Σήμερα: §13.2, 14.1–14.3

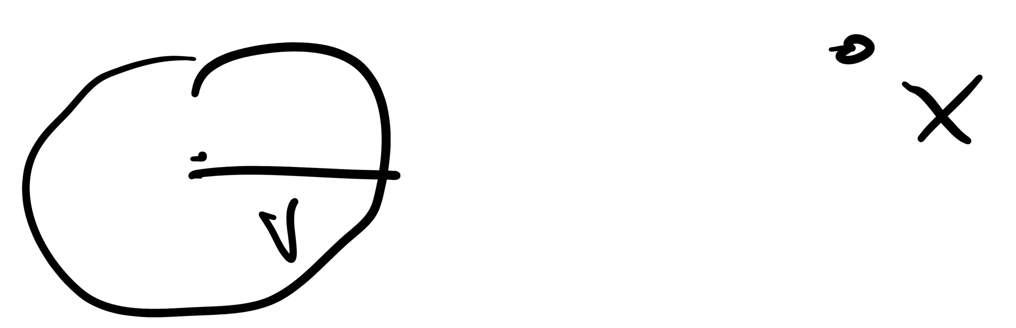
B d-διάστατη κ.Β.

$\tau_r = \inf\{s \geq 0 : |B_s| = r\}$

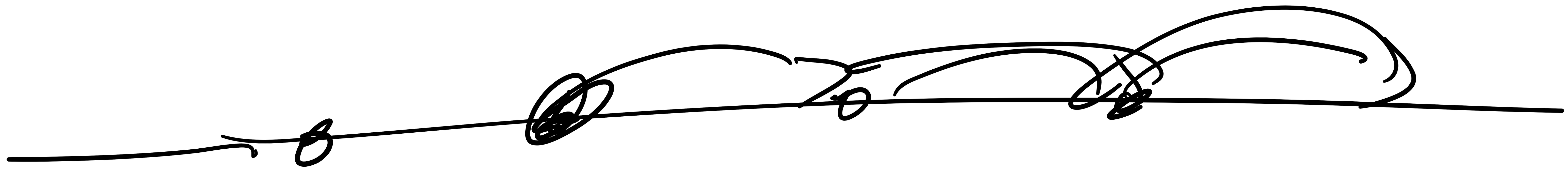
$\forall r \geq 0$

Ισχύει: Για $x \in \mathbb{R}^d$, $0 < r < |x|$

$$P_x(\tau_r < \infty) = \begin{cases} \left(\dfrac{r}{|x|}\right)^{d-2} & \text{αν } d \geq 3, \\ 1 & \text{αν } d = 2. \end{cases}$$



Ανέλιξη $(X_t)_{t\geq 0}$ με τιμές στο $\mathbb{R}^d$ επαναληπτική αν $\forall\, U \subset \mathbb{R}^d$ ανοιχτό με πιθανότητα 1, υπάρχει $t_n \nearrow \infty$ ώστε $X_{t_n} \in U$ $\forall n \geq 1$



$d \geq 2$

<u>Πρόταση</u> B d-διάστατη κ.Β. με $B_0 = x \in \mathbb{R}^d$ δεδομένο.

i) Αν $d=2$, η B είναι επαναληπτική.

ii) Αν $d \geq 3$, τότε $P\left(\lim_{t\to\infty} |B_t| = \infty\right) = 1$.

Αποδ.

i) Θέτουμε $U = D(0,r)$, $r>0$
$= \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < r\}$

$t_1 = \inf\{s \geq 0 : |B_s| = \frac{r}{2}\}$

$P(t_1 < \infty) = 1$

t_1 χρόνος διακοπής...

