Σήμερα: Κεφάλαιο 7

§4.3

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$

σ-άλγεβρες

$(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ διήθηση στην $\mathcal{F}$

$(0 \leq s < t \Rightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F})$

<u>Ορισμός</u> $(X_t)_{t \geq 0}$ καλείται martingale αν

i) προσαρμοσμένη. Δηλ. X_t είναι $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη

ii) $E|X_t| < \infty \quad \forall t$

iii) $E(X_t | \mathcal{F}_s) \overset{\geq}{=} X_s \quad \forall\, 0 \leq s \leq t$ sub

$E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n$

X_n, $\quad n \geq 1$

$T: \Omega \to [0,\infty]$

χρόνος διακοπής αν $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall t \geq 0$

Συνεχές martingale σημαίνει

$(X_t)_{t\geq 0}$ martingale με συνεχή μονοπάτια

δηλ. $P\left(t \longmapsto X_t(\omega) \text{ συνεχής στο } [0,\infty) \right) = 1$

Θεώρημα επιλεκτικής διακοπής

$(X_t)_{t\geq 0}$ συνεχές martingale

T φραγμένος χρόνος διακοπής

$(T(\omega) \leq M \quad \forall \omega \in \Omega)$

τότε $\quad E(X_T) = E(X_0)$

Κεφ. 7 B μονοδιάστατη Κ.Κ.Β

$\mathcal{F}_t^0 = \sigma(\{B(s) : s \in [0,t]\}) \quad \forall t \geq 0$

$\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{F}_t^0 \cup \mathcal{N}) \ldots$

Πρόταση Οι ακόλουθες ανελίξεις είναι martingales ως προς την $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$

i) $(B(t))_{t\geq 0}$ $\qquad S_n = X_1 + \ldots + X_n$

ii) $(B^2(t) - t)_{t\geq 0}$ $\qquad S_n, \; S_n^2 - n$

iii) $\left(e^{\lambda B(t) - \frac{\lambda^2}{2}t}\right)_{t\geq 0}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ δεδομένο.

Αποδ.

i) B προσαρμοσμένη

$E|B(t)| = \sqrt{t}E|Z| \quad Z \sim N(0,1)$

$(E|Z^2|)^{\frac{1}{2}} = 1 \qquad \sqrt{t} \int_{\mathbb{R}} |x| \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx < \infty$

Για $0 \le s < t$

$$E(B(t) \mid \mathcal{F}_s) = E(B(s) + B(t) - B(s) \mid \mathcal{F}_s)$$

$$= B(s) + E(\underbrace{B(t) - B(s)}_{X(t-s)} \mid \mathcal{F}_s)$$

$$X(r) = B(s+r) - B(s) \qquad \mathcal{F}_s \perp\!\!\!\perp X$$

$$= B(s) + E(\underbrace{B(t) - B(s)}_{\sim N(0,\, t-s)}) = B(s)$$

ii) $B^2(t) - t$ προσαρμοσμένη

$$E\,|B^2(t) - t| \le E(B^2(t)) + t = t + t = 2t < \infty$$

Για $0 < s < t$

τότε $Y = B(t) - B(s) \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s$

$$E(B^2(t) \mid \mathcal{F}_s) = E((B(s) + Y)^2 \mid \mathcal{F}_s)$$

$$= E(B^2(s) + Y^2 - 2Y \underbrace{B(s)}_{\mathcal{F}_s\text{-μετρ}} \mid \mathcal{F}_s)$$

$$= B^2(s) + E(Y^2) - 2B(s)E(Y \mid \mathcal{F}_s)$$

$$= B^2(s) + t - s - 2B(s)\cdot 0 =$$

$$= B^2(s) - s + t$$

$$E(B^2(t) - t \mid \mathcal{F}_s) = B^2(s) - s$$

iii) όμοια

Το πρόβλημα εξόδου για την Κ.Β.

