$S_n = X_1 + \quad + X_n \qquad \mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \quad , X_n)$

Παράδειγμα $(X_i)_{i\geq 1}$ ανεξάρτητες, $EX_i = 1$ $\forall i$ $(E|X_i|<\infty)$

$\mathcal{F}_0 = \{\phi, \Omega\}$

$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \quad , X_n) \quad \forall n \geq 1$

$R_0 = 1$

$R_n = X_1 \cdot \quad \cdot X_n$

Η $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι martingale ως προς τη διήθηση $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Αποδ.

- R_n είναι $\mathcal{F}_n$-μετρήσιμη $\forall n$
- $E|R_n| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ανεξαρτ.}}}{=} E|X_1| \quad E|X_n| < \infty$
- Για $n \in \mathbb{N}$

$$E(R_{n+1} | \mathcal{F}_n) = E(R_n X_{n+1} | \mathcal{F}_n)$$

$$= R_n E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = R_n E(X_{n+1}) = R_n$$

Παράδειγμα (Το martingale του Doob)

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ διήθηση στον $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Θέτουμε

$$X_n = E(X \mid \mathcal{F}_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Η $(X_n)_{n \geq 0}$ είναι μαρτ. ως προς την $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$

- $(X_n)_{n \geq 0}$ προσαρμοσμένη αφού η X_n είναι $\mathcal{F}_n$ μετρήσιμη.
- $E|X_n| \leq E|X| < \infty \Rightarrow X_n \in L^1$
- $$E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = E(E(X \mid \mathcal{F}_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n) = E(X \mid \mathcal{F}_n) = X_n$$

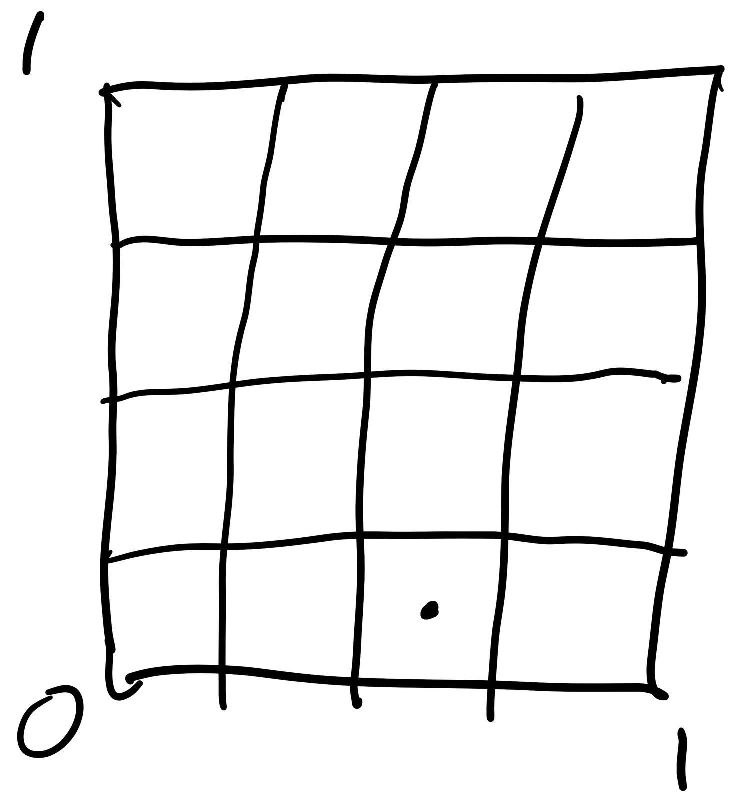
π.χ. αν $\Omega = [0,1)^2$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$, $P = \lambda_2$

$$\Delta_{n,i} = \left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right) \qquad i = 1, \dots, 2^n, \quad n = 0, 1, \dots$$

$$I_{n,i,j} = \Delta_{n,i} \times \Delta_{n,j}$$

$n=2$

$\mathcal{C}_2$



$\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$

$\mathcal{C}_n = \{ I_{n,i,j} : i,j = 1, \dots, 2^n \}$

$\mathcal{F}_n = \sigma(\mathcal{C}_n)$

$X : \Omega \to \mathbb{R}$

$$X_n(\omega) = E(X \mid \mathcal{F}_n)(\omega) = \frac{1}{\lambda_2(I)} \iint_I X \, d\lambda_2 \quad \text{αν } \omega \in I \in \mathcal{C}_n$$