$\sigma_1 = \inf\{s \geq t_1 : |B_s| = r+1\}$

Η $X_t^{(1)} = B(t_1+t) - B(t_1)$ είναι
τ.Κ.Β. ανεξάρτητη από την $\mathcal{F}_{t_1}$

$$B(t_1+t) = B(t_1) + X_t$$

$$|\quad| = \frac{r}{2}$$

$$P(\sigma_1 < \infty) = 1$$

σ_1 χρόνος διακοπής. Θεωρούμε την

$$Y^{(1)}_t = B(\sigma_1 + t) - B(\sigma_1)$$

Τ.Κ.Β

$$t_2 = \inf\{s > \sigma_1 : |B_t| = \frac{r}{2}\}$$

$$\sigma_2 = \inf\{s > t_2 : |B_t| = r+1\}$$

$$t_1, \quad , \sigma_1, \quad , t_2, \sigma_2, t_3$$

$$\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \frac{r}{2} & r+1 & \frac{r}{2} & r+1 \end{array}$$

Ισχύει $t_n \nearrow \infty$ γιατί αν

$$\lim_{n\to\infty} t_n = a < \infty \quad \text{τότε}$$

$$\lim_{t\to a}|B(t)| = \lim_{n\to\infty}|B(t_n)| = \frac{r}{2}$$

$$\parallel$$

$$\lim_{n\to\infty}|B(\sigma_n)| = r+1$$

$$t_n = \sum_{i=2}^{n}(t_i - \sigma_{i-1} + \sigma_{i-1} - t_{i-1})$$

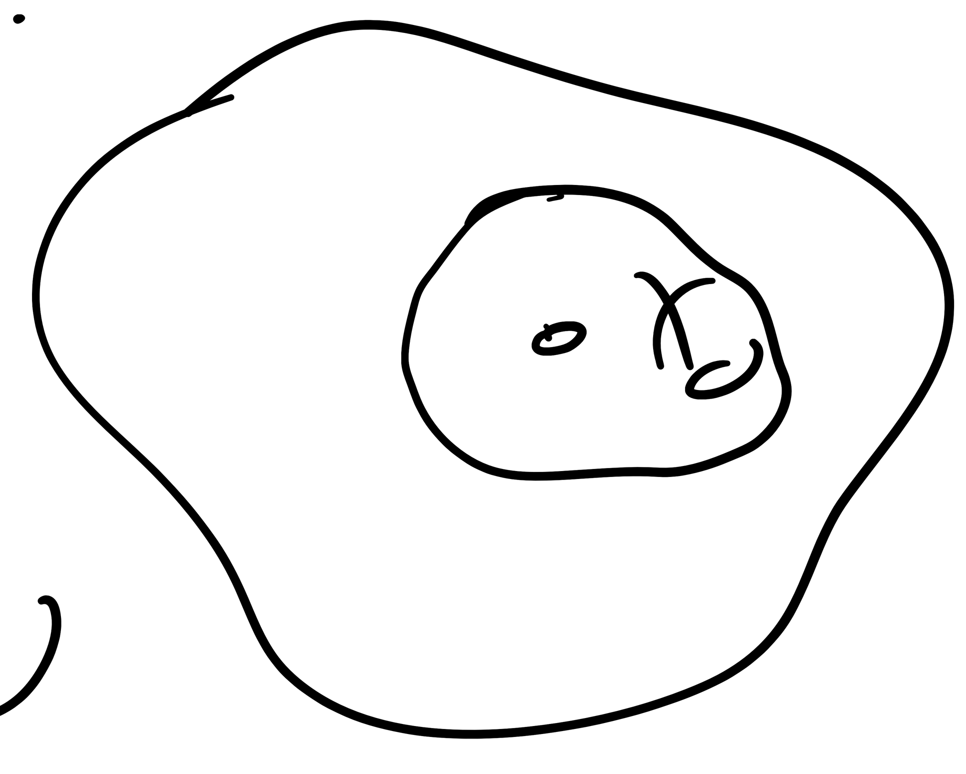
$$= \underline{\sum_{i=2}^{n}(t_i - \sigma_{i-1})} + \underline{\sum_{i=2}^{n}(\sigma_{i-1} - t_{i-1})}$$

$$\frac{t_n}{n} \to E(t_2 - \sigma_1) + E(\sigma_1 - t_1)$$

Άρα $B(t_n) \in U \quad \forall n \geq 1$ . . .

