ερωτήματος, να υπολογιστεί η διασπορά της τυχαίας μεταβλητής $Y_a := \int_0^\infty X_s\, dB_s$.

5. (20 Βαθμοί) Να βρεθεί μιά λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$
\begin{aligned}
dX_t &= dt + 2\sqrt{X_t}\, dB_t, \ \text{για } t \in [0, \infty), \\
X_0 &= 1.
\end{aligned}
$$

[Υπόδειξη: Αναζητήστε λύση της μορφής $X_t = f(B_t)$.]

Άριστα είναι το 100. Η διάρκεια της εξέτασης είναι $2\frac{1}{2}$ ώρες.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!