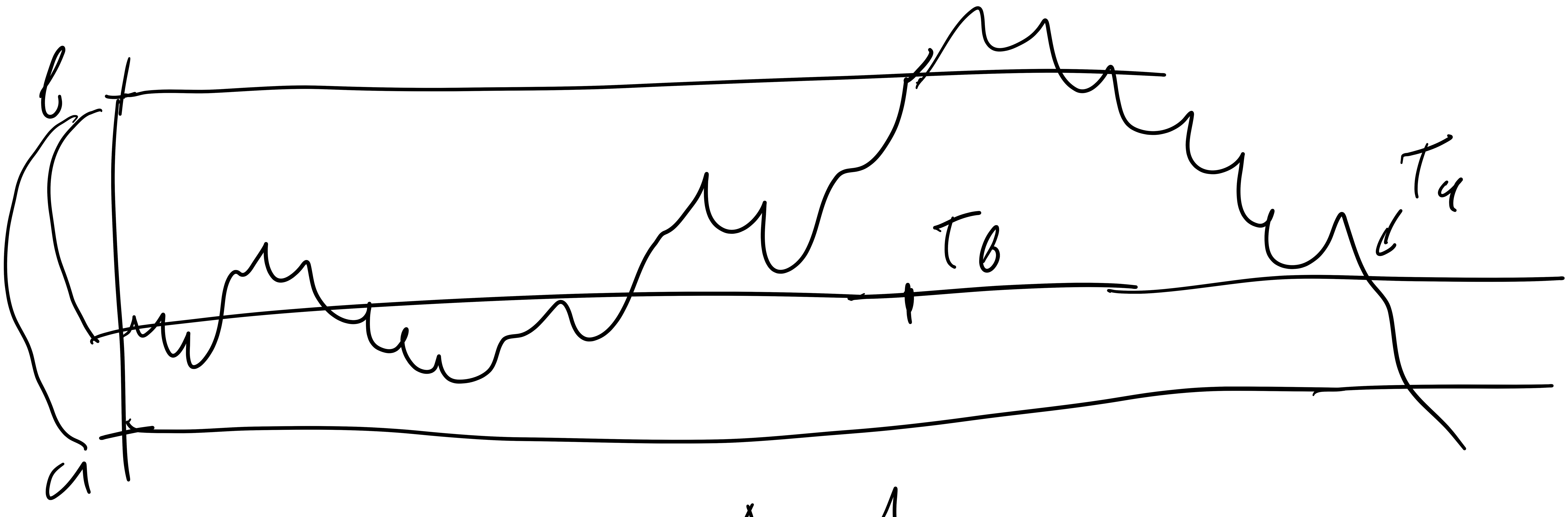
Για $r \in \mathbb{R}$ θέτουμε

$$T_r := \inf\{s \geq 0 : B(s) = r\}$$

<u>Πρόταση</u> B Τ.Κ.Β. $a < 0 < b$

i) $P(T_a < T_b) = \dfrac{b}{|a| + b}$ $\qquad B(t)$

ii) $E(T_a \wedge T_b) = |a| b$ $\qquad B^2(t) - t$



Αποδ.

T_r είναι χρόνος διακοπής ως προς την $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ $\forall r \in \mathbb{R}$

$T_a \wedge T_b$ ''

i) έστω $T = T_a \wedge T_b$; χρόνος διακοπής

για $r \geq 0$

$T \wedge r$ φραγμένος χρόνος διακοπής

$0 = EB(0) = EB(T \wedge r)$ ⊛

$P(T_a < \infty) = P(T_b < \infty) = 1$

$$\lim_{r \to \infty} B(T \wedge r) = \begin{cases} a & \text{στο } T_a < T_b \\ b & \text{στο } T_b < T_a \end{cases}$$

$|B(T\wedge r)| \le \max\{|a|, b\}$

Θ. φραγμ. συμπλ. σ την $\emptyset$

$0 = E(a \, 1_{T_a < T_b} + b \, 1_{T_b < T_a})$

$= a \, P(T_a < T_b) + b \, P(T_b < T_a)$

$= a x + b(1-x)$

$bx - ax = b \Rightarrow x = \dfrac{b}{b+|a|}$

ii) Θεωρούμε το martingale
$M(t) = B^2(t) - t$. Για καθε $r>0$,
$T\wedge r$ φραγμ. χρόνος διακοπής

$0 = EM(0) = E(M(T\wedge r)) \Rightarrow$

$E(T\wedge r) = E(B^2(T\wedge r))$ ⊛⊛

$$\lim_{r\to\infty} E(T\wedge r) = ET$$ Θ. μονότονης σύγκλισης

$$|B^2(T\wedge r)| \le a^2 \vee b^2 \quad \forall \omega \in \Omega,\ \forall r>0$$