Για $U \subset \mathbb{R}^2$ ανοιχτό.

Έστω $x_0 \in U$.



$\exists\, r>0$ ώστε $D(x_0, r) \subset U$

Θεωρούμε την κ.Β. $W_t = B_t - x_0$

Αυτό ισχύει $\quad W_0 = x - x_0 \in \mathbb{R}^d$

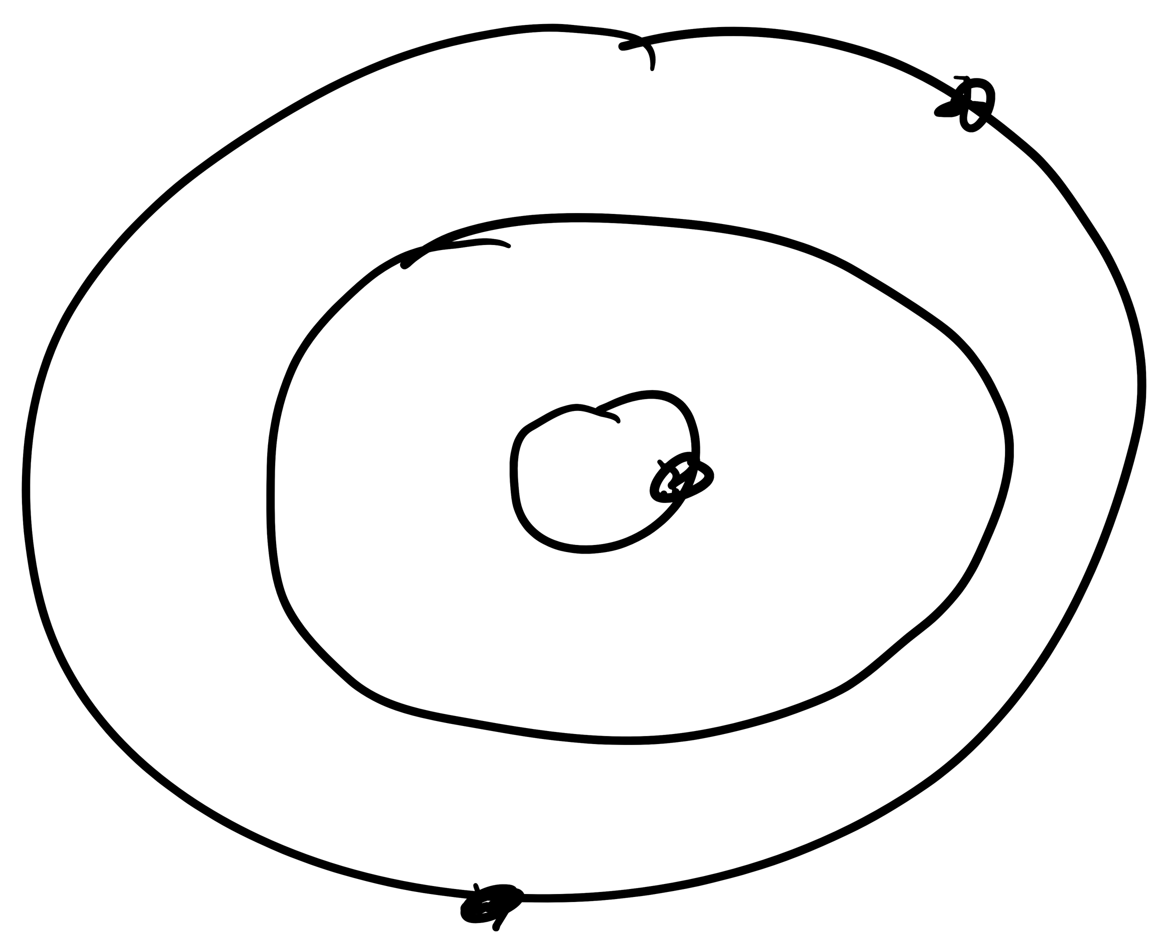
$\ldots \exists t_n : \quad W_{t_n} \in D(0, r)$

