**Πρόταση 2.13.** *Έστω $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ διαχωρίσιμοι μετρικοί χώροι, $X : \Omega \to \mathcal{S}_1$, $Y : \Omega \to \mathcal{S}_2$ τυχαίες μεταβλητές, $h : \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2 \to \mathbb{R}$ Borel μετρήσιμη ώστε $\mathbf{E}\,|h(X,Y)| < \infty$, και $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ σ-άλγεβρα ώστε η $X$ να είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμη ενώ η $Y$ να είναι ανεξάρτητη της $\mathcal{G}$. Θέτουμε $\phi(x) := \mathbf{E}(h(x,Y))$ αν η μέση τιμή είναι καλά ορισμένη και $\phi(x) = 0$ διαφορετικά. Τότε με πιθανότητα 1, η $\phi(X)$ προσδιορίζεται από τον πρώτο κλάδο της $\phi$ και*

$$\mathbf{E}(h(X,Y)\,|\,\mathcal{G}) = \phi(X).$$

$$E(h(X,Y)|\mathcal{G})(\omega) = \int h(X(\omega), Y(\omega'))\,dP(\omega')$$

$\mu, \nu$ κατανομές των $X, Y$

$\varphi(x) = \int h(x,y)\,d\nu(y)$ $\quad S_1 \to \mathbb{R}$

$\varphi(X)$ $\sigma(X)$-μετρήσιμη $\quad \sigma(X) \subset \mathcal{G}$

$\mathcal{G}$ - "

Αρκεί ν.δ. ότι $E(h(X,Y)1_A) = E(\varphi(X)1_A)$ (*)

$\forall A \in \mathcal{G}$

Τυπική μηχανή στην $h$ για ν.δ. την (*)

- Αν $h = 1_\Gamma$ $\quad \Gamma \in \mathcal{B}(S_1 \times S_2) \overset{\supset}{=} \mathcal{B}(S_1) \otimes \mathcal{B}(S_2)$

  Αν $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$ $\quad \Gamma_1 \in \mathcal{B}(S_1)$, $\Gamma_2 \in \mathcal{B}(S_2)$

  Το αριστερό μέλος της (*) είναι $\qquad Y \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$

  $E(1_{X\in\Gamma_1} 1_{Y\in\Gamma_2} 1_A) = P(X^{-1}(\Gamma_1) \cap Y^{-1}(\Gamma_2) \cap A)$ $\quad A \in \mathcal{G}$

  $= P(X^{-1}(\Gamma_1) \cap A)\, P(Y^{-1}(\Gamma_2))$

  $\varphi(x) = \int 1_{\Gamma_1 \times \Gamma_2}(x,y)\,d\nu(y) = 1_{x\in\Gamma_1}\, \nu(\Gamma_2)$

Το δεξί μέλος της ⊛ είναι

$$E\Big(1_{X\in\Gamma_1}\,\underbrace{\nu(\Gamma_2)}_{=\,P(Y\in\Gamma_2)}\,1_A\Big)=P(Y\in\Gamma_2)\,P(X^{-1}(\Gamma_1)\cap A)$$

Οι $\kappa_1, \kappa_2 : \mathcal{B}(S_1)\times\mathcal{B}(S_2)\longrightarrow[0,\infty]$

με $\kappa_1(\Gamma)=E(1_\Gamma(X,Y)\,1_A)$

$\kappa_2(\Gamma)=E(\varphi_\Gamma(X)\,1_A)$

$\left(\varphi_\Gamma(x)=\int 1_\Gamma(x,y)\,d\nu(y)\right)$

είναι πεπερασμένα μέτρα

$\kappa_1(\Gamma)=\kappa_2(\Gamma)$ $\forall\,\Gamma$ μετρήσιμο ορθογώνιο $\Gamma_1\times\Gamma_2$ $\subset S_1\times S_2$

$$E(h(X,Y)\mid X) = \int h(X(\omega), Y(\omega'))\, dP(\omega')$$

Ασκ. 2.2 $\quad (X, Y)$ με πυκνότητα $f(x,y)$

$\sigma(Y)$

$$X\mid Y = X\mid \sigma(Y) \qquad E|h(X)|<\infty$$

$$f_{X|Y}(x\mid y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \qquad f_Y(Y)$$

$$E(h(X)\mid Y=y) = \int h(x)\, f_{X|Y}(x\mid y)\, dx = \varphi(y)$$

$$E(h(X)\mid Y)(\omega) = \int h(x)\, f_{X|Y}(x\mid Y(\omega))\, dx$$

$$= \varphi(Y(\omega)) \leftarrow \sigma(Y)\text{-μετρήσιμη}$$

$\nu$ κατανομή της $Y$

η $\varphi(y)$ ορίζεται $\nu$ σχεδόν παντού

$$\nu(\underbrace{\{y\in\mathbb{R} : f_Y(y)=0\}}_{A}) = P(Y\in A) = \int_A f_Y(y)\, dy = 0$$