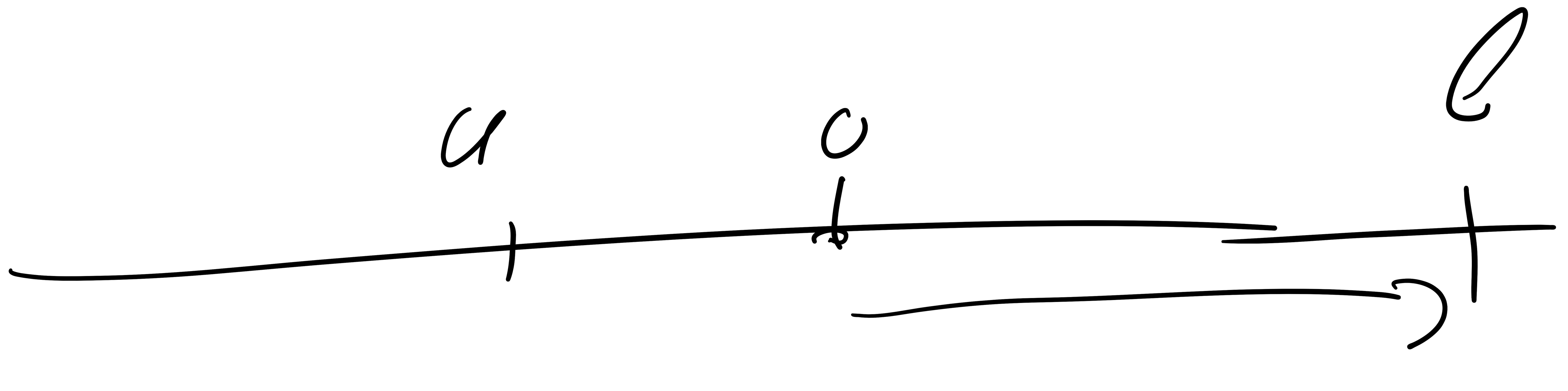
$$\lim_{r\to\infty} E(B^2(T\wedge r)) = E(B^2(T))$$

$$= E\left(a^2 1_{T_a<T_b} + b^2 1_{T_b<T_a}\right)$$

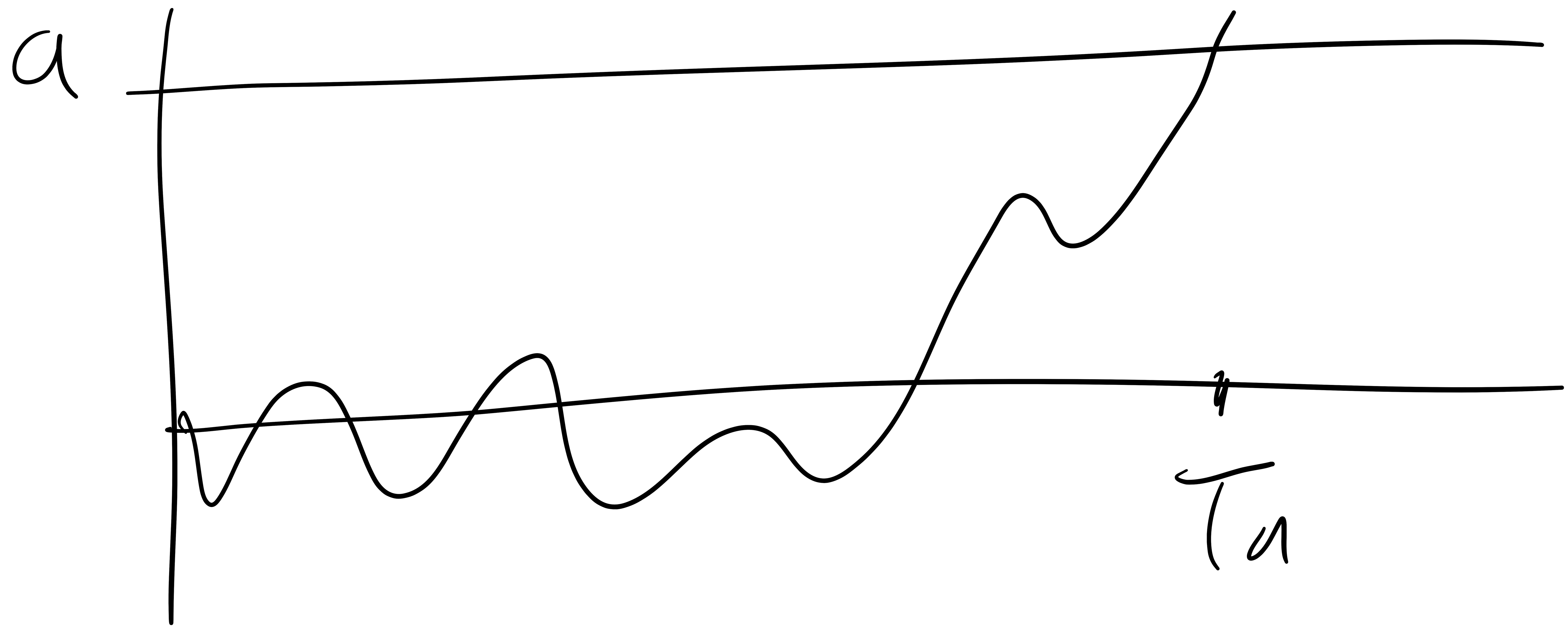
$$= a^2 \frac{b}{|a|+b} + b^2 \frac{|a|}{|a|+b}$$

$$= \frac{|a|\, b\,(|a|+b)}{|a|+b} = |a|\, b$$

$$E(B^2(T)) = ET$$



$E\, T_b = \infty$



$a > 0$

<u>Πρόταση</u> B τ.κ.Β. $a > 0$

$\forall \lambda > 0$ ισχύει

$$E\left(e^{-\lambda T_a}\right) = e^{-a\sqrt{2\lambda}}$$

Αποδ.