$$B_{t_n} = x_0 + W_{t_n} \in D(x_0, r)$$

ii) Για $r > |x|$ διαλέγουμε $n \geq 1$ $\quad U = D(0, r)$

$t_1 = \inf\{s \geq 0 : |B_s| = r+1\}$

$$p = P_{r+1 \to \frac{r}{2}} = \left(\frac{\frac{r}{2}}{r+1}\right)^{d-2}$$



$$< \left(\frac{1}{2}\right)^{d-2} < 1$$

$$P(\sigma_n < \infty) = p^n \qquad 1 - p$$

$\sigma_1, \sigma_2, \quad , \sigma_n,$

$v \quad v \quad v, v,$

$\exists n : \quad \sigma_n = \infty$

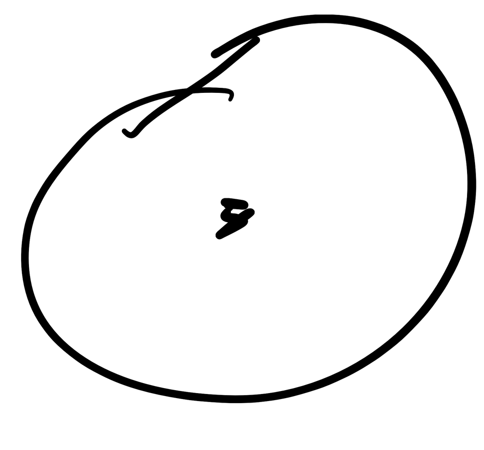
Πιθανότητα $\tau = \inf\{n : \sigma_k = \infty\}$

$$P(T > n) = P(\sigma_1 < \infty, \ldots, \sigma_n < \infty)$$
$$= \rho^n$$

$$P(T = \infty) \leq \rho^n \quad \forall n$$
$$\to 0 \quad n \to \infty$$

$$\underbrace{P\left(\varliminf_{t\to\infty} |B_t| \geq \frac{r}{2}\right) = 1}_{A_r} \quad \forall r > |x|$$

