Κίνηση Brown

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ μια ανέλιξη $(B(t))_{t\geq 0}$ ορισμένη στον $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ λέγεται κίνηση Brown αν

i) έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις. Δηλ. για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$, $0 \leq t_1 < t_2 < t_n$ οι τ.μ.

$$B(t_1), B(t_2) - B(t_1), \quad , B(t_n) - B(t_{n-1})$$

είναι ανεξάρτητες

ii) $\forall\ 0 \leq s < t$

$$B(t) - B(s) \sim N(0, t-s)$$

iii) $P(\{\omega \in \Omega : t \mapsto B(t)(\omega) \text{ συνεχής}\}) = 1$, $t\in[0,\infty)$

Με πιθ. 1 η B είναι συνεχής

Αν $x \in \mathbb{R}$ και $B(0) = x$. Κίνηση Brown πω ξεκινάει από το x.

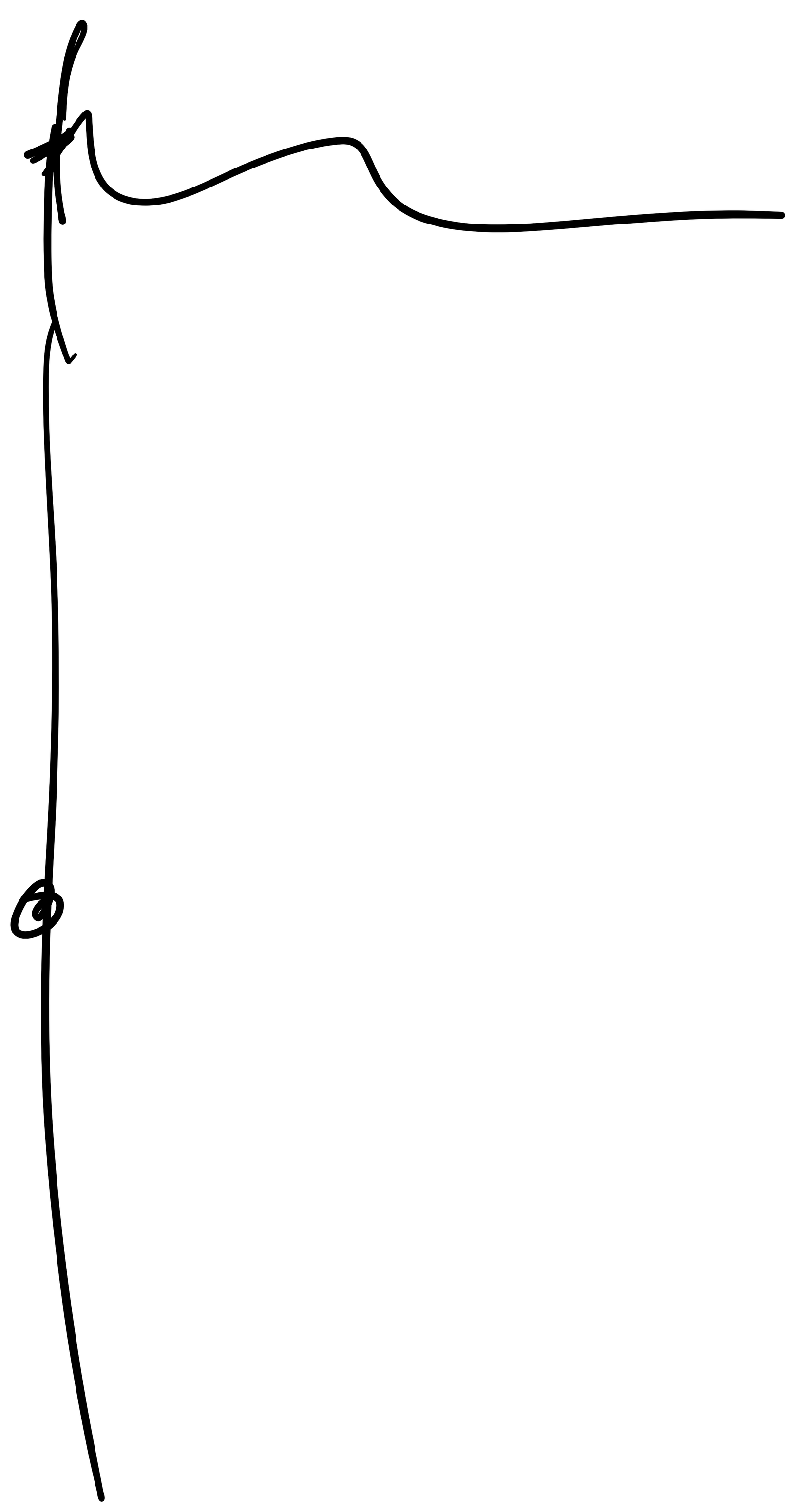
Όταν $x=0$ τη λέμε τυπική κίνηση

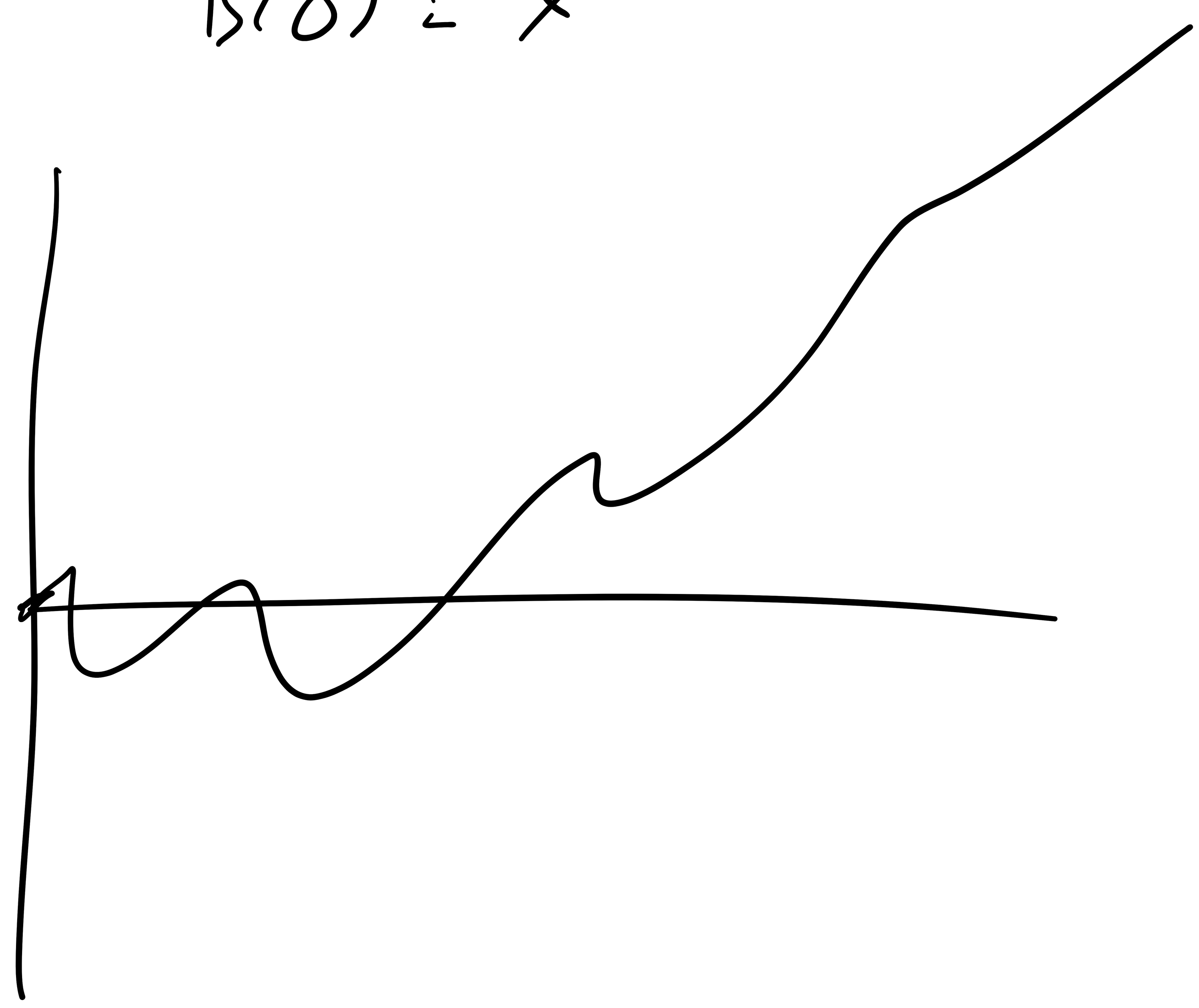
Brown

E_x, P_x $\qquad P_x(B(1)>0)$

$B(0)=x$

$E_x(B(3))$





κίνηση Brown με $B(0)$ να έχει κατανομή μ (μέτρο π.θ. στο $\mathbb{R}$). Πώς τη φτιάχνουμε.