Η $M_t = e^{cB(t) - \frac{c^2}{2}t}$

είναι martingale $\forall c \in \mathbb{R}$.

Για $r > 0$ ο $T_a \wedge r$ είναι φραγμένος χρόνος διακοπής.

$$E(M_{T_a \wedge r}) = E(M_0) = 1$$

$$\parallel$$

$$E\left(e^{cB(T_a\wedge r) - \frac{1}{2}c^2 (T_a \wedge r)}\right) \quad (***)$$

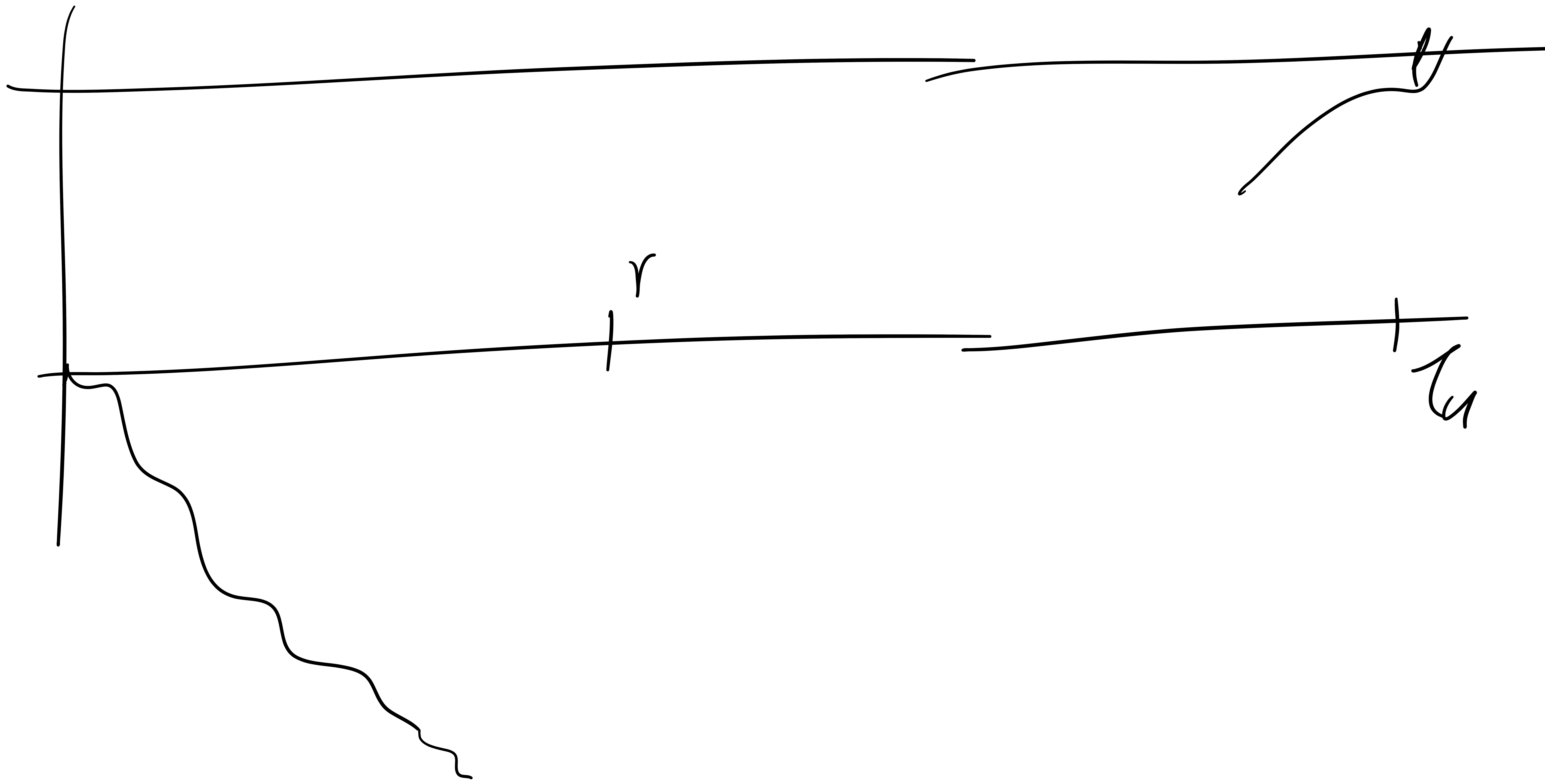
$P(T_a < \infty) = 1$

$$\lim_{r\to\infty} M_{T_a \wedge r} \overset{?}{=} e^{cB(T_a) - \frac{1}{2}c^2 T_a}$$

