Στοχαστικός Λογισμός

Εξέταση 5 Φεβρουαρίου 2018

Στα θέματα 4, 6 πιο κάτω, η $(B_t)_{t\geq 0}$ είναι τυπική μονοδιάστατη κίνηση Brown.

1. (20 Βαθμοί) Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας, $(X_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών σε αυτόν, $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \ldots, X_n)$, και $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ για κάθε $n \geq 1$. Υποθέτουμε ότι η $(S_n)_{n\geq 1}$ είναι martingale ως προς την $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$.
(α) Να δειχθεί ότι $\mathbf{E}(X_{n+k} \mid \mathcal{F}_n) = 0$ για κάθε $n, k \in \mathbb{N}^+$.
(β) Αν επιπλέον $\mathbf{E}(X_k^2) < \infty$ για κάθε $k \in \mathbb{N}^+$, τότε $\mathbf{E}(X_i X_j) = 0$ για κάθε $i, j \in \mathbb{N}^+$ με $i \neq j$.

2. (20 Βαθμοί) Έστω $N \in \mathbb{N}^+$ σταθερό. Θεωρούμε μια πόλη N ατόμων στην οποία υπάρχουν ακριβώς δυό μπυραρίες Α και Β. Κάθε άτομο, κάθε μέρα επιλέγει να βγει για μπύρα σε μία ακριβώς από τις Α, Β ως εξής. Αν μια μέρα $n\, (\leq N)$ άτομα έχουν επιλέξει την Α, τότε την επόμενη κάθε άτομο επιλέγει την Α με πιθανότητα n/N και τη Β με πιθανότητα $1 - (n/N)$. Υποθέτουμε ότι την πρώτη μέρα που αρχίζουμε να καταγράφουμε τις επιλογές των ατόμων, $u \in (0, N) \cap \mathbb{N}$ άτομα επιλέγουν την Α και $v := N - u$ επιλέγουν τη Β (u, v δεδομένοι σταθεροί αριθμοί). Έστω A_n ο αριθμός ατόμων που επιλέγουν την Α την n-οστή ημέρα για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$.
(α) Για $n \in \mathbb{N}^+$, ποια η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $A_{n+1}|A_n$;
(β) Να δειχθεί ότι η ανέλιξη $X_n := A_n/N, n \in \mathbb{N}^+$ είναι martingale ως προς τη διήθηση που παράγει η $(A_n)_{n\geq 1}$.
(γ) Να δειχθεί ότι το όριο $X := \lim_{n\to\infty} X_n$ υπάρχει και είναι τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\{0, 1\}$.
(δ) Ποια η μέση τιμή της X και ποια η κατανομή της;

3. (15 Βαθμοί) Έστω $(B_t)_{t\geq 0}$ τυπική (μονοδιάστατη) κίνηση Brown. Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ θέτουμε $T_a := \inf\{s \geq 0 : B_s = a\}$. Να δειχθεί ότι για κάθε $a > 0$ ισχύει $T_a \stackrel{d}{=} \frac{a^2}{Z^2}$ όπου $Z \sim N(0, 1)$.

4. (15 Βαθμοί) Να δειχθεί ότι οι τυχαίες μεταβλητές $X := \int_0^1 B_s\, ds, Y := \int_0^1 B_s\, dB_s$ είναι καλά ορισμένες και να υπολογιστεί η μέση τιμή και η διασπορά τους.

5. (20 Βαθμοί) Έστω $(B_t)_{t\geq 0}, (W_t)_{t\geq 0}$ δυό ανεξάρτητες τυπικές μονοδιάστατες κινήσεις Brown. Να υπολογιστούν τα διαφορικά των ανελίξεων
(α) $\cos(tB_t)$,
(β) $B_t^2 e^{\int_0^t s\, dB_s}$,
(γ) $B_t^2 W_t$.

6. (20 Βαθμοί) Θεωρούμε τη στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$\begin{aligned} dX_t &= a dt + cX_t dB_t, \\ X_0 &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

όπου $a, c \in \mathbb{R}$ σταθερές.
(α) Θέτουμε $A_t := e^{-cB_t + \frac{1}{2}c^2 t}$ για κάθε $t \geq 0$. Να υπολογιστεί το διαφορικό $d(A_t X_t)$ και κατόπιν να λυθεί η (1).
(β) Είναι η λύση της (1) που βρήκαμε στο (α) μοναδική;

Άριστα είναι το 100. Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες.

Καλή επιτυχία!

Σχόλια

1. (α) Από τα δεδομένα έχουμε $\mathbf{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$ οπότε

$$\mathbf{E}(X_{n+k} \mid \mathcal{F}_n) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(X_{n+k} \mid \mathcal{F}_{n+k-1}) \mid \mathcal{F}_n) = 0.$$

(β) Έστω ότι $i < j$. Τότε $\mathbf{E}(X_i X_j) = \mathbf{E}(\mathbf{E}(X_i X_j \mid \mathcal{F}_i)) = \mathbf{E}(X_i \mathbf{E}(X_j \mid \mathcal{F}_i)) = 0$ με βάση το (α).

2. (α) $A_{n+1}|A_n \sim \mathrm{Bin}(N, p)$ με $p = A_n/N$.