$X_n \to X$

Παράδειγμα Η Κάλπη Polya

Αρχικά α άσπρες $\alpha, \mu > 0$

μ μαύρες

... προσθέτουμε ℓ του ίδιου χρώματος

$A_n = \#$ άσπρων σφαιρ. μετά n εξαγωγές

$B_n = \#$ μαύρων " "

$n = 0, 1, 2,$

$A_0 = \alpha$, $B_0 = \mu$

$\mathcal{F}_n = \sigma(\{A_i, B_i : i = 0, \ldots, n\})$ $n \in \mathbb{N}$

$$X_n = \frac{A_n}{A_n + B_n}, \quad A_n + B_n = \alpha + \mu + n\ell$$

Ισχυρισμός Η $(X_n)_{n \geq 0}$ είναι martingale ως προς την $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$

- X_n είναι $\mathcal{F}_n$-μετρήσιμη $\forall n \in \mathbb{N}$
- $E|X_n| < \infty$ αφού $X_n \in [0, 1]$

Για $n \geq 0$

$$E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)$$

$\mathcal{F}_n \Leftrightarrow$ γνωρίζουμε τις τιμές A_n, B_n

X_{n+1} μπορεί να πάρει τιμές $\frac{A_n + \ell}{A_n + B_n + \ell}$, $\frac{A_n}{A_n + B_n + \ell}$

$$E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \frac{A_n+\ell}{A_n+B_n+\ell}\,\frac{A_n}{A_n+B_n} + \frac{A_n}{A_n+B_n+\ell}\cdot\frac{B_n}{A_n+B_n}$$

$$= \frac{A_n(A_n+B_n+\ell)}{(A_n+B_n+\ell)(A_n+B_n)} = \frac{A_n}{A_n+B_n} = X_n$$

$\mathcal{F}_n$ παράγεται από διαμέριση με στοιχεία

$$C_n(j_1, k_1, j_2, k_2, \quad , j_n, k_n)$$

$$= \{\omega \in \Omega : A_1(\omega) = j_1,\ B_1(\omega) = k_1, \quad , A_n = j_n,\ B_n = k_n\}$$

Αν $\omega \in C_n(\ .\ \ .\ \ .\ ) = \Delta_\omega$

$$E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \frac{1}{P(\Delta_\omega)} E(X_{n+1} 1_{\Delta_\omega})$$

$$= \frac{1}{P(\Delta_\omega)} \left(\frac{j_n+\ell}{j_n+k_n+\ell} P(\text{επιλ λευκό} \cap \Delta_\omega) \right.$$

$A_n(\omega) = j_n$

$B_n(\omega) = k_n$

$$\left. + \frac{j_n}{j_n+k_n+\ell} P(\text{επιλ. μαύρο} \cap \Delta_\omega) \right)$$

$$= \frac{j_n+\ell}{j_n+k_n+\ell} P(\text{επιλ. λευκό} \mid \Delta_\omega) + \ .\ \ . \ P(\text{επιλ μ} \mid \Delta_\omega)$$

$$= \quad '' \quad \frac{j_n}{j_n+k_n} + $$

$$X_n = \frac{A_n}{A_n+B_n} \longrightarrow X \quad \text{με πιθ. } 1$$

$$X \sim B\left(\frac{a}{\ell}, \frac{\mu}{\ell}\right)$$

$X \sim B(a, \beta) \quad c\, x^{a-1}(1-x)^{\beta-1} 1_{x \in (0,1)}$

1 επ.