$$= e^{ca - \frac{1}{2}c^2 T_a}$$

[illegible] 1,

[illegible] $c > 0$ $\quad \underbrace{cB(T_a \wedge r)} \leq ca$



Θ. Φράγμ.- σύγκλιση στην (★★)

$$1 = E\left(e^{ca} \, e^{-\frac{1}{2} c^2 T_a} \right)$$

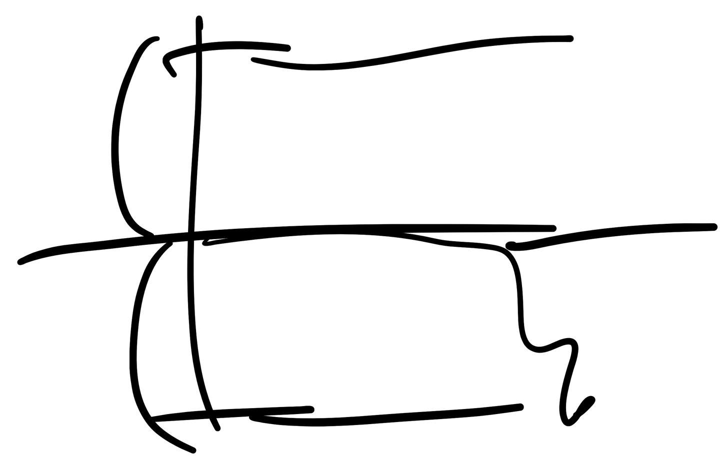
$$E\left(e^{-\frac{1}{2} c^2 T_a} \right) = e^{-ca}$$

$$E\left(e^{-\lambda T_a} \right)$$

Επιλέγοντας $c = \sqrt{2\lambda} > 0$

$$E\left(e^{-\lambda T_a} \right) = e^{-a\sqrt{2\lambda}}$$

Αν $a < 0$ τότε



$$T_a^B = T_{-a}^{-B} \overset{d}{=} T_{-a}^{B}$$

$$E\left(e^{-\lambda T_a^B} \right) = E\left(e^{-\lambda T_{-a}^B} \right) =$$

$$= e^{a\sqrt{2\lambda}} = e^{-|a|\sqrt{2\lambda}}$$

<u>Εφαρμογή</u> $a, b > 0$, $X \overset{d}{=} T_a$, $Y \overset{d}{=} T_b$

$X \perp\!\!\!\perp Y$. Τότε $X + Y \overset{d}{=} T_{a+b}$

Λύση

Για $\lambda > 0$

$$E\left(e^{-\lambda(X+Y)}\right) = E\left(e^{-\lambda X}\right) E\left(e^{-\lambda Y}\right)$$

$$= e^{-a\sqrt{2\lambda}} e^{-b\sqrt{2\lambda}} = e^{-(a+b)\sqrt{2\lambda}}$$

$$= E\left(e^{-\lambda T_{a+b}}\right)$$

$$\Rightarrow X + Y \overset{d}{=} T_{a+b}$$

$X_1, X_2, \quad , X_n$ ανεξάρτητες

ισόνομες με $X_1 \sim T_a$, $a > 0$

$$X_1 + \quad + X_n \overset{d}{=} T_{na} \overset{d}{=} n^2 T_a$$
$$\overset{d}{=} n^2 X_1$$

$$X_1 + \quad + X_n \stackrel{d}{=} n^2 X_1$$

$$\left(\begin{array}{c} Y_1 , Y_n \sim N(0,1) \\ Y_1 + \quad + Y_n \stackrel{d}{=} \sqrt{n}\, Y_1 \end{array} \right)$$