$$P\left(\varliminf_{t\to\infty} |B_t| = \infty\right) = 1$$

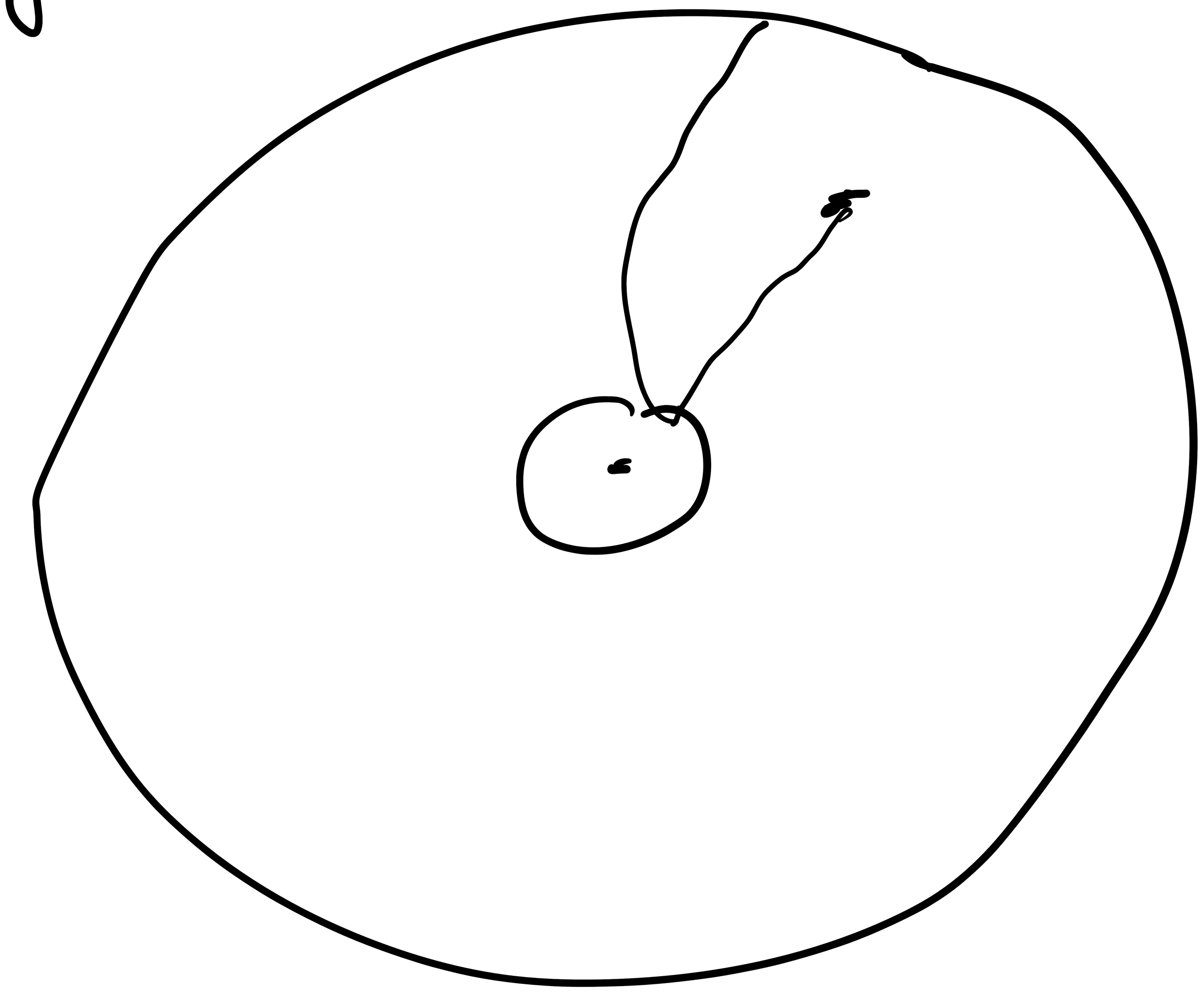


<u>Πόρισμα</u> Αν $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ και B διδιάστατη Κ.Β. με $B_0 = x$, τότε

$$P(T_0 < \infty) = 0$$

$(\tau_r = \inf\{s : |B_s| = r\})$

Annot



$\tau_n \quad \frac{1}{n} < |x| < R$

$$P_x(\tau_{\frac{1}{n}} < \tau_R)$$

$$= \frac{f_2(R) - f_2(|x|)}{f_2(R) - f_2(\frac{1}{n})}$$

$$= \frac{\log R - \log|x|}{\log R - \log\frac{1}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$P(\tau_0 < \tau_R) \leq P(\tau_{\frac{1}{n}} < \tau_R) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