1 απ.

$E A$, $E E$

$\frac{3}{4}$

100 $\quad \frac{1}{2}$

$0, 1, \quad , 100 \qquad \frac{1}{101}$

$a=1, \beta=1$

$B(1,1) \sim U(0,1) \qquad X_n \qquad \frac{1}{n+2}, \frac{2}{n+2}, \quad , \frac{n+1}{n+2}$

Ιδιότητες των martingales

Πρόταση

$(X_n)_{n\geq 0}$ martingale ως προς $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$

Τότε $\quad E(X_n \mid \mathcal{F}_m) = X_m \quad \forall\, 0 \leq m < n$

Απόδ. $\qquad n = m+1$

Επαγωγή στο n.

Για $n = m+1$ ισχύει

Αν ισχύει για $n > m$

$$E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_m) = E(E(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \mid \mathcal{F}_m)$$

$$= E(X_n \mid \mathcal{F}_m) \underset{\text{επαγ. υπόθ.}}{=} X_m$$

Όμοια, για X submartingale

$$E(X_n \mid \mathcal{F}_m) \geq X_m \quad \forall\, 0 \leq m < n$$

<u>Πρόταση</u> $X=(X_n)_{n\geq 0}$ τ.μ. με $P(X_n\in I)=1$ $\forall n\in\mathbb{N}$

$I\subset\mathbb{R}$ διάστημα, $f: I\to\mathbb{R}$ με $E|f(X_n)|<\infty$ $\forall n\in\mathbb{N}$

i) Αν X martingale ως προς $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ και f κυρτή, τότε η $(f(X_n))_{n\geq 0}$ είναι submartingale

ii) Αν X submartingale, f κυρτή και αύξουσα, τότε η $(f(X_n))_{n\geq 0}$ είναι submartingale

Αποδ.

$(f(X_n))_{n\geq 0}$ είναι προσαρμοσμένη

$\left((f(X_n))^{-1}(A) = \underbrace{X_n^{-1}(f^{-1}(A))}_{\in \mathcal{F}_n}, \quad A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}) \right)$ f κυρτή $\Rightarrow$ μετρήσιμη

$E|f(X_n)|<\infty$ ...

i) $E(f(X_{n+1})|\mathcal{F}_n) \geq f(E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n))$