(β) Έστω $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$. Η X_n είναι προφανώς $\mathcal{F}_n$-μετρήσιμη και $\mathbf{E}|X_n| < \infty$ αφού $0 \leq X_n \leq 1$. Έπειτα

$$\mathbf{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \frac{1}{N}\mathbf{E}(A_{n+1} \mid A_n) = \frac{1}{N} N \frac{A_n}{N} = X_n.$$

Στην πρώτη ισότητα χρησιμοποιούμε το ότι $X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n \stackrel{d}{=} X_{n+1} \mid A_n$. Στην δεύτερη, το ερώτημα (α) και το ότι η μέση τιμή μιας $Y \sim \mathrm{Bin}(N, p)$ είναι Np.

(γ) Η $(A_n)_{n\geq 1}$ είναι ανέλιξη Markov με χώρο καταστάσεων $S = \{0, 1, \ldots, N\}$. Οι κλάσεις επικοινωνίας είναι οι $C_1 = \{0\}, C_2 = \{1, 2, \ldots, N-1\}, C_3 = \{N\}$. Οι C_1, C_3 είναι απορροφητικές. Επειδή η C_2 είναι πεπερασμένη και από αυτήν είναι δυνατή η μετάβαση στις C_1, C_3, έπεται ότι με πιθανότητα 1, η A_n θα βγει από την C_2 και θα σταθεροποιηθεί σε μία από τις τιμές 0 ή N. Έχουμε έτσι το ζητούμενο.

(δ) Στην $\mathbf{E}(X_n) = \mathbf{E}(X_1)$ παίρνουμε $n \to \infty$ και με εφαρμογή του θεωρήματος φραγμένης σύγκλισης έχουμε $\mathbf{E}(X) = u/N$. Δηλαδή $\mathbf{P}(X = 1) = u/N$. Άρα η X ακολουθεί την κατανομή Bernoulli με παράμετρο $\hat{p} = u/N$.

3. Για κάθε $t \geq 0$ έχουμε

$$\mathbf{P}(T_a \leq t) = \mathbf{P}(M_t \geq a) = \mathbf{P}(|B_t| \geq a) = \mathbf{P}(\sqrt{t}|Z| \geq a) = \mathbf{P}\left(\frac{a^2}{Z^2} \leq t\right).$$

Δηλαδή οι συναρτήσεις κατανομής των $T_a, a^2/Z^2$ ισούνται για $t \geq 0$ και προφανώς και για $t < 0$. Άρα οι $T_a, a^2/Z^2$ έχουν την ίδια κατανομή.

4. $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y) = 0$ και

$$\mathbf{E}(X^2) = \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{E}(B_s B_t)\, ds dt = \int_0^1 \int_0^1 (s \wedge t)\, ds dt = \ldots = \frac{1}{3},$$
$$\mathbf{E}(Y^2) = \mathbf{E} \int_0^1 B_s^2\, ds = \int_0^1 s\, ds = \frac{1}{2}.$$

Στην πρώτη ισότητα της δεύτερης γραμμής εφαρμόσαμε την ισομετρία Itô.

6. Υπολογίζουμε

$$dA_t = A_t(-c\, dB_t + c^2\, dt),$$
$$d(A_t X_t) = \ldots = a A_t\, dt,$$

οπότε ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση (και επειδή $X_0 = 0$) παίρνουμε

$$X_t = a A_t^{-1} \int_0^t A_s\, ds.$$

(β) Η μοναδικότητα προκύπτει και από τον τρόπο εύρεσης της λύσης στο (α) αλλά και επειδή οι συνθήκες του θεωρήματος μοναδικότητας ικανοποιούνται.

Σχόλιο: Στο ερώτημα 2(γ) μπορεί κανείς να αποφύγει τη χρήση θεωρίας αλυσίδων Markov και να επικαλεστεί το εξής επιχείρημα.

Είναι σαφές ότι αν για κάποιο n η A_n πάρει την τιμή 0 ή 1 θα παραμείνει σταθερή σε αυτή την τιμή από εκεί και έπειτα. Έστω λοιπόν $E_n := \{A_n \notin \{0, 1\}\}$ για κάθε $n \geq 1$. Η $(E_n)_{n\geq 1}$ είναι φθίνουσα ακολουθία (με βάση την προηγούμενη παρατήρηση) και θέλουμε να δείξουμε ότι το γεγονός $\cap_{n\geq 1} E_n$ έχει πιθανότητα 0. Παρατηρούμε ότι

$$\mathbf{P}(E_{n+1} \,|\, E_n) \leq 1 - 2(1/N)^N =: \theta < 1.$$

[Αυτό γιατί αν κατά τη n-οστή μέρα $i\,(\neq 0, N)$ άτομα έχουν διαλέξει την Α, τότε

$$\mathbf{P}(E_{n+1} \,|\, A_n = i) = 1 - \mathbf{P}(A_{n+1} = 0) - \mathbf{P}(A_{n+1} = N) = 1 - (1 - (i/N))^N - (i/N)^N \leq 1 - 2(1/N)^N,$$

και άρα

$$\mathbf{P}(E_{n+1} \cap E_n) = \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{P}(E_{n+1} \cap \{A_n = i\}) = \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{P}(E_{n+1} \mid A_n = i)\,\mathbf{P}(A_n = i) \leq \theta \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{P}(A_n = i) = \theta\,\mathbf{P}(E_n).]$$

Άρα $\mathbf{P}(E_n) = \mathbf{P}(E_n \,|\, E_{n-1})\mathbf{P}(E_{n-1}) \leq \theta\,\mathbf{P}(E_n) \leq \ldots \leq \theta^{n-1}\mathbf{P}(E_1) = \theta^{n-1}$, και επομένως $\mathbf{P}(\cap_{n\geq 1} E_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(E_n) = 0$.