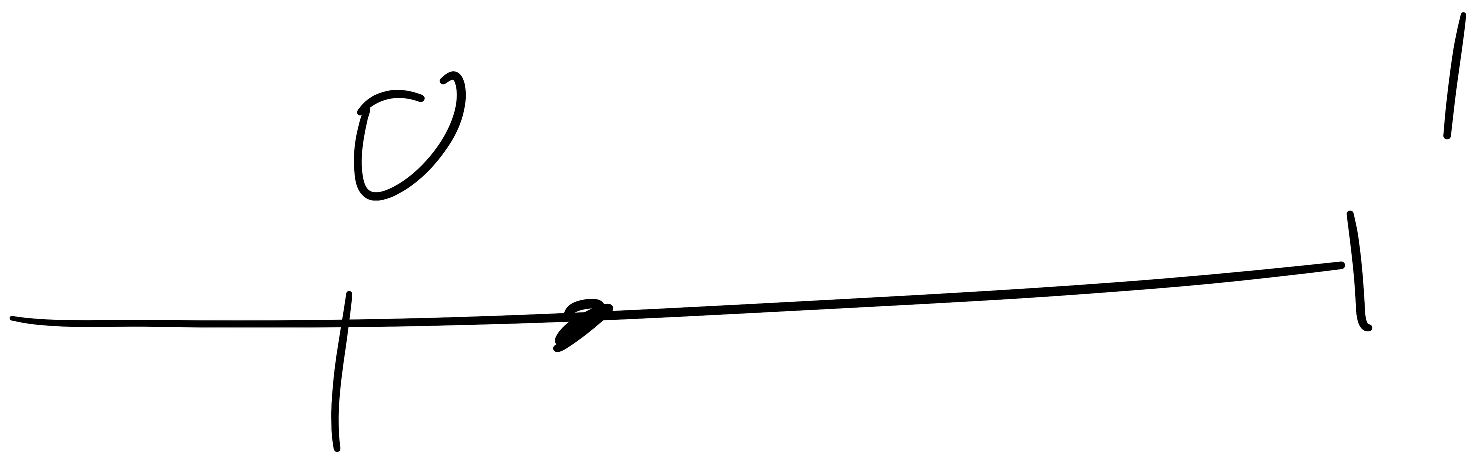
$$\{\tau_0 < \infty\} = \bigcup_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n>|x|}}^{\infty} \{\tau_0 < \tau_n\}$$

$$P(\tau_0 < \infty) = \lim_{n\to\infty} P(\tau_0 < \tau_n) = 0$$

$A_y = \{ x \mid \text{wnain to } y \}_{\circ x_0}$

$P(A_y) = 0 \quad \forall y \neq x$

$P\left(\bigcup_{y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{x\}} A_y \right) \neq 0$



Κεφ. 14 Στοχαστικές διαφ. εξισώσεις

Αυτές είναι εξισώσεις της μορφής

$$dX_t = \mu(t, X_t)\,dt + \sigma(t, X_t)\,dB_t \quad (*)$$

B Κ.Β. $\mu, \sigma : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

μετρήσιμες

Ψάχνουμε την ανέλιξη X_t

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(s, X_s)\,ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\,dB_s$$

Πώς τη λύνουμε;

- Βρίσκουμε το $d(a(t, X_t))$ για μια κατάλληλη συνάρτηση a ώστε το $d(a(t, X_t))$ να μην εξαρτάται από την X_t.

- ολοκληρώνοντας την προηγούμενη σχέση και λύνοντας ως προς X_t

<u>παράδειγμα</u> Η γεωμετρική κίνηση Brown

$$dX_t = \mu X_t\, dt + \sigma X_t\, dB_t$$

$$X_0 = x_0 \qquad . \qquad B = \text{Τ.Κ.Β.}$$

με $x_0 > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. $X_t = ;$

Λύση

$$d(\log X_t) = \frac{1}{X_t}\, dX_t + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{X_t^2}\right)(dX_t)^2$$

$f(x) = \log x$ $\qquad\qquad$ $(dB_t)^2$

$$= \mu\, dt + \sigma\, dB_t - \frac{1}{2X_t^2}\sigma^2 X_t^2\, dt$$

$$= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma\, dB_t$$

$$\log X_t = \log \underset{= x_0}{X_0} + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma B_t$$

$$X_t = x_0 \, e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t}$$

Αυτή η X_t ορίζεται λύση το πρόβλημα για $X_0 = x_0$ και

$$dX_t = \dots = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t$$

Άσκηση 14.1 Να λυθεί η ΣΔΕ

$$dX_t = -\frac{X_t}{1-t} dt + dB_t$$

$$X_0 = 0$$

στο $[0,1)$.

