Στοχαστικός Λογισμός

Εξέταση 23 Νοεμβρίου 2017

1. (15 Βαθμοί) Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ σ-άλγεβρα, και $X : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή με $\mathbf{E}|X| < \infty$.
(α) Αν η X είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμη, να δειχθεί ότι $\mathbf{E}(X \,|\, \mathcal{G}) = X$.
(β) Να δειχθεί ότι $\mathbf{E}(\mathbf{E}(X \,|\, \mathcal{G})) = \mathbf{E}X$.

2. (20 Βαθμοί) Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ σ-άλγεβρα, και $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαίες μεταβλητές με $\mathbf{E}(X^2), \mathbf{E}(Y^2) < \infty$. Να δειχθεί ότι
(α) $\mathbf{E}|\mathbf{E}(X \,|\, \mathcal{G})Y| < \infty$ και
(β) $\mathbf{E}(\mathbf{E}(X \,|\, \mathcal{G})Y) = \mathbf{E}(X\mathbf{E}(Y \,|\, \mathcal{G}))$.

3. (20 Βαθμοί) Έστω $z, p \in (0,1), a \neq 0$, και $(X_i)_{i \geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $\mathbf{P}(X_1 = 1) = p, \mathbf{P}(X_1 = -1) = 1 - p$. Θέτουμε

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}, \\ &\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n) \qquad \text{για κάθε } n \geq 1 \\ &S_0 := 0, \\ &S_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n \qquad \text{για κάθε } n \geq 1, \end{aligned}$$

και $M_n := a^{S_n} z^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Να δειχθεί ότι η ακολουθία $(M_n)_{n \geq 0}$ είναι martingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ αν και μόνο αν

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4p(1-p)z^2}}{2pz}.$$

4. (15 Βαθμοί) Έστω $(X_i)_{i \geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $\mathbf{P}(X_1 = i) = 1/6$ για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$. Θέτουμε

$$\begin{aligned} &\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}, \\ &\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n) \qquad \text{για κάθε } n \geq 1 \\ &S_0 := 0, \\ &S_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n \qquad \text{για κάθε } n \geq 1. \end{aligned}$$

Έστω T ο μοναδικός ακέραιος k ώστε $S_{k-1} < 100 \leq S_k$. Να δειχθεί ότι ο T είναι φραγμένος χρόνος διακοπής ως προς την $(\mathcal{F})_{n \geq 0}$ και ότι $S_T \leq 105$.

5. (20 Βαθμοί) Έστω $(B_t)_{t \geq 0}$ τυπική (μονοδιάστατη) κίνηση Brown. Για κάθε $t \geq 0$ θέτουμε $M_t := \max\{B_s : s \in [0,t]\}$. Να δειχθεί ότι
(α) $M_t \overset{d}{=} \sqrt{t} M_1$
(β) $\mathbf{E}(M_t^2) = t$.

6. (20 Βαθμοί) Έστω $(B_t)_{t \geq 0}, (W_t)_{t \geq 0}$ ανεξάρτητες τυπικές (μονοδιάστατες) κινήσεις Brown και $a \in (0,1)$.
(α) Ποια η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $B_1 - 4B_3 + 2B_6$;
(β) Για ποιες τιμές του $c \in \mathbb{R}$ είναι η ανέλιξη $(aB_t + cW_t)_{t \geq 0}$ τυπική κίνηση Brown;

Άριστα είναι το 100. Η διάρκεια της εξέτασης είναι $2\frac{1}{2}$ ώρες.

Καλή επιτυχία!

Σχόλια

1. Θεωρία.

4. $T \leq 100$ γιατί $S_k \geq k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Έπειτα, $S_{T-1} \leq 99$ και $X_T \leq 6$.

5. (α) Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα αλλαγής κλίμακας (Πρόταση 5.9).

(β) Από τη συζήτηση που ακολουθεί το Πόρισμα 6.4, έχουμε $M_t \overset{d}{=} |B_t|$. Άρα $\mathbf{E}(M_t^2) = \mathbf{E}(B_t^2) = t$.

6. (β) $c = \pm\sqrt{1 - a^2}$.