Παίρνουμε X τ.μ. με κατανομή μ

B Τ.Κ.Β. Τότε η

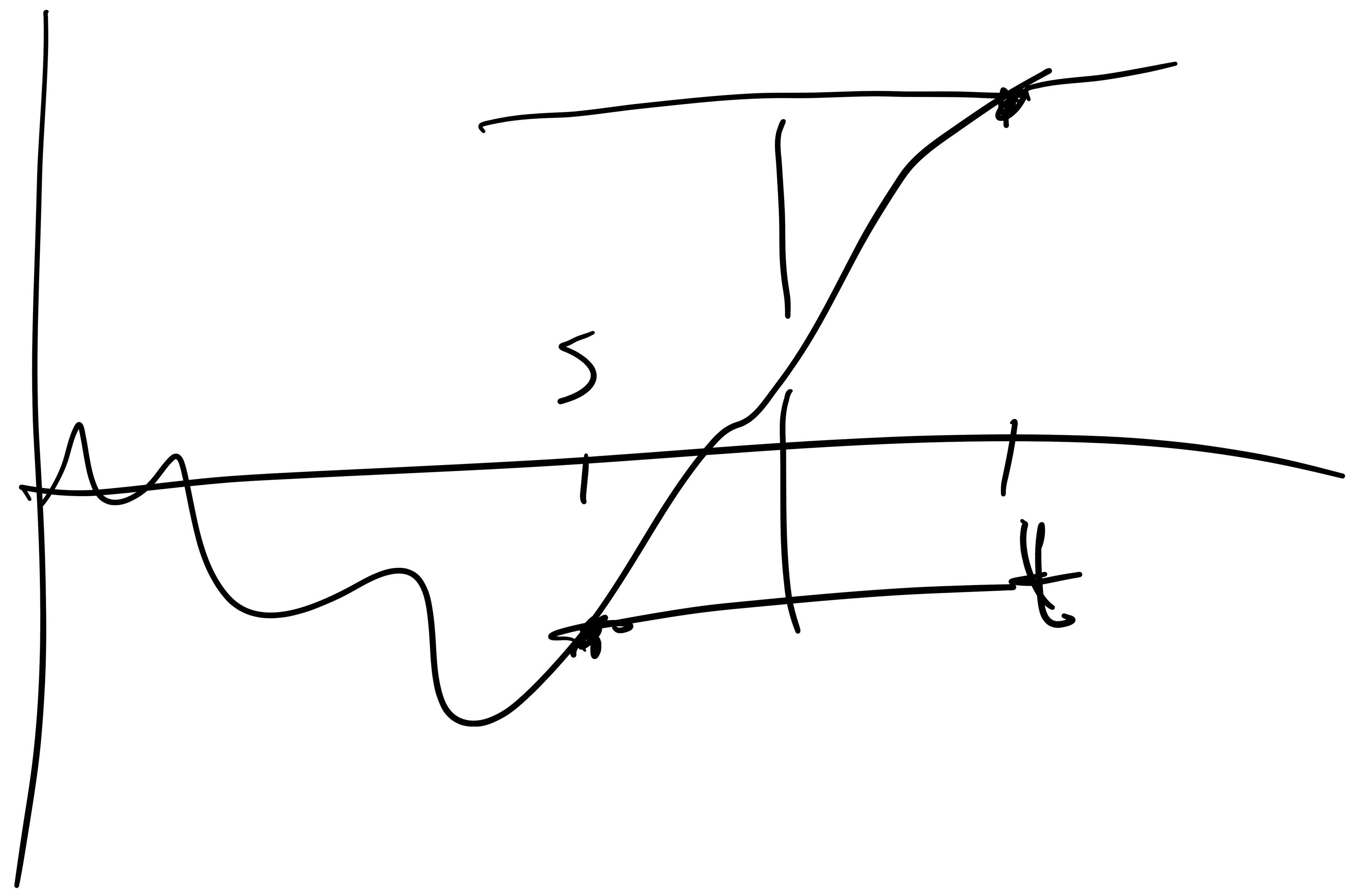
$W(t) = X + B(t)$ είναι Κ.Β με

$W(0) \sim \mu$

$W(t)(\omega) = X(\omega) + B(t)(\omega)$

