Σήμερα § 8.3, 9.1, 9.2
+ Ασκηση

$$\sum_{i=1}^{k(n)} \left(B_{t_i^{(n)}} - B_{t_{i-1}^{(n)}}\right)^2 \to b-a \quad (\forall)$$

$$a = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \quad < t_{k(n)}^{(n)} = b$$

$$Y_i = \left(B_{t_i^{(n)}} - B_{t_{i-1}^{(n)}}\right)^2 - \left(t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}\right)$$

$$E Y_i = 0$$

$$Y_i \perp\!\!\!\perp Y_j \quad \text{για} \quad i \neq j$$

$$E(Y_i^2) = 2\left(t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}\right)^2$$

<u>Πρόταση</u> $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής, $t > 0$

Έστω $\Delta_n = \{0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \quad < t_{k(n)}^{(n)} = t\}$ διαμέριση του $[0, t]$ με $\|\Delta_n\| \to 0$

τότε
$$\sum_{i=1}^{k(n)} f\left(B_{t_{i-1}^{(n)}}\right)\left(B_{t_i^{(n)}} - B_{t_{i-1}^{(n)}}\right)^2$$
$$\to \int_0^t f(B_s)\, ds$$
κατά πιθανότητα για $n \to \infty$.

Β κίνηση Brown.

$$\int_0^t f(B_s)\,(dB_s)^2$$

Απόδειξη

Υποθέτοντας ότι η f είναι φραγμένη.

$$\Delta B_i = B_{t_i^{(n)}} - B_{t_{i-1}^{(n)}}$$

$$\Delta t_i^{(n)} = t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)} \qquad \forall i = 1, \dots, k(n)$$

$$\int_0^t f(B_s)\,ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k(n)} f(B_{t_{i-1}^{(n)}})\,\Delta t_i^{(n)}$$

γιατί η $f \circ B$ είναι συνεχής

Αρκεί

$$\sum_{i=1}^{k(n)} f(B_{t_{i-1}^{(n)}}) \Big(\underbrace{(\Delta B_i)^2 - \Delta t_i^{(n)}}_{= Y_i}\Big) \longrightarrow 0$$

