$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\quad \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ $\quad E|X| < \infty$

$E(X|\mathcal{G}) = Y$
- Y $\mathcal{G}$-μετρ.
- $\int_A Y \, dP = \int_A X \, dP \quad \forall A \in \mathcal{G}$

<u>Πρόταση</u> $\quad X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ τ. μ.

Y $\mathcal{G}$-μετρήσιμη $\quad E|X|, E|XY| < \infty$

Τότε $\quad E(XY|\mathcal{G}) = Y E(X|\mathcal{G})$

Αποδ

Αρκεί $\quad E(XY 1_A) = E(Y E(X|\mathcal{G}) 1_A)$ $(*)$

$\forall A \in$

- Αν $Y = 1_B$ με $B \in \mathcal{G}$

$(*) \Leftrightarrow E(X 1_{A \cap B}) = E(E(X|\mathcal{G}) \underbrace{1_{A \cap B}}_{\in \mathcal{G}})$

- Αν $Y = \sum_{i=1}^{m} a_i 1_{A_i}$, $A_i \in \mathcal{G}$ . . .

$E|XY| < \infty$

- Αν $Y : \Omega \to [0, \infty)$ $\mathcal{G}$-μετρήσιμη, $X \geq 0$

$Y = \lim_{n \to \infty} Y_n$, Y_n $\mathcal{G}$-μετρ. απλή, $Y_n \nearrow$

$E(X Y_n 1_A) = E(E(X|\mathcal{G}) Y_n 1_A) \quad \forall n$

$\xRightarrow{\text{μον. σύγκλ.}} E(XY 1_A) = E(E(X|\mathcal{G}) Y 1_A)$

Αν $X : \Omega \to \mathbb{R}$ $\quad X = X^+ - X^-$ $\quad E|XY| < \infty$

$\{X^+, Y\}$ $\quad \{X^-, Y\}$ $\quad \{X, Y\}$

- Αν $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathcal{G}$-μετρήσιμη $\quad E|XY| < \infty$

$\{X, Y^+\}, \{X, Y^-\} \longrightarrow \{X, Y\}$

$E(XY^+ 1_A) = E(E(X|\mathcal{G}) Y^+ 1_A)$

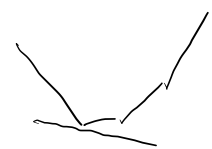
Ανισότητα Jensen

Πρόταση $I \subset \mathbb{R}$ διάστημα, $f: I \to \mathbb{R}$ κυρτή.

$$f(E(X|\mathcal{G})) \le E(f(X)|\mathcal{G}) \quad \text{σ.π.}$$

όπου $X : \Omega \to \mathbb{R}$ τ.μ. με $P(X \in I) = 1$

$E|X| < \infty$, $E|f(X)| < \infty$



$$\forall c \in I \qquad f(x) \ge f(c) + \ell(x-c)$$

$$f(x) = \sup_n \{a_n x + b_n\}$$

$$f(X) \ge a_n X + b_n \qquad P(\Omega_n) = 1$$

$$E(f(X)|\mathcal{G}) \ge a_n E(X|\mathcal{G}) + b_n \quad \text{σ.π.}$$

$$\text{''} \quad \ge \sup_n \{a_n E(X|\mathcal{G}) + b_n\} \quad \cap\, \Omega_n$$

$$= f(E(X|\mathcal{G}))$$

Πόρισμα: $X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $p \geq 1$

Τότε

$$\| E(X|\mathcal{G}) \|_p \leq \| X \|_p \to (E(|X|^p))^{1/p}$$

Αποδ.

Θέλουμε $E(|E(X|\mathcal{G})|^p) \leq E(|X|^p)$

Η Jensen για την $f(x) = |x|^p$ δίνει

$$|E(X|\mathcal{G})|^p \leq E(|X|^p | \mathcal{G})$$

$$\Rightarrow E(|E(X|\mathcal{G})|^p) \leq E(E(|X|^p|\mathcal{G})) = E(|X|^p)$$

Άσκηση 2.6

$X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$

$$E(X\,E(X|\mathcal{G})) \le E(X^2)$$

Λύση

$$E(\underbrace{X\,E(X|\mathcal{G})}_{Y}) = E(E(\underbrace{X\,E(X|\mathcal{G})}_{Y}|\mathcal{G}))$$

$$= E(E(X|\mathcal{G})\,E(X|\mathcal{G})) =$$

$$= E((E(X|\mathcal{G}))^2) \le E(E(X^2|\mathcal{G}))$$

$f(E(X|\mathcal{G}))$

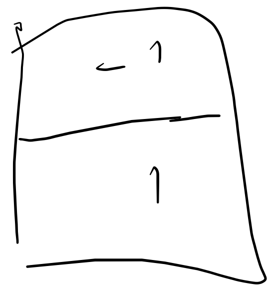
$$= E(X^2)$$

Ασκ. 2.4 $\quad X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$$X \neq 0 \quad \forall \omega \overset{?}{\Longrightarrow} E(X \mid \mathcal{G}) \neq 0 \text{ με πθ } 1;$$

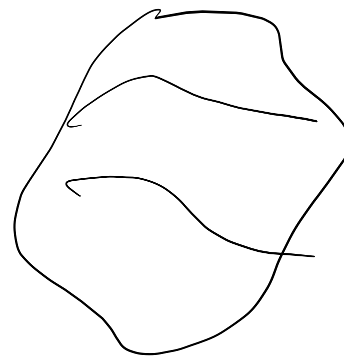
Λύση

$$P(X=-1) = P(X=1) = \frac{1}{2}$$



$$\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$$

$$E(X \mid \mathcal{G}) = EX = 0$$



Η $E(X|\mathcal{G})$ ως προβολή

$L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\quad \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$