$0 < s < t$

$W(t) - W(s) = B(t) - B(s) \sim N(0, t-s)$



Τ.Κ.Β. B $\quad B(0) = 0$

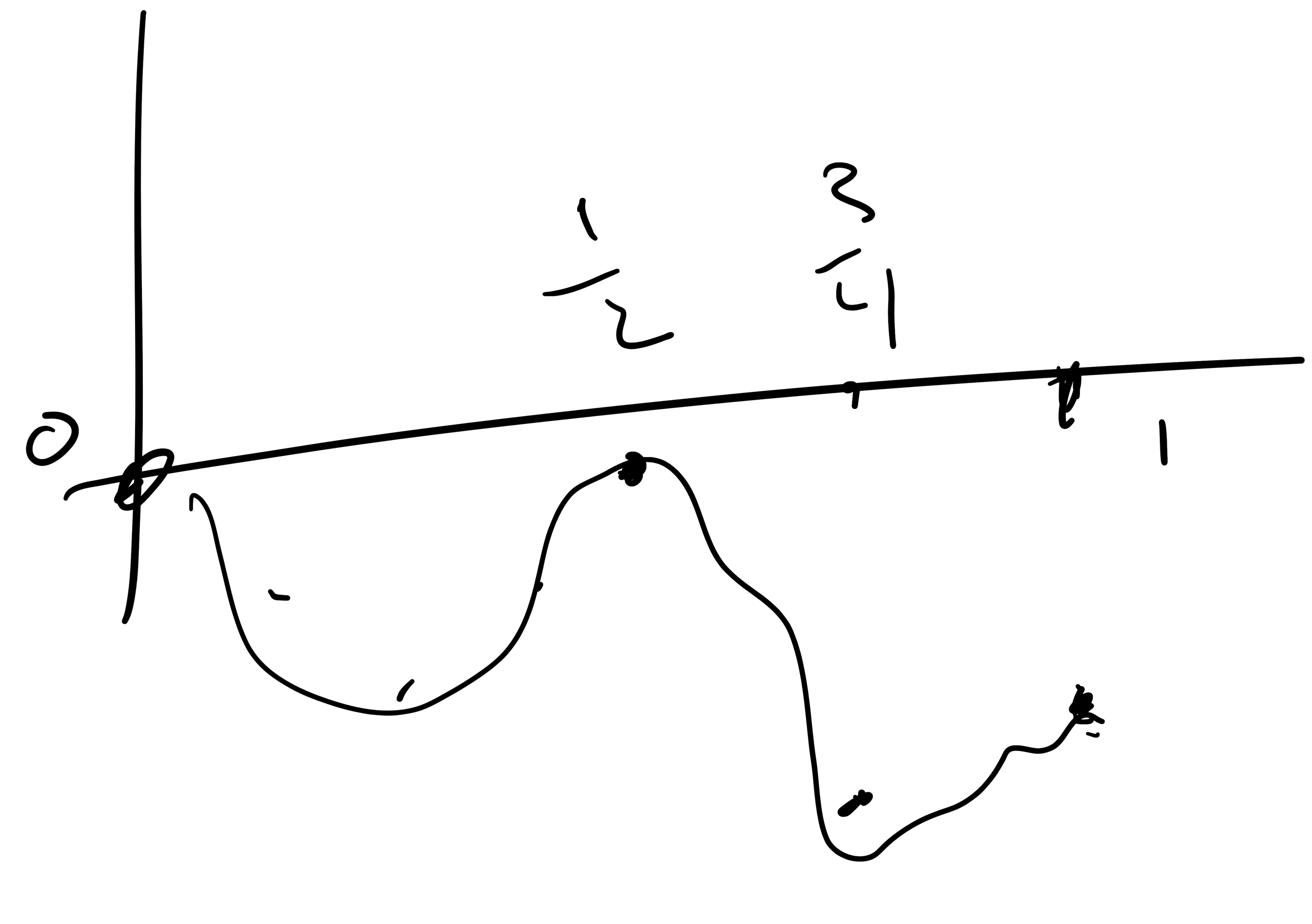
$B(t) \sim N(0, t) \qquad E(B^2(t)) = t$