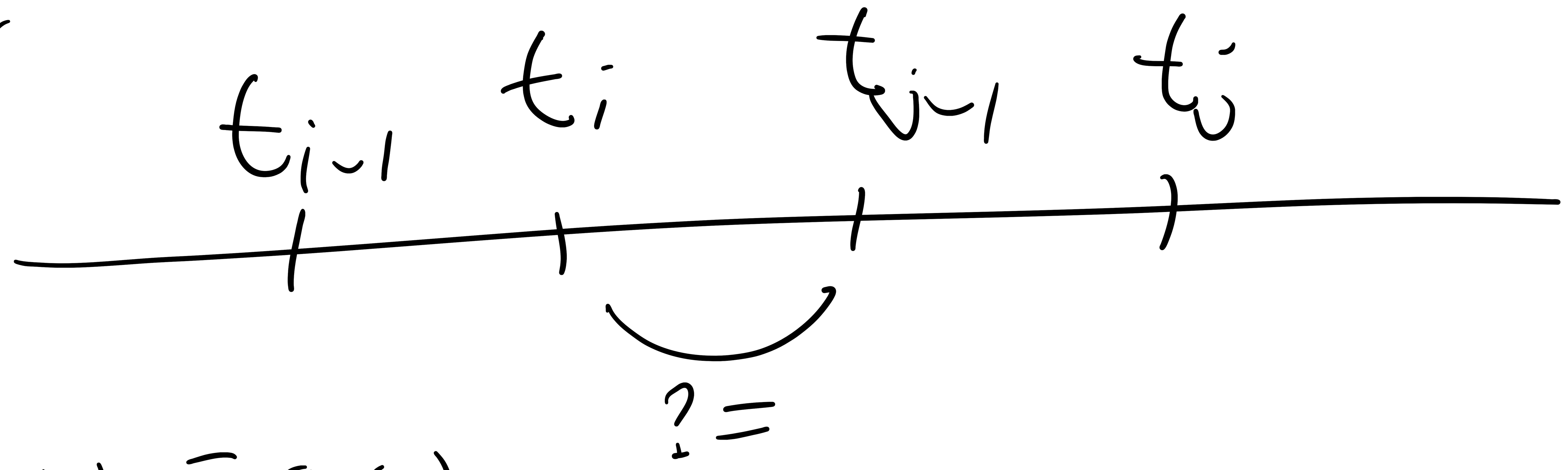
κατά πιθανότητα

Θ.δ. ότι $\to 0$ στον L^2

$$E\Big(\Big(\sum_{i=1}^{k(n)} \cdots\Big)^2\Big) =$$

$$E\left(\sum_{i=1}^{k(n)} f(B_{t_{i-1}^{(n)}})^2 Y_i^2\right) +$$

$$+\, 2E\left(\sum_{i<j} \overbrace{f(B_{t_{i-1}^{(n)}})\, f(B_{t_{j-1}^{(n)}})\, Y_i}^{\mathcal{F}_{t_{j-1}^{(n)}}\text{-μετρ.}}\, Y_j\right)$$



$$E(f\cdot f\, Y_i)\, E(Y_j) = 0$$

$$\leq \|f\|_\infty^2 \sum_{i=1}^{k(n)} Y_i^2$$

$$= \|f\|_\infty^2 \sum_{i=1}^{k(n)} \left(t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}\right)^2$$

$$\leq \|f\|_\infty^2 \|\Delta_n\| \sum_{i=1}^{k(n)} (t_i - t_{i-1}) =$$

$$= \|f\|^2 \|\Delta_n\|\, t \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Η πρακτική δικαιολογεί την συντόμευση

$$(dB_s)^2 = ds$$

8.2 Έστω $(\Delta_n)_{n\geq 1}$ ακολουθία διαμερίσεων του $[0,t]$, με $\Delta_n := \{0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \cdots < t_{k(n)}^{(n)} = t\}$ για κάθε $n \geq 1$, ώστε $\|\Delta_n\| \to 0$. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ να δειχθεί ότι

$$\sum_{j=1}^{k(n)} |B_{t_j^{(n)}} - B_{t_{j-1}^{(n)}}|^{2+\varepsilon} \to 0 \tag{8.9}$$

στον $L^2(\mathbf{P})$ καθώς $n \to \infty$.

Λύση

$$\Delta B_j = B_{t_j^{(n)}} - B_{t_{j-1}^{(n)}} \qquad j=1, \ldots, k(n)$$

$$\Delta t_j = t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}$$

$$E\left(\left(\sum_{j=1}^{k(n)} |\Delta B_j|^{2+\varepsilon}\right)^2\right) =$$

$$\sum_{j=1}^{k(n)} |\Delta B_j|^{4+2\varepsilon} + 2\sum_{i<j} E\left(|\Delta B_i|^{2+\varepsilon} |\Delta B_j|^{2+\varepsilon}\right)$$

$$\left(\begin{array}{l} \Delta B_j \sim N(0, \Delta t_j) \\ \Delta B_j = \sqrt{\Delta t_j}\, Z \quad \text{με} \quad Z \sim N(0,1) \end{array} \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{k(n)} (\Delta t_j)^{2+\varepsilon} E\left(|Z|^{4+2\varepsilon}\right) \leftarrow 1$$

$$+ 2 \sum_{i<j} E\left(|\Delta B_i|^{2+\varepsilon}\right) E\left(|\Delta B_j|^{2+\varepsilon}\right) \leftarrow 2$$

$$① \leq E\left(|Z|^{4+2\varepsilon}\right) \|\Delta_n\|^{1+\varepsilon} \sum_{j=1}^{K(n)} \Delta t_j \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