2.3 $\quad X \in L^1$

(α) Αν $X > 0$ $\forall \omega$ τότε $E(X|\mathcal{G}) > 0$ με πιθ. 1

(β) $E\left(\frac{X}{E(X|\mathcal{G})}\right) = 1 \qquad X > 0 \ \forall \omega$

Λύση

(α) $Y = E(X|\mathcal{G}) \geq 0$

$A = \{Y = 0\} \in \mathcal{G}$

$$0 = \int_A Y \, dP = \int_A X \, dP = \int 1_A X \, dP$$

$$1 = P(1_A X = 0) = P(A^c)$$

(β) $$E\left(\frac{X}{E(X|\mathcal{G})}\right) = E\left(E\left(\frac{X}{E(X|\mathcal{G})} \Big| \mathcal{G}\right)\right)$$

$$= E\left(\frac{1}{E(X|\mathcal{G})} E(X|\mathcal{G})\right) = 1$$

2.12, 2.15

# Martingales

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Διήθηση : $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ σ-αλγ. $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}$, $\mathcal{F}_n \uparrow$

δηλ. $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ τ.μ. $\forall n \in \mathbb{N}$

Η $(X_n)_{n\geq 0}$ <u>προσαρμοσμένη</u> αν

$\forall n$ η $X_n$ είναι $\mathcal{F}_n$-μετρήσιμη

<u>Ορισμός</u> Martingale ως προς την $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ και το $P$ είναι οποιαδήποτε $(X_n)_{n\geq 0}$ ώστε

i) $(X_n)_{n\geq 0}$ προσαρμοσμένη

ii) $E|X_n| < \infty$ $\forall n$

iii) $E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Η $(X_n)$ λέγεται submartingale αν η (iii) είναι με $\geq$

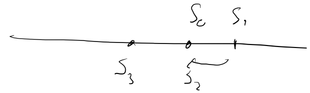
super " " $\leq$

**Παράδειγμα** Ο συμμετρικός απλός τυχαίος περίπατος στο $\mathbb{Z}$

$(X_i)_{i\ge 1}$ ανεξάρτητες, ισόνομες, $P(X_1=1)=P(X_1=-1)=\frac{1}{2}$ $\to (\Omega, \mathcal{F}, P)$

$\mathcal{F}_0=\{\emptyset, \Omega\}$

$\mathcal{F}_n=\sigma(X_1,\dots,X_n)$




$S_0=0$

$S_n=X_1+\dots+X_n$ ← $\mathcal{F}_n$-μετρήσιμη

Η $(S_n)_{n\ge 0}$ είναι martingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\ge 0}$

$|S_n|\le n \Rightarrow S_n\in L^1$.

Για $n\ge 1$

$$E(S_{n+1}\mid\mathcal{F}_n)=E(S_n+X_{n+1}\mid\mathcal{F}_n)$$

$$=E(S_n\mid\mathcal{F}_n)+E(X_{n+1}\mid\mathcal{F}_n)$$

$$=S_n+E(X_{n+1})=S_n$$

$$E(S_1\mid\mathcal{F}_0)=\underline{E(X_1\mid\mathcal{F}_0)=EX_1}=0=S_0$$

$\Omega=\{-1,1\}^{\mathbb{N}^+}$ $\quad \omega=(\omega_1,\omega_2,\dots)$

$X_i(\omega)=\omega_i$

$$\sigma(X_1)=\{X_1^{-1}(B): B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})\}=\{\Omega,\emptyset,\{1\}\times\{-1,1\}^{\mathbb{N}^+\setminus\{1\}},\{-1\}\times\{-1,1\}^{\mathbb{N}^+\setminus\{1\}}\}$$

$$A_{\sigma_1,\dots,\sigma_n}=\{\sigma_1\}\times\{\sigma_2\}\times\dots\times\{\sigma_n\}\times\{-1,1\}^{\mathbb{N}^+\setminus\{1,\dots,n\}}$$

$$\mathcal{F}_n=\sigma(X_1,\dots,X_n)=\sigma(\{A_{\sigma_1,\dots,\sigma_n}:\sigma_i\in\{-1,1\}\})$$

$S_n \in \mathbb{Z}^2$

$(X_n)_{n\geq 0}$ martingale $\Rightarrow$ $(E X_n)_{n\geq 0}$ σταθερή

$E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n \Rightarrow E(E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)) = E(X_n)$

$E(X_{n+1}) = E(X_n)$

$M_n = S_n^2 - n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Η $(M_n)_{n\geq 0}$ είναι martingale

$X_i \sim N(0,1)$

- $M_n$ είναι $\mathcal{F}_n$-μετρήσιμη
- $|S_n| \leq n \quad |M_n| \leq n^2 + n$

$\Rightarrow E|M_n| < \infty$

$E(M_{n+1} | \mathcal{F}_n) = M_n \Leftrightarrow E(M_{n+1} - M_n | \mathcal{F}_n) = 0$

$M_{n+1} - M_n = (S_n + X_{n+1})^2 - n - 1 - S_n^2 + n =$

$= 2S_n X_{n+1} + X_{n+1}^2 - 1 = 2S_n X_{n+1}$

$E(2S_n X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = 2S_n E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n)$

$= 2S_n E(X_{n+1}) = 0$