$B(t)$ της τάξης του $\sqrt{t}$

<u>Θεώρημα</u> Υπάρχει Τ.Κ.Β.

$B(0) = 0 \quad B(1) \sim N(0,1)$

$B\left(\frac{1}{2}\right) \mid B(1)$



Η κατανομή μιας κ.Β. είναι ένα μέτρο στον $C[0,\infty)$

$\underline{\Omega} \to C[0,\infty)$

$\omega \to (t \mapsto B(t)(\omega))$

$U_1 : \underline{\Omega}_1 \to \mathbb{R}$

$U_1 : \underline{\Omega}_2 \to \mathbb{R}$

$\underline{\Omega} \to E$

$U_1 \quad 1 - U$

$B(t) \qquad (B(t_1), \qquad , B(t_n))$

$(w(t_1), \qquad , w(t_n))$

<u>Κατανομές πεπερασμένης διάστασης</u> B τ.κ.Β.

$n \in \mathbb{N}^+, \quad 0 < t_1 < \qquad < t_n . \quad t_0 = 0$

Κατανομή του

$(B(t_1), \qquad , B(t_n))$;

$$X_i = B(t_i) - B(t_{i-1}) \qquad i = 1, \ldots, n$$

ανεξάρτητες. $X_i \sim N(0, t_i - t_{i-1})$

$$Y_i = \frac{1}{\sqrt{t_i - t_{i-1}}} X_i \sim N(0,1)$$

$$B(t_i) = X_i + X_{i-1} + \dots + X_1$$

$$= \underbrace{\sqrt{t_i - t_{i-1}}}_{\sigma_i}\, Y_i + \sqrt{t_{i-1} - t_{i-2}}\, Y_{i-1} + \dots + \sqrt{t_1 - t_0}\, Y_1$$

$$\begin{pmatrix} B(t_1) \\ \vdots \\ B(t_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & \\ \sigma_1 & \sigma_2 & & \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \\ & & & \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$$

$$= A \cdot Y$$

Y τυπική n-διάστατη Γκαουσιανή

Άρα $(B(t_1), \dots, B(t_n))^t$ Γκαουσιανό με γνωστά $b = 0$, $C = A A^t$.

Θεώρημα Αν B, B^* Τ.Κ.Β., τότε οι B, B^* έχουν την ίδια κατανομή.

Πρόταση Έστω B κ.Β. με $B(0)=x$ ($x \in \mathbb{R}$ δεδομένο). Τότε για $s, t \geq 0$ ισχύει

$$\operatorname{cov}(B(s), B(t)) = s \wedge t$$

Απόδ.

Έστω ότι $\underline{s \leq t}$. $\quad 0 < s < t$

Οι $B(s)$, $B(t) - B(s)$ είναι ανεξάρτητες

$$\operatorname{cov}(B(s), \underbrace{B(t) - B(s)} + B(s)) =$$

$$= \operatorname{cov}(B(s), B(t) - B(s)) + \operatorname{cov}(B(s), B(s))$$

$$= 0 + \operatorname{Var}(B(s)) = s$$

5.1 B 1. κ.Β $\quad f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$

$$f(t) = P(B(t) > t)$$

(α) Ν.δ. $f \downarrow$

(β) $f'(t) = ;$

Λύση

$$B(t) \sim N(0, t) \qquad \frac{B(t)}{\sqrt{t}} \sim N(0,1)$$

Δηλ. $B(t) = \sqrt{t}\, Z$ με $Z \sim N(0,1)$

$$\left(\stackrel{d}{=} \sqrt{t}\, Z \right)$$

(α) παίρνουμε $Z \sim N(0,1)$.