$$② = 2 \sum_{i<j} \underline{(\Delta t_i)}^{1+\frac{\varepsilon}{2}} \underline{(\Delta t_j)}^{1+\frac{\varepsilon}{2}} E\left(|Z|^{2+\varepsilon}\right)^2$$

$$\leq 2 E\left(|Z|^{2+\varepsilon}\right)^2 \cdot \|\Delta_n\|^{\varepsilon} \sum_{i<j} (\Delta t_i)(\Delta t_j)$$

$$\leq E\left(|Z|^{2+\varepsilon}\right) \|\Delta_n\|^{\varepsilon} \sum_{i,j=1}^{K(n)} (\Delta t_i)(\Delta t_j)$$

$$= \quad '' \quad \left(\sum \Delta t_i\right)^2$$

$$= E(\qquad) \|\Delta_n\|^{\varepsilon} t^2 \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

Το ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes
(Παράρτημα Β2)

$$\int_a^b f(x)\, dg(x)$$

$f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$

$\Delta = \{a = t_0 < t_1 < \quad < t_n = b\}$
διαμέριση του $[a, b]$.
Επιλογή ενδιαμέσων σημείων για τη Δ
λέμε κάθε σύνολο $E = \{\xi_1, \quad, \xi_k\}$
ώστε $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1. \;, k$.

Για Δ, E δεδομένα

$$S(f, g, \Delta, E) = \sum f(\xi_i)\big(g(t_i) - g(t_{i-1})\big)$$

άθροισμα R-S για την f ως προς την g
που αντιστοιχεί στα Δ, E.

Ορισμός Η f λέγεται R-S ολοκληρώσιμη ως προς την g αν $\exists A \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ διαμ. Δ_ε του $[a,b]$ ώστε $\forall$ διαμέριση $\Delta \supset \Delta_\varepsilon$ και επιλογή σημείων Ξ για την Δ έχουμε

$$|S(f, g, \Delta, \Xi) - A| < \varepsilon$$

Ο A ονομάζεται . . . − συμβολίζεται με $\int_a^b f(x)\,dg(x)$

Θέλουμε το $\int_a^b f\,dg$ να υπάρχει $\forall$ f συνεχή.