$H = L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$\mathcal{L}^2$

$$\langle f, g \rangle = \int f(\omega) g(\omega) \, dP(\omega)$$

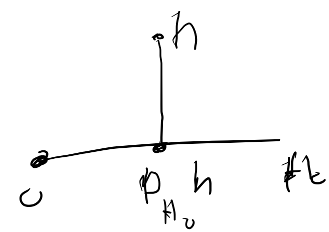
$\|Tx - Ty\|_H \leq \|x - y\|$,

$x_n \quad x_m \quad \|x_n - x_m\|$

$H_0 = L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$ κλειστός υπόχ. του H

$Tx_n \to Tx$

$P_{H_0} : H \to H_0$ η ορθογ. προβολή



$h = h_1 + h_2 \qquad h_1 \in H_0$

$P_{H_0} h = h_1 \qquad h_2 \perp H_0$

Πρόταση Η $T: H \to H_0$ με

$T(X) = E(X|\mathcal{G})$ είναι η ορθ. προβολή

στον H_0.

$L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$

Αποδ.

Η T είναι καλά ορισμένη

Κάθε $X \in H$ γράφεται $X = \underbrace{T(X)}_{\in H_0} + X - T(X)$

Αρκεί ν.δ. ότι $X - T(X) \perp H_0$

Δηλ. $\forall\, Y \in H_0$ ισχύει $E(Y(X - E(X|\mathcal{G}))) = 0$

Δηλ. $E(YX) = E(Y E(X|\mathcal{G}))$

Πράγματι $E(YX) = E(E(YX|\mathcal{G}))$

$= E(Y E(X|\mathcal{G}))$

2.9 Για $X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ και $Y \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$, να δειχθεί ότι

(α)

$$\mathbf{E}(YX) = \mathbf{E}(Y\,\mathbf{E}(X \mid \mathcal{G})),$$

δηλαδή $X - \mathbf{E}(X \mid \mathcal{G}) \perp Y$.

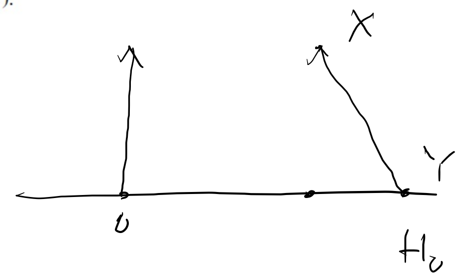
(β)

$$\mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X \mid \mathcal{G}))^2) \leq \mathbf{E}((X - Y)^2),$$

και η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $Y = \mathbf{E}(X \mid \mathcal{G})$, δηλαδή ισούνται με πιθανοτητα 1. Με άλλα λόγια, η $\mathbf{E}(X \mid \mathcal{G})$ είναι το (ουσιαστικά μοναδικό) εγγύτερο στο X σημείο του υποχώρου $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbf{P})$.

Λύση

$TX = E(X \mid \mathcal{G})$



(β)

$E((X-Y)^2) =$

$E((X-TX)^2 + (TX-Y)^2 + 2(X-TX)(TX-Y))$

$= E((X-TX)^2) + E((TX-Y)^2) + 0$

$\geq \dots$

$=$ αν $TX = Y$

2.10 $\langle TX, Y \rangle = \langle X, TY \rangle$

$T = T^*$

Πρόταση 2.13. *Έστω $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ διαχωρίσιμοι μετρικοί χώροι, $X : \Omega \to \mathcal{S}_1, Y : \Omega \to \mathcal{S}_2$ τυχαίες μεταβλητές, $h : \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2 \to \mathbb{R}$ Borel μετρήσιμη ώστε $\mathbf{E}\,|h(X,Y)| < \infty$, και $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ σ-άλγεβρα ώστε η X να είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμη ενώ η Y να είναι ανεξάρτητη της $\mathcal{G}$. Θέτουμε $\phi(x) := \mathbf{E}(h(x,Y))$ αν η μέση τιμή είναι καλά ορισμένη και $\phi(x) = 0$ διαφορετικά. Τότε με πιθανότητα 1, η $\phi(X)$ προσδιορίζεται από τον πρώτο κλάδο της ϕ και*

$$\mathbf{E}(h(X,Y)\,|\,\mathcal{G}) = \phi(X).$$

$$E(h(X,Y)\,|\,\underline{X}) = E\,h(x,Y)\Big|_{x=X}$$

μ, ν τις κατανομές των X, Y στους S_1, S_2

$\rho = \mu \times \nu$ στον $S_1 \times S_2$

$\infty > E|h(X,Y)| = \int |h(x,y)|\, d\mu(x)\, d\nu(y)$

μ - σχ. παντού $\int |h(x,y)|\, d\nu(y) < \infty$

Δηλ. $\varphi(x) = \int h(x,y)\, d\nu(y) = E\,h(x,Y)$ μ- σχ. για κάθε $x \in S_1$

$\mu(A) = 1 = P(X(\omega) \in A) = P(\varphi(X(\omega))$ ορίζεται καλά$)$

$\varphi : S_1 \to \mathbb{R}$ είναι $\mathcal{B}(S_1) / \mathcal{B}(\mathbb{R})$ μετρήσιμη

$\varphi(X)$ είναι $\sigma(X)$ - μετρήσιμη

γιατί για $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $(\varphi \circ X)^{-1}(B) = X^{-1}(\underline{\varphi^{-1}(B)}) \in \sigma(X)$

$\sigma(X) \subset \mathcal{G}$

Άρα η $\varphi(X)$ είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμη

Μένει ν.δ. ότι

$$E\left(h(X,Y)\,\mathbb{1}_A\right) = E\left(\varphi(X)\,\mathbb{1}_A\right)$$

$$\forall A \in \mathcal{G}$$