τότε $B(t) \stackrel{d}{=} \sqrt{t}\, Z$

$$f(t) = P(B(t) > t) = P(\sqrt{t}\, Z > t)$$

$$= P(Z > \sqrt{t})$$

(β) $$f(t) = \int_{\sqrt{t}}^{\infty} f_Z(s)\, ds$$

$$f'(t) = -f_Z(\sqrt{t}) \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{8\pi t}} e^{-\frac{t}{2}}$$

5.3 | $n \in \mathbb{N}^+$, $0 \leq t_0 < t_1 < \quad < t_n$

$a_1, \quad , a_n \in \mathbb{R}$. B 1. K. B.

Ν. δ. ότι $\quad$ τοχιότηα $=0$

$Y = a_1 B(t_1) + a_2 B(t_2) + \quad + a_n B(t_n) \sim N(\mu, \sigma^2)$

$\mu = ;$ $\sigma = ;$

Λύση

έστω $X_i = B(t_i) - B(t_{i-1})$ $i = 1 .. n$

ανεξάρτητες) $\sim N(0, t_i - t_{i-1})$

$B(t_i) = X_i + X_{i-1} + \quad + X_1$

$Y = a_1 X_1 + a_2 (X_1 + X_2) +$

$+ a_n (X_1 + \quad + X_n)$

$= X_1 (a_1 + \quad + a_n) + X_2 (a_2 + \quad + a_n)$

$+ \quad \ldots \quad + X_n a_n$

$S_i = a_i + \quad + a_n$ $\quad i = 1 . \; , n$

$\exists i : S_i \neq 0$. $\quad Y = \sum_{i=1}^{n} S_i X_i$

Επομένως, $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ όπου

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} s_i \, E(X_i) = 0$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} s_i^2 \, Var(X_i) = \sum_{i=1}^{n} s_i^2 (t_i - t_{i-1})$$