Αυτό συμβαίνει αν η g είναι φραγμένης κύμανσης

$(g = f_1 - f_2$ με $f_1 \uparrow$, $f_2 \uparrow)$

$$\int f(x)\,dg(x) = \int f(x)\,g'(x)\,dx$$

αν $g \in C^1([a,b])$

$$\left(C([a,b])\right)^* = BV[a,b] \ \ldots$$

Θέλουμε να ασχοληθούμε με

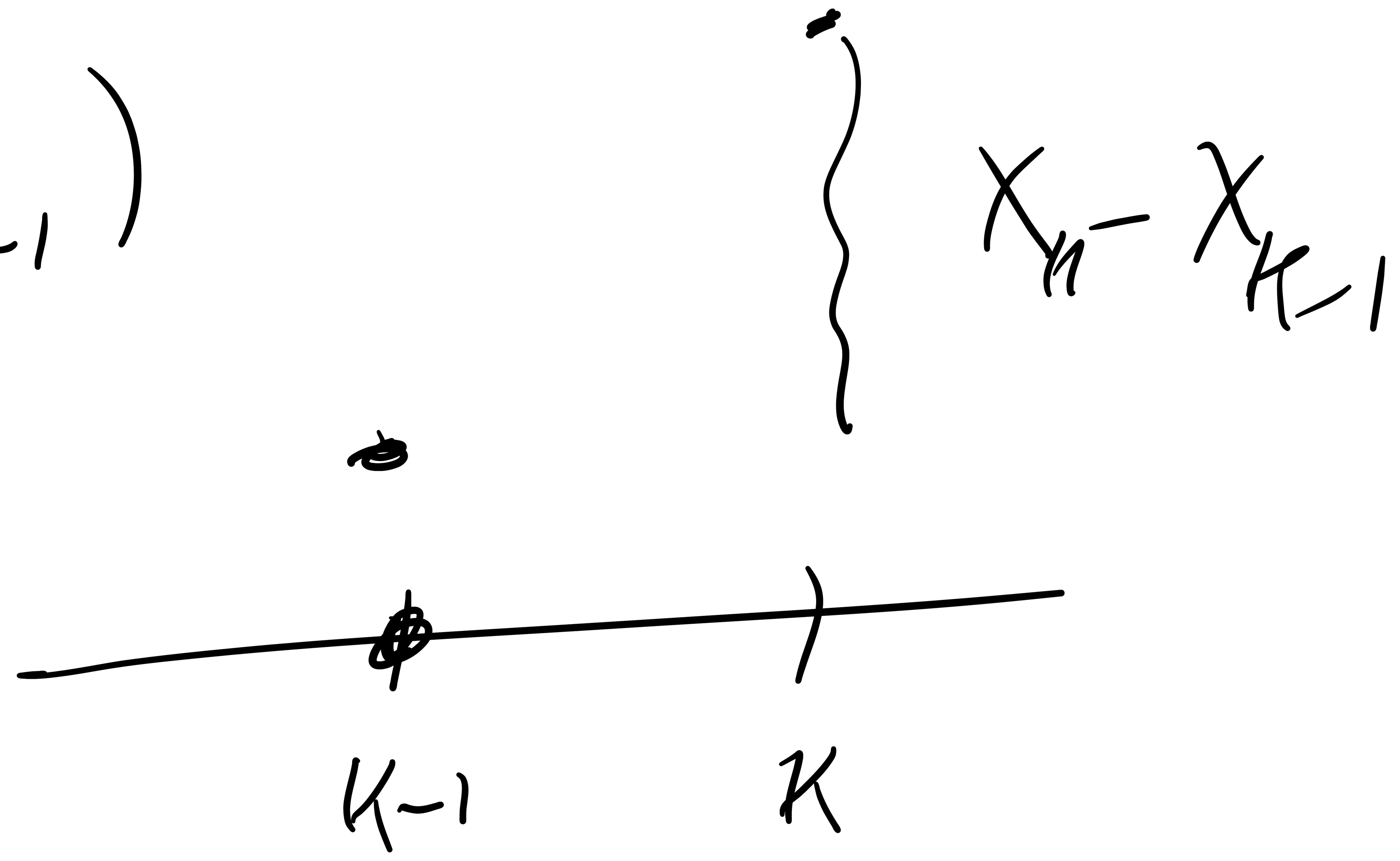
$$\int_0^t f(s)\,dB_s \longleftarrow$$

Γιατί;

$$\sum A_k (X_k - X_{k-1})$$

$\uparrow$

$\mathcal{F}_{k-1}$-μετρήσιμη



$$\sum_{i=1}^{N} A_{t_{i-1}} \left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)$$

$B_s(\omega) : s \geq 0$

$$\sum_{i=1}^{k(n)} f(\xi_i)\left(B_{t_i^{(n)}} - B_{t_{i-1}^{(n)}}\right)$$

§9.2 Εισαγωγή στο ολοκλήρωμα Itô

Έχουμε χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $(B_t)_{t\geq 0}$ μονοδιάστατη κίνηση Brown σε αυτόν, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ η επαυξημένη διήθηση.