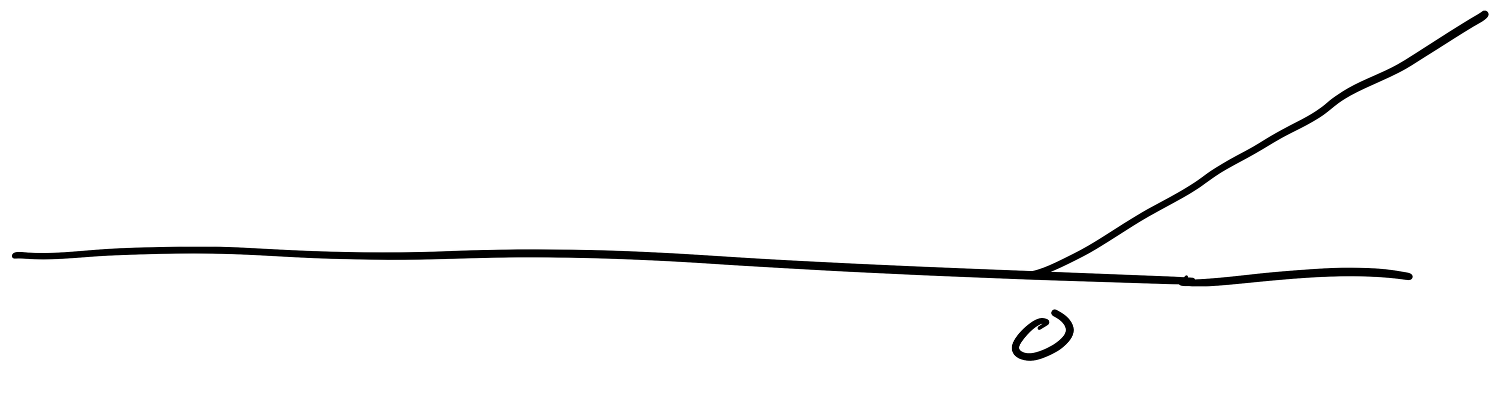
$= f(X_n)$

ii) $E(f(X_{n+1})|\mathcal{F}_n) \geq f(\overbrace{E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)}^{\geq X_n})$

$\underset{f\uparrow}{\geq} f(X_n)$

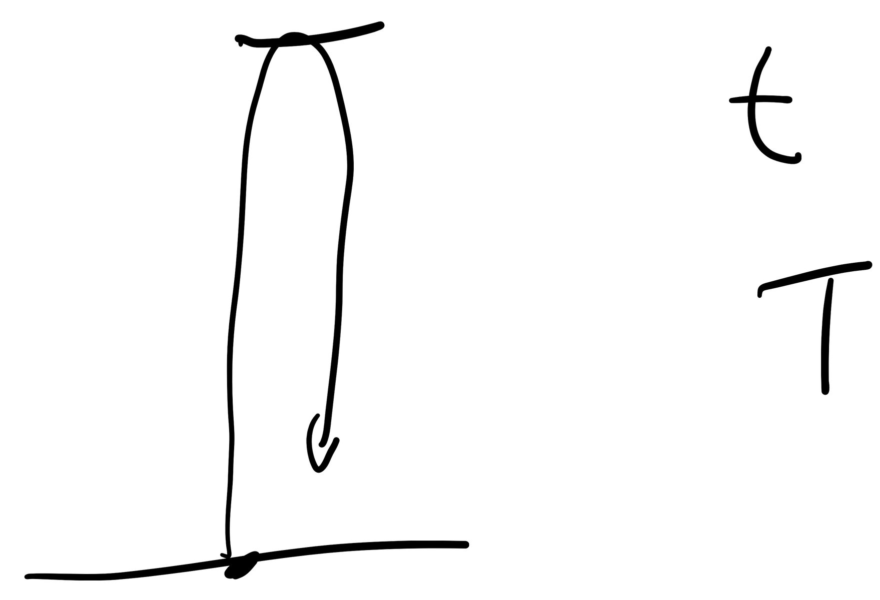
X_n martingale $|X_n|, X_n^2$ submartingale

