Στοχαστικός Λογισμός
Ιούνιος 2012

Τεστ εξάσκησης

Στις παρακάτω ασκήσεις, $(B_t)_{t\geq 0}$ είναι μια τυπική (μονοδιάστατη) κίνηση Brown ορισμένη σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

1. Έστω $(X_n)_{n\geq 0}$ martingale ως προς την διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$. Για $0 \leq i < j < k$ θετικούς ακεραίους, να δειχθούν τα εξής.

(α) $\mathbf{E}((X_k - X_j)X_i) = 0$.

(β) $\mathbf{E}\{(X_k - X_j)^2 \,|\, \mathcal{F}_i) = \mathbf{E}(X_k^2 \,|\, \mathcal{F}_i) - \mathbf{E}(X_j^2 \,|\, \mathcal{F}_i)$.

2. Να δειχθεί ότι με πιθανότητα 1, υπάρχει τυχαίος φυσικός $n_0(\omega)$ έτσι ώστε $|B_{n^4}| \geq 1$ για κάθε $n \geq n_0(\omega)$.

3. Να υπολογιστούν οι συνδιακυμάνσεις

(α) $\mathrm{Cov}(tB_{t+1}^2, B_t)$ με $t > 0$.

(β)

$$\mathrm{Cov}\left(\int_0^1 tB_t \, dB_t, \int_0^1 B_t^7 \, dB_t\right).$$

4. Έστω $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και φραγμένη συνάρτηση. Θεωρούμε τις ανελίξεις $(X_t)_{t\geq 0}, (Y_t)_{t\geq 0}$ με

$$X_t := \int_0^t h(s) \, dB_s,$$
$$Y_t := X_t^3 - 3\int_0^t X_s h^2(s) \, ds,$$

για κάθε $t \geq 0$. Να δειχθεί ότι η $(Y_t)_{t\geq 0}$ είναι martingale ως προς την διήθηση που παράγει η B.

5. Θεωρούμε την ανέλιξη Itô $(X_t)_{t\geq 0}$ που ικανοποιεί την στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dX_t = \left(\sqrt{1 + X_t^2} + \frac{1}{2}X_t\right) dt + \sqrt{1 + X_t^2} dB_t,$$
$$X_0 = 0.$$

(α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δυό φορές διαφορίσιμη συνάρτηση με f'' συνεχή. Να γραφεί η $f(X_t)$ στην μορφή

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t Y_s \, ds + \int_0^t Z_s \, dB_s$$

για κατάλληλες ανελίξεις $(Y_s)_{s\geq 0}, (Z_s)_{s\geq 0}$.

(β) Να βρεθεί κατάλληλη συνάρτηση f ώστε $Z_s = 1$ για κάθε $s \geq 0$. Έπειτα, να λυθεί η ΣΔΕ πιο πάνω.

Σχόλια

2. Χρησιμοποιούμε το πρώτο λήμμα Borel-Cantelli, και την ιδιότητα αλλαγής κλίμακας για την κίνηση Brown. Παρατηρήστε ότι η πυκνότητα της $N(0,1)$ είναι φραγμένη από το $1/\sqrt{2\pi}$.

3. (α) Γράφουμε $B_{t+1}^2 = (B_{t+1} - B_t + B_t)^2 = (B_{t+1} - B_t)^2 + B_t^2 + 2B_t(B_{t+1} - B_t)$.
(β) Προκύπτει με χρήση της Άσκησης 10.4 των σημειώσεων. Η Άσκηση 10.4 μπορεί να χρησιμοποιείται ως θεωρία.

4. Εφαρμόζουμε τον τύπο του Itô για να υπολογίσουμε το $d(X_t^3)$. Βρίσκουμε ότι το dY_t έχει την κατάλληλη μορφή. Είναι ουσιώδες το ότι η h είναι φραγμένη.

5. Για την κατάλληλη f, βρίσκουμε ότι η $Y_t := f(X_t)$ ικανοποιεί την $dY_t = dt + dB_t$ με $Y_0 = 0$. Άρα $X_t = f^{-1}(t + B_t)$.