Υποδ: Υπολογίστε το $d\left(\frac{X_t}{1-t}\right)$

Αν X_t είναι λύση τότε

$$d\left(\frac{X_t}{1-t}\right) = dX_t \frac{1}{1-t} + X_t \, d\left(\frac{1}{1-t}\right)$$

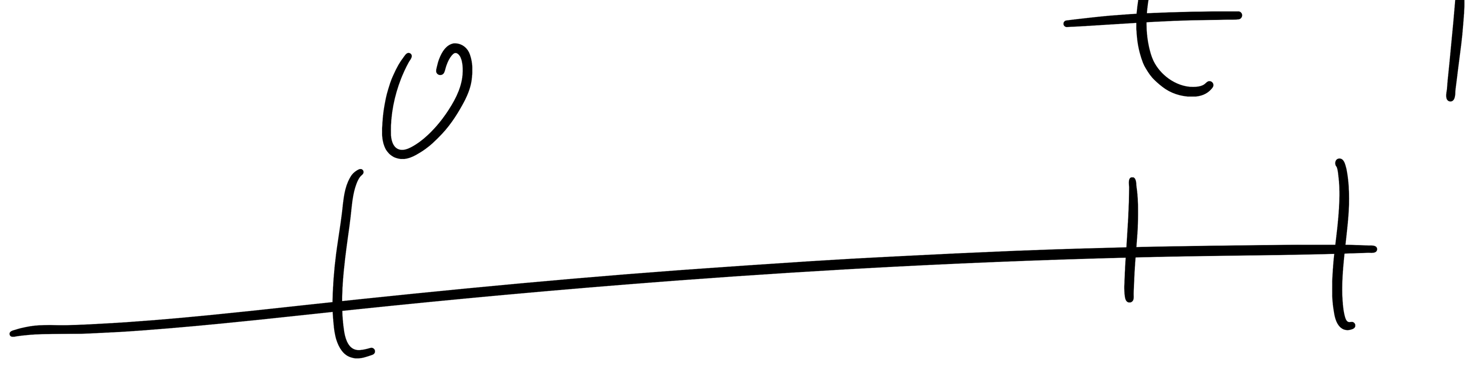
$$= -\frac{X_t}{(1-t)^2}\,dt + \frac{1}{1-t}\,dB_t$$

$$+ X_t \frac{1}{(1-t)^2}\,dt = \frac{1}{1-t}\,dB_t$$

$$\frac{X_t}{1-t} - \frac{X_0}{1-0} = \int_0^t \frac{1}{1-s}\,dB_s$$

$$X_t = (1-t)\int_0^t \frac{1}{1-s}\,dB_s$$

$\forall t \in [0,1)$



$$E\left(\int_0^t \frac{1}{(1-s)^2}\,ds\right) < \infty \quad \forall t \in [0,1)$$

Άρα καλά ορισμένη. Επίσης, λύση της Σ.Δ.Ε.

Έστω $(B_t)_{t\geq 0}$ κίνηση Brown

$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ η επαυξημένη διήθηση.

$\mu, \sigma : [0,\infty)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

μετρήσιμες, $x_0 \in \mathbb{R}$

Λύση της Σ.Δ.Ε.

$$dX_t = \mu(t, X_t)\,dt + \sigma(t, X_t)\,dB_t$$

$$X_0 = x_0$$

λέμε κάθε ανέλιξη $(X_t)_{t\geq 0}$ ώστε

- $(X_t)_{t\geq 0}$ έχει συνεχή μονοπάτια με πιθανότητα 1
- είναι προσαρμοσμένη στην $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$
- ικανοποιεί την

$$\int_0^t |\mu(s, X_s)|\, ds, \quad \int_0^t \sigma^2(s, X_s)\, ds < \infty$$

$\forall\, t \geq 0$ με πιθανότητα 1

- και πιθανότητα 1 ισχύει

$$X_t = x_0 + \int_0^t \mu(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s$$

$\forall\, t \geq 0.$

Αν $\sigma \equiv 0$

$$dX_t = \mu(t, X_t)\, dt$$

$$X_t' = \mu(t, X_t)$$