Πρόταση $a>0$, B κ.κ.B

Η T_a έχει πυκνότητα

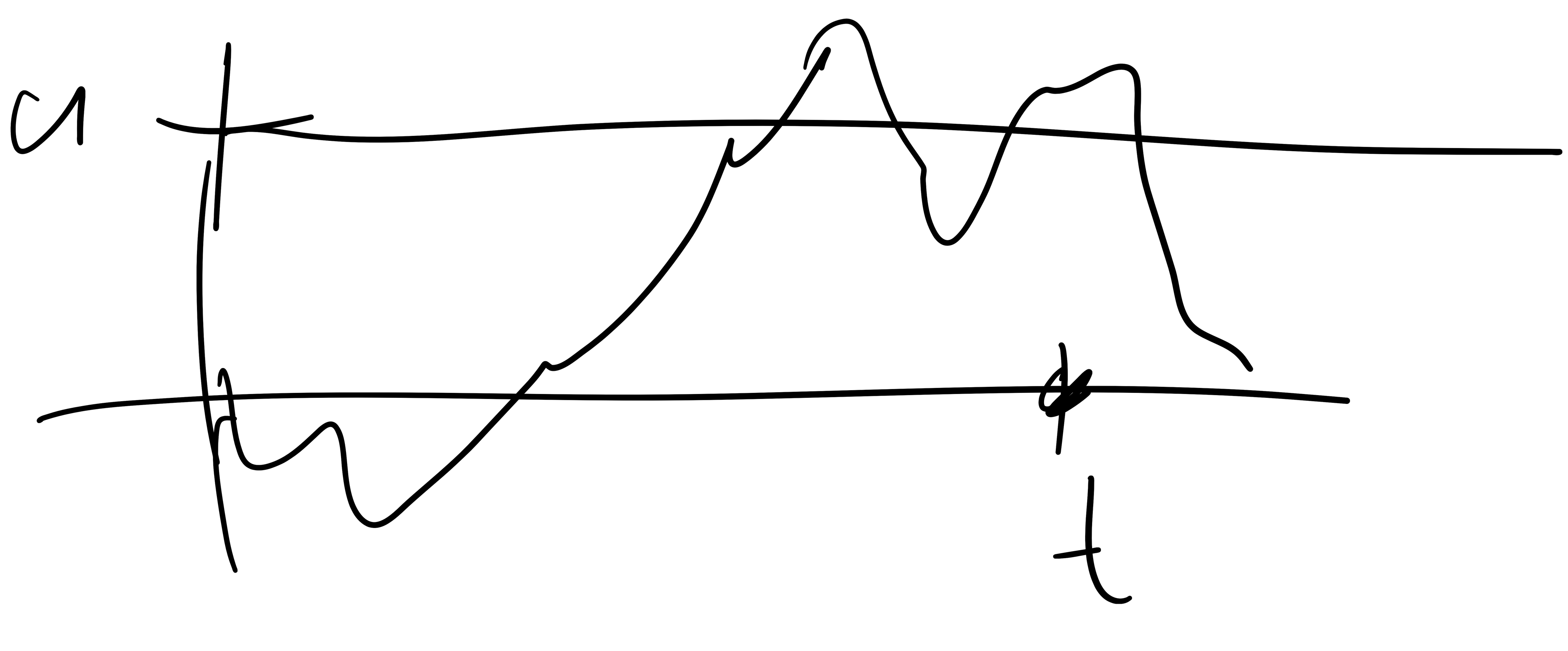
$$f(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{a^2}{2t}} 1_{t>0}$$

Αποδ.

Έστω F η συν. κατανομής της T_a.

Για $t>0$

$$F(t) = P(T_a \le t) = P(M_t \ge a)$$



$$= P(|B(t)| \geq a) = 2P(B(t) \geq a)$$

$$= 2P\left(B(1) \geq \frac{a}{\sqrt{t}}\right)$$

$$= 2\left(1 - \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right)\right)$$