Ορισμός Μια $X : [0,\infty)\times\Omega \to \mathbb{R}$ λέγεται **μετρήσιμη** αν είναι

$$\mathcal{B}([0,\infty))\otimes\mathcal{F} / \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ μετρήσιμη.}$$

Ορισμός Μια X όπως πιο πάνω λέγεται **προοδευτικά μετρήσιμη** αν $\forall t \geq 0$ ο περιορισμός της στο $[0,t]\times\Omega$ είναι

$$\mathcal{B}([0,t])\otimes\mathcal{F}_t / \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ μετρήσιμη}$$

Στόχος να ορίσουμε το

$$\int_0^\infty X(s,\omega)\, dB_s$$

Δύο χώροι ανελίξεων : $[0,\infty)\times\Omega \to \mathbb{R}$

$$\mathcal{H}^2 = \Big\{ X : \ X \text{ μετρήσιμη, προσαρμοσμένη με } \|X\|^2_{L^2(\lambda\times P)} = E\Big(\int_0^\infty X^2(s,\omega)\, ds\Big) < \infty \Big\}$$

$\mathcal{H}_0^2$: $X:[0,\infty)\times\Omega \to \mathbb{R}$ της μορφής

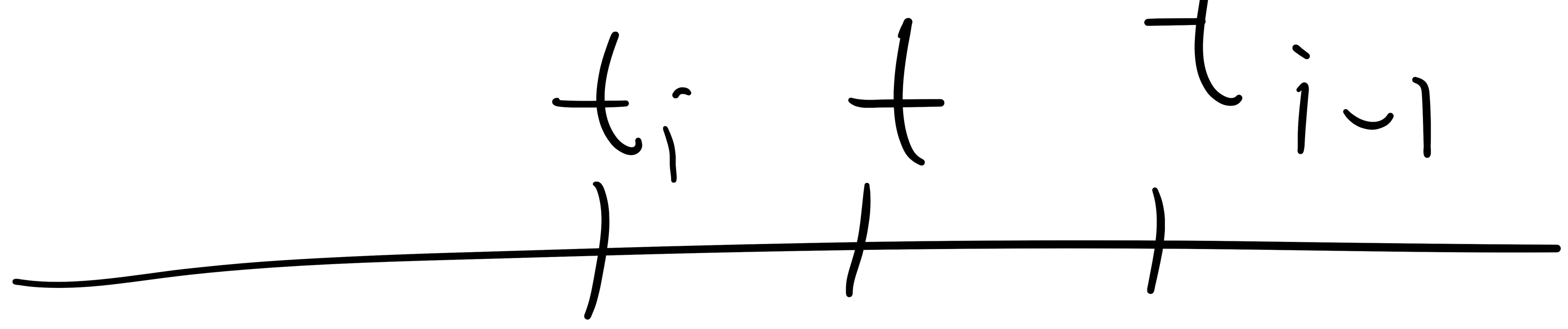
$$X(t,\omega) = \sum_{i=1}^{k} A_i(\omega)\, 1_{(t_i,t_{i+1}]}(t) \quad (*)$$

με $k\in\mathbb{N}^+$, $0\le t_1 < \quad < t_{k+1}$

A_i είναι $\mathcal{F}_{t_i}$-μετρήσιμος

$E(A_i^2) < \infty$ $\quad \forall i=1,\dots,k+1$

Εύκολα $\mathcal{H}_0^2 \subset \mathcal{H}^2$



$X(t,\omega) = A_i(\omega) \leftarrow \mathcal{F}_{t_i}$-μετρήσιμη $\ \subset \mathcal{F}_t$

Για τη X όπως στο $\circledast$ έχουμε

$$\|X\|^2_{L^2(\lambda \times P)} = E\left(\int_0^\infty X^2(s,\omega)\, ds \right)$$

$$= E\left(\sum_{i=1}^{k} A_i^2(\omega)\,(t_{i+1} - t_i) \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} E(A_i^2)\,(t_{i+1} - t_i) < \infty$$

<u>Ορισμός</u> Για X όπως στην $\circledast$ ορίζουμε

$$I(X) := \sum_{i=1}^{k} A_i(\omega)\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \right)$$

το ολοκλήρωμα Itô της X. Είναι τ.μ., τη συμβολίζουμε και με

$$\int_0^\infty X(s,\omega)\, dB_s$$