X_n submartingale X_n^+ submartingale



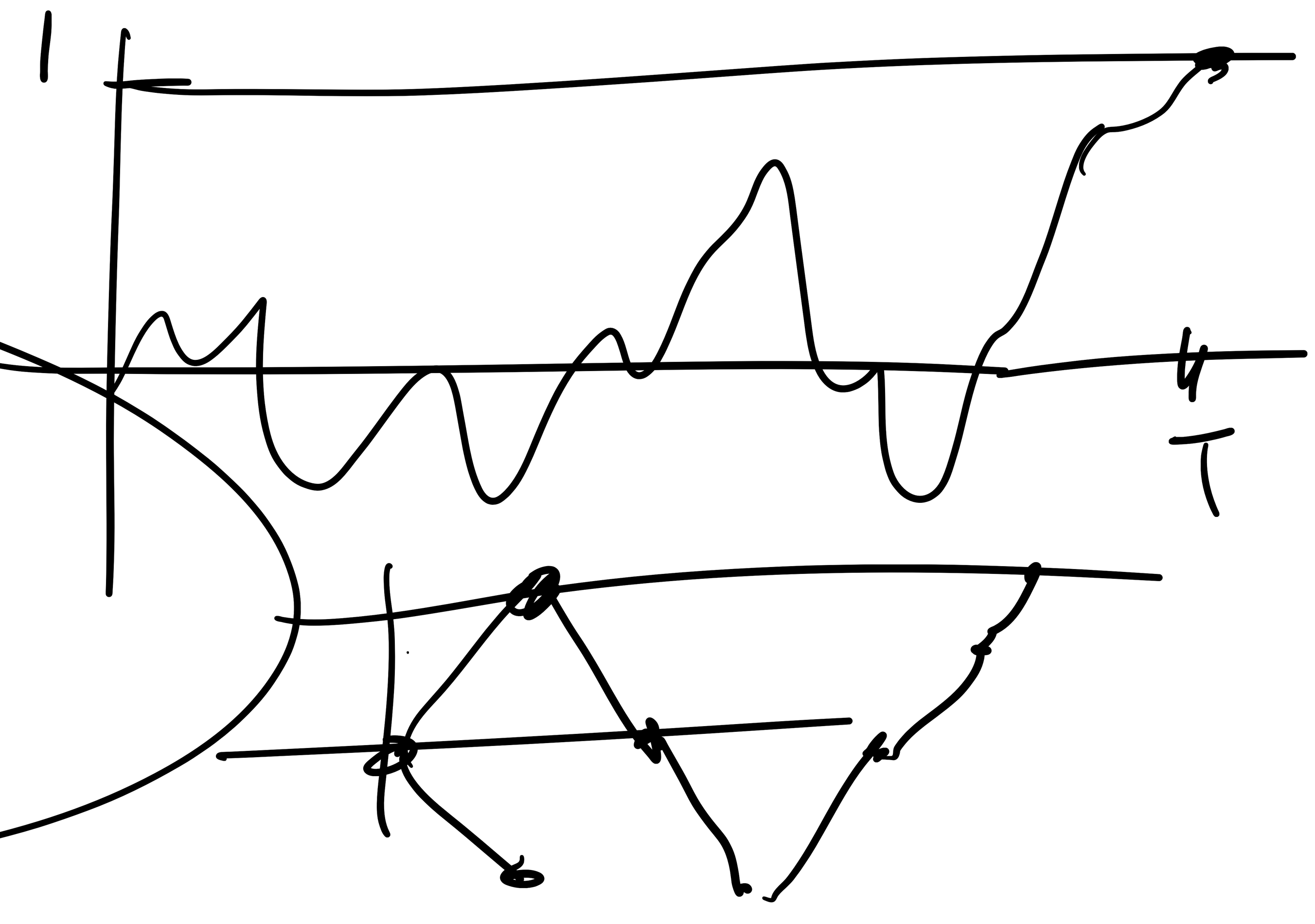
$\longrightarrow E(X_n) = E(X_0)$

$\longrightarrow E(X_T) = E(X_0)$



$E(S_1) = 0$ $\quad S_n$

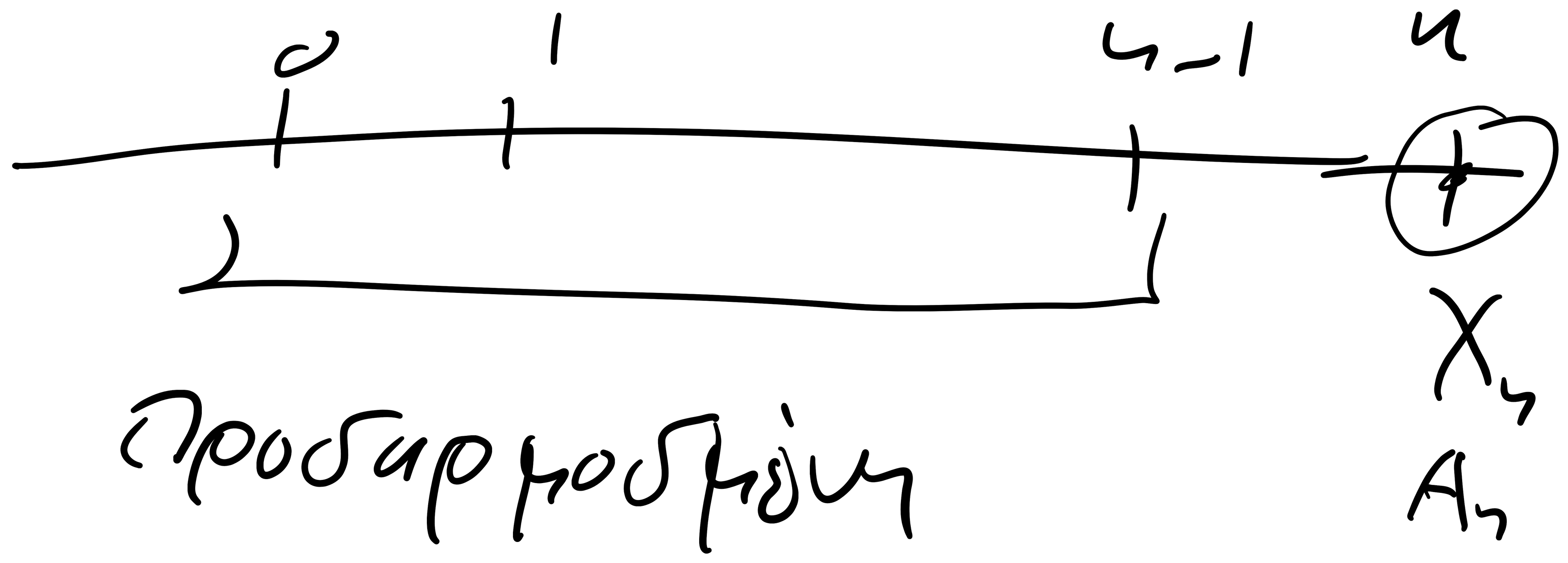
$$E(t^{T_1}) = \frac{1-\sqrt{1-t^2}}{t}$$



$(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ διήθηση στο $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$A_n : \Omega \to \mathbb{R}$ $\forall n \geq 1$ τ.μ.

Η $A = (A_n)_{n\geq 1}$ λέγεται <u>προβλέψιμη</u> αν η A_n είναι $\mathcal{F}_{n-1}$-μετρήσιμη $\forall n \geq 1$



Έστω $X = (X_n)_{n\geq 0}$ προσαρμοσμένη

Ορίζουμε την ανέλιξη $A\cdot X$ ως εξής

$$(A\cdot X)_0 := 0$$

$$(A\cdot X)_n := \sum_{k=1}^{n} A_k (X_k - X_{k-1}) \quad \forall n \geq 1$$

Διακριτό στοχαστικό ολοκλήρωμα της A ως προς την X.

$A\cdot X$ είναι προσαρμοσμένη

Πρόταση i) Αν X submartingale και κάθε A_n είναι φραγμένη και ≥ 0 τότε η $A \cdot X$ είναι submartingale.

ii) Αν X martingale και κάθε A_n είναι φραγμένη, τότε $A \cdot X$ martingale

Αποδ

$A \cdot X$ προσαρμοσμένη

$$|(A \cdot X)_n| \leq \sum_{k=1}^{n} \underbrace{|A_k|}_{\leq c_k} (|X_k| + |X_{k-1}|)$$

$$\Rightarrow (A \cdot X)_n \in L^1$$

$$E(Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \geq Y_n$$

$$\longrightarrow E(Y_{n+1} - Y_n \mid \mathcal{F}_n) \geq 0$$

i)

$$(A \cdot X)_{n+1} - (A \cdot X)_n = A_{n+1} (X_{n+1} - X_n)$$

$$E(A_{n+1}(X_{n+1} - X_n) \mid \mathcal{F}_n)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ A \text{ προβλ}}}{=} A_{n+1} \underbrace{E(X_{n+1} - X_n \mid \mathcal{F}_n)}_{\geq 0} \overset{A_{n+1} \geq 0}{\geq} 0$$