F συνεχής στο $\mathbb{R}$ $\quad (F(0)=0)$

παραγωγίσιμη στο $(0,\infty)$ με

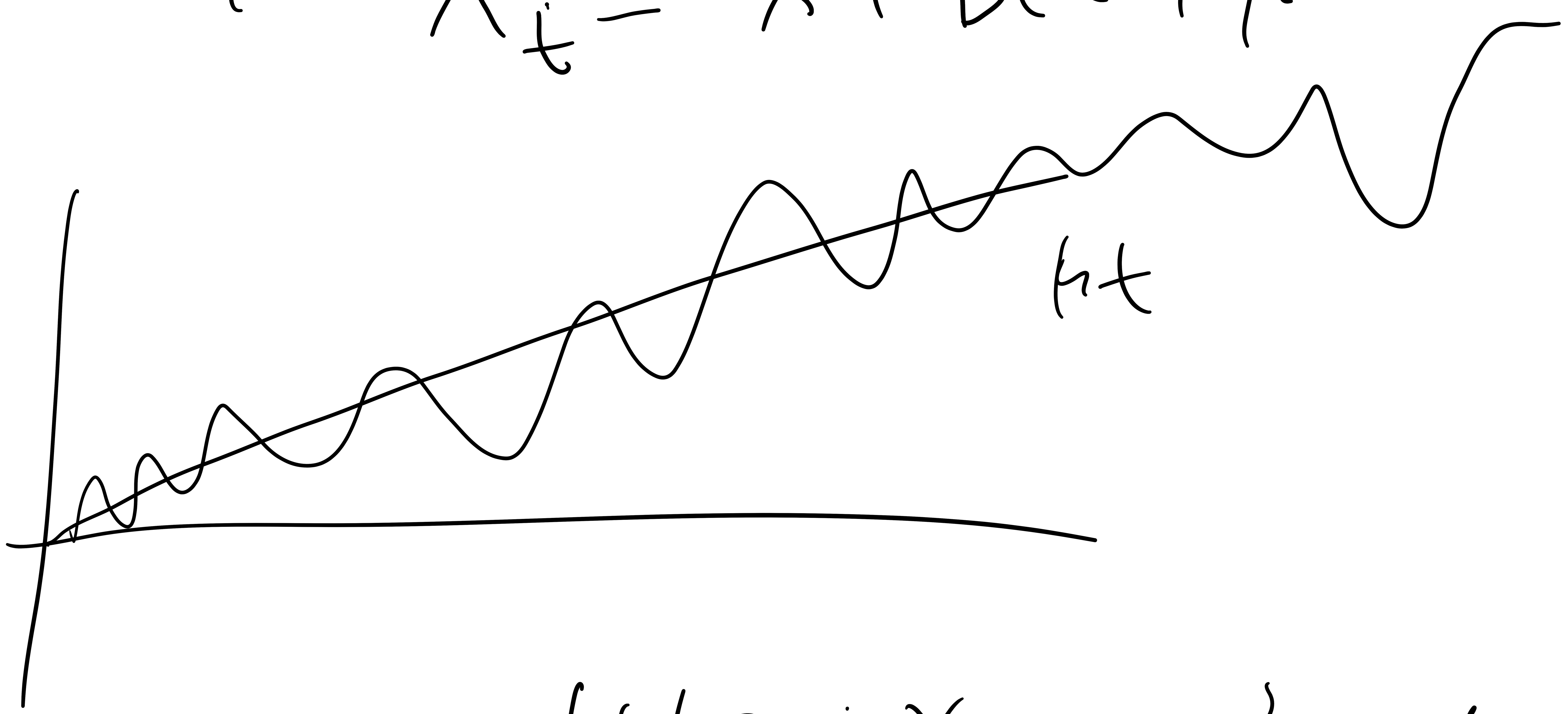
$$F'(t) = -2 f_Z\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right)\left(-\frac{1}{2}a\right)t^{-\frac{3}{2}}$$

$$= t^{-\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{a^2}{t}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi t^{3/2}}} e^{-\frac{1}{2}\frac{a^2}{t}}$$

Άσκηση 7.2 (Κίνηση Brown με κλίση). B 1.Κ.Β. $\mu > 0$, $x \in \mathbb{R}$

Θέτουμε $X_t = x + B(t) + \mu t$



και $T_r = \inf\{t \geq 0 : X_t = r\}$ $\forall r \in \mathbb{R}$

$\varphi(r) = e^{-2\mu r}$. Ν.Δ. ότι

α) $\varphi(X_t)$ είναι martingale

β) $P(T_a \wedge T_b < \infty) = 1$ $\forall a < x < b$

γ) $P(T_a < T_b) = \dfrac{\varphi(b) - \varphi(x)}{\varphi(b) - \varphi(a)}$

Λύση

α) $\varphi(X_t) = e^{-2\mu(x+B(t)+\mu t)} =$

$$= \underline{e^{-2\mu x}} \, e^{-2\mu B(t) - 2\mu^2 t}$$

$$e^{\lambda B(t) - \frac{\lambda^2}{2} t}, \quad e^{-2\mu B(t) - \frac{4\mu^2}{2} t}$$

