

Στοχαστικός Λογισμός
Εξέταση 13 Σεπτεμβρίου 2021

1. (25 Βαθμοί) Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ χώρος πιθανότητας, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ σ -άλγεβρα, και $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή με $\mathbf{E}|X| < \infty$.

(α) Αν $A \in \mathcal{G}$, να δειχθεί με χρήση του ορισμού της δεσμευμένης μέσης τιμής ότι

$$\mathbf{E}(X\mathbf{1}_A|\mathcal{G}) = \mathbf{1}_A\mathbf{E}(X|\mathcal{G}).$$

(β) Αν $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$, να προσδιοριστεί η $\mathbf{E}(X|\mathcal{G})$.

2. (20 Βαθμοί) Έστω $(X_i)_{i \geq 1}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με $\mathbf{E}(X_1) = 0, \mathbf{E}(X_1^2) = \sigma^2 \in (0, \infty)$. Θέτουμε

$$\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\},$$

$$\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad \text{για κάθε } n \geq 1,$$

$$S_0 := 0,$$

$$S_n := X_1 + X_2 + \dots + X_n \quad \text{για κάθε } n \geq 1.$$

Να δειχθεί ότι η ακολουθία $(S_n^2 - \sigma^2 n)_{n \geq 0}$ είναι martingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$.

3. (30 Βαθμοί) Έστω $X := \int_0^\infty B_s^2 e^{-s} dB_s$.

(α) Να δειχθεί ότι η τυχαία μεταβλητή X είναι καλά ορισμένη.

(β) Να υπολογιστούν οι $\mathbf{E}(X), \mathbf{E}(X^2)$.

(γ) Να υπολογιστεί η $\mathbf{E}(B_1 X)$.

[Υπόδειξη: Γράψτε $B_1 = \int_0^\infty \mathbf{1}_{[0,1]}(s) dB_s$.]

4. (25 Βαθμοί) (α) Γνωρίζουμε ότι η ανέλιξη $X_t := e^{B_t + ct}, t \geq 0$, είναι martingale ως προς τη διήθηση που παράγει η B , όπου $c \in \mathbb{R}$ σταθερά. Ποια είναι η τιμή της c ;

(β) Για την τιμή της c που βρήκατε στο (α), να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^t X_s dB_s$ ως συνάρτηση των τιμών B_t, t .

5. (20 Βαθμοί) Βρείτε μια λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$dX_t = X_t dt + t e^t dB_t,$$

$$X_0 = 1$$

που να ορίζεται για $t \in [0, \infty)$. Είναι η λύση μοναδική;

[Υπόδειξη: Υπολογίστε το διαφορικό $d(e^{-t} X_t)$.]

Στις ασκήσεις 3, 4, 5, η B είναι μια μονοδιάστατη τυπική κίνηση Brown. Δίνεται ότι $\mathbf{E}(B_1^4) = 3$.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι $1\frac{1}{2}$ ώρα. Άριστα είναι το 100.

Καλή επιτυχία!

Απαντήσεις

1. (α) Θεωρία. Κομμάτι της Πρότασης 2.11.
(β) Παράδειγμα 2.3.
2. Παραλλαγή του Παραδείγματος 3.2(β).
4. (α) $c = -1/2$
5. $X_t = e^t (1 + \int_0^t s dB_s)$ για κάθε $t \geq 0$. Είναι μοναδική γιατί οι προϋποθέσεις του Πορίσματος 4.5 ικανοποιούνται (αυτό θέλει δικαιολόγηση...).