Ασκ. 5.4

$x = B(r)$, $Y = \cancel{B(s)}$ ← τυπογραφικό

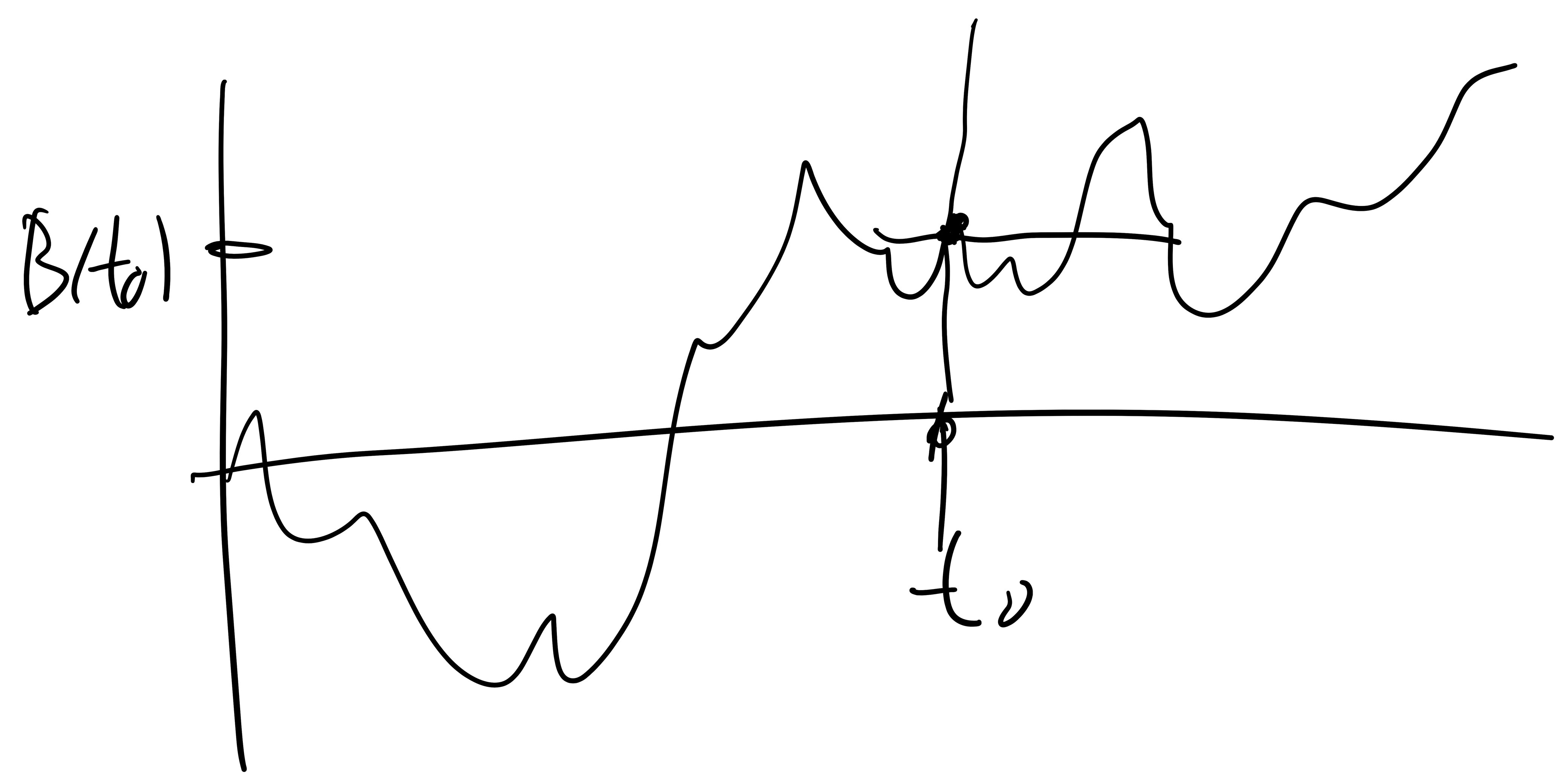
$\rightarrow Y = B(t)$

Ιδιότητες της Κ.Β. $\qquad X_t \qquad B(t) \qquad B_t$

B Κ.Β.

$$\mathcal{F}_t^0 = \sigma\left(\{B(s) : s \in [0,t]\}\right)$$

$\omega \qquad B(s)(\omega) \quad s \in [0,t]$



Πρόταση B κ.Β. $t_0 \geq 0$.

$$X(t) = B(t + t_0) - B(t_0) \quad \forall t \geq 0$$

τότε

α) Η X είναι τ.κ.Β.

β) Η X είναι ανεξάρτητη της

$\mathcal{F}^0_{t_0}$

Απόδ.

α)

i) Για $n \in \mathbb{N}^+$ και $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ οι προσαυξήσεις της X είναι

$$X(t_1),\ X(t_2) - X(t_1),\ \dots,\ X(t_n) - X(t_{n-1})$$

$$B(t_0 + t_1) - B(t_0),\ B(t_0 + t_2) - B(t_0 + t_1),\ \dots,$$
$$B(t_0 + t_n) - B(t_0 + t_{n-1})$$

είναι ανεξάρτητες, ως προσαυξήσεις της B.