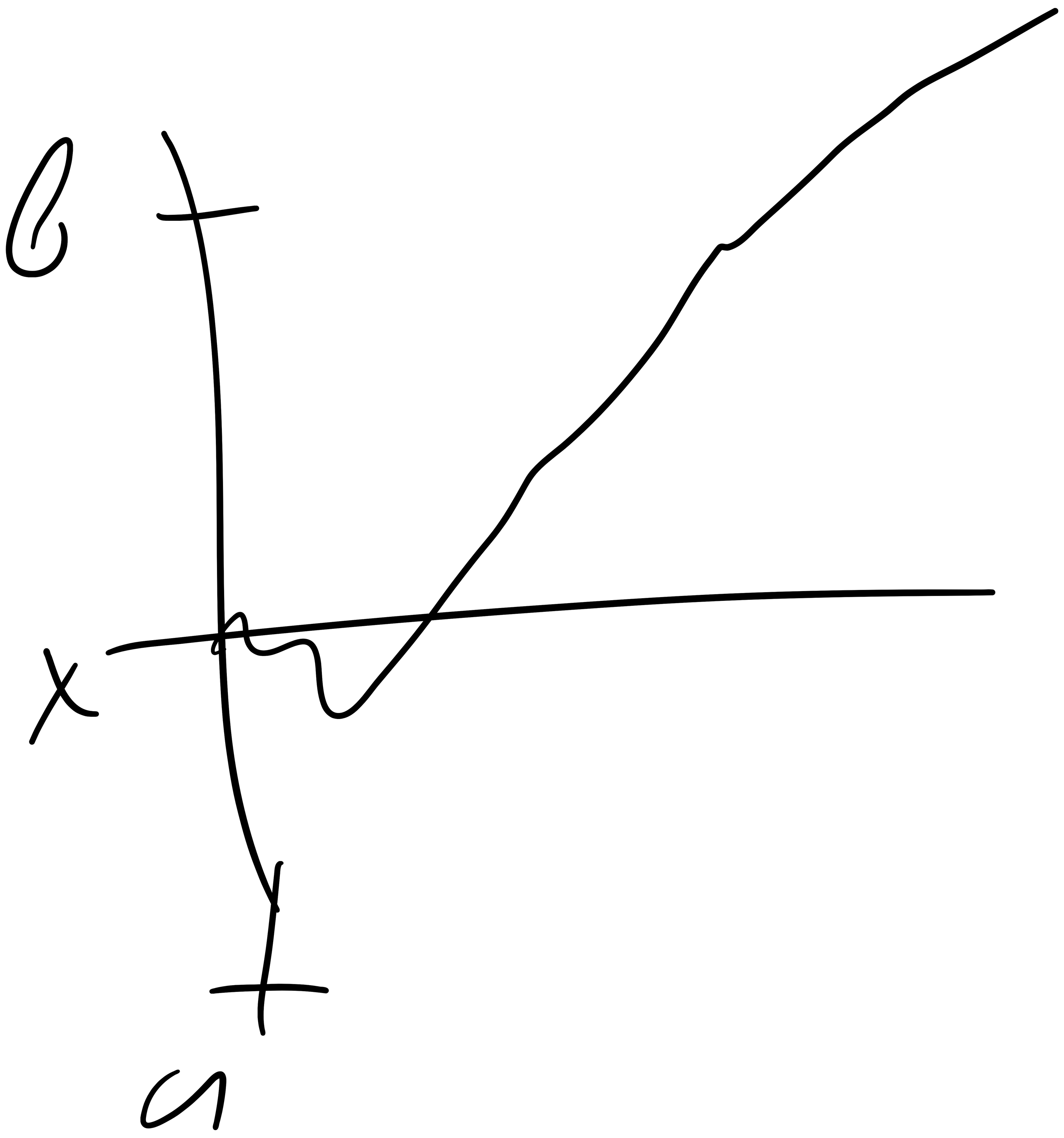
είναι περίπτωση του εκθετικού martingale

β) $\lim_{t \to \infty} \frac{X_t}{t} = \mu$ με πιθ. 1

γιατί $\lim_{t \to \infty} \frac{B(t)}{t} = 0$ με πιθ. 1

Άρα $P(\tau_0 < \infty) = 1$

$P(T_b < \infty) = 1$



(γ)

$\varphi(X_t)$

and $X(t)$ martingale

$$E\varphi(X_0) = E\varphi(X_{T\wedge r}) \quad (\ast)$$

$$T = T_a \wedge T_b$$

$$\lim_{r\to\infty} \varphi(X_{T\wedge r}) = \varphi(a) 1_{T_a<T_b} + \varphi(b) 1_{T_b<T_a}$$

$$a \le X_{T\wedge r} \le b \qquad \forall r, \forall \omega$$

Θ. εφαρμογή ανάλυση στην (*)

$$\varphi(x) = \varphi(a)\underbrace{P(T_a < T_b)}_{P} + \varphi(b)\underbrace{P(T_b < T_a)}_{(1-P)}$$

$$P = \frac{\varphi(b) - \varphi(x)}{\varphi(b) - \varphi(a)} \qquad \frac{b}{b-a}$$

$$\varphi(x) = e^{-2\mu x} \qquad \varphi(s) = s$$