ii) Για $0 \le s < t$

$$X(t) - X(s) = B(t+t_0) - B(s+t_0)$$

$$\sim N(0, t+t_0 - (s+t_0))$$

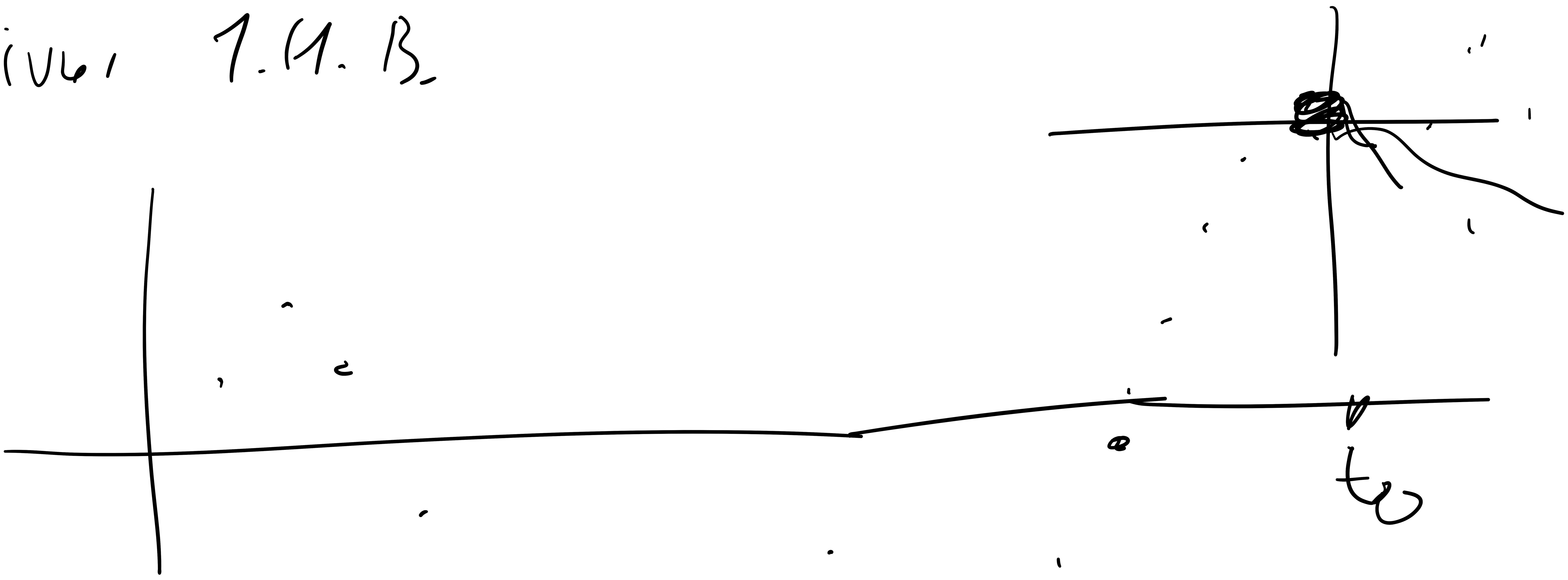
$$= N(0, t-s)$$

iii) $X(t) = \underline{B(t+t_0) - B(t_0)}$

ω: $B(t)(\omega)$ συνεχής ως προς t

Άρα η X Κ.Β. κιν. με $X(0)=0$ είναι Τ.Κ.Β.

e)



$\mathcal{F}_{t_0}^{0}$

$\to B(t_1), \ldots, B(t_n)$ $\quad t_1 < \ldots < t_n \le t_0$

$\to B(t_0+s_1) - B(t_0), \ldots, B(t_0+s_n) - B(t_0)$ $\quad 0 < s_1 < \ldots < s_n$

Πρόταση (Αλλαγή κλίμακας)

B τ.κ.Β. $c \neq 0$

Θέτουμε $X(t) = \frac{1}{c} B(c^2 t) \quad \forall t \geq 0$

τότε η X είναι τ.κ.Β.

Απόδ

i) $0 \leq t_1 < \dots < t_n$

$\frac{1}{c} B(c^2 t_1), \ \frac{1}{c} B(c^2 t_2) - \frac{1}{c} B(c^2 t_1),$

$\frac{1}{c} B(c^2 t_n) - \frac{1}{c^2} B(c^2 t_{n-1})$

ii) $0 \leq s < t$

$$X(t) - X(s) = \frac{1}{c} \left(\underbrace{B(c^2 t) - B(c^2 s)}_{N(0,\, c^2(t-s))} \right) \sim N(0, t-s)$$

$\frac{1}{c^2} c^2 (t-s) = t-s$

iii) $X(t) = \frac{1}{c} B(c^2 t)$ συνεχής με π.β. 1

$$\mathrm{Var}\Big(\frac{1}{c}\underbrace{B(ct)}_{t}\Big) = \frac{1}{c^2}\,ct = \frac{1}{c}\,t$$

$$B_t